

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН  
(ИЯФ СО РАН)

Р.Е. Герасимов, В.С. Фадин

АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕНИЙ,  
ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ  
РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВК  
К СЕЧЕНИЮ ЭЛЕКТРОН-ПРОТОННОГО  
РАССЕЯНИЯ

ИЯФ 2014-10

НОВОСИБИРСК  
2014

**Анализ приближений,  
используемых при вычислении радиационных поправок  
к сечению электрон-протонного рассеяния**

*Р.Е. Герасимов, В.С. Фадин*

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера  
Новосибирский государственный университет  
630090, Новосибирск, Россия

**Аннотация**

В работе проводится анализ приближений, используемых при вычислении радиационных поправок к сечению электрон-протонного рассеяния. Исследуется расхождение между применявшимися при обработке экспериментов результатами работ Мо и Тсяя и более поздними результатами Максимова и Тьена. Обсуждается влияние процедуры учета радиационных поправок на измеряемое отношение формфакторов протона.

---

*\* Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: грант 13-02-01023, гранта Президента Российской Федерации МК-525.2013.2, а также Фонда некоммерческих программ “Династия”.*

---

# 1 Введение

Процесс рассеяния электрона на протоне является одним из главных инструментов для изучения внутренней структуры протона. Сечение этого процесса в борновском приближении выражается через квадраты электрического  $G_E$  и магнитного  $G_M$  формфакторов протона, являющихся функциями передачи импульса. В классических экспериментах по измерению формфакторов [1] – [8] электрон рассеивался на неподвижном протоне, причем в конечном состоянии регистрировался только рассеянный электрон; фиксировался угол его рассеяния и измерялась энергия. Отбор “упругих” событий проводился ограничением энергии рассеянного электрона снизу. Аналитическое выражение для радиационных поправок в такой постановке эксперимента впервые было получено Тсаем [9]. Некоторые погрешности этой работы были исправлены позднее в работе Мо и Тсяя [10]. Результаты [10] использовались при обработке данных последующих экспериментов [11] – [22] с регистрацией рассеянного электрона.

Значительным улучшением результатов Мо и Тсяя считается [23] более современный расчет радиационных поправок [24], выполненный Максимом и Тьеном. Наиболее существенны отличия двух расчетов для вкладов диаграмм двухфотонного обмена и тормозного излучения. Кроме этого, есть разница в вычислении виртуальной поправки к протонной вершине.

Расчеты обеих групп авторов по необходимости являются приближенными, поскольку точный расчет радиационных поправок невозможен из-за неэлементарности протона и сильного взаимодействия его составляющих.

Интерес к теме радиационных поправок (инициировавший работу Максима и Тьена) возник в начале 2000-х годов, после появления результатов поляризационных экспериментов [25] – [27], согласно которым отношение формфакторов  $G_E/G_M$  падает с ростом передачи импульса. Такое поведение находится в явном противоречии с данными, полученными ранее методом розенблютовского разделения [28]  $G_E$  и  $G_M$  в серии экспериментов с неполяризованными частицами [6] – [8], [11] – [22]. Согласно этим данным, отношение  $G_E/G_M$  слабо зависит от передачи импульса.

Для их проверки эксперимент с неполяризованными частицами был проведен в другой постановке, в которой фиксировался конечный протон [29]. Он также дал слабую зависимость  $G_E/G_M$  от передачи импульса и, таким образом, ещё более обострил возникшее после работ [25], [26] противоречие.

Одним из возможных объяснений этого противоречия считается недостаточно аккуратный учет радиационных поправок в экспериментах по измерению  $G_E$  и  $G_M$  методом розенблютовского разделения. Этот метод становится чрезвычайно чувствителен к радиационным поправкам при больших передачах импульса, поскольку относительный вклад  $G_E$  в сечение падает с ростом передачи. Ясно, что когда погрешность вычисления радиационных поправок становится больше этого вклада, измерение  $G_E/G_M$  становится невозможным.

В данной работе мы анализируем расхождения между результатами Мо-Тсяя [10] и Максимова-Тьена [24], приближения, используемые в этих расчетах, и точность, на которую можно рассчитывать в рамках этих приближений. Из-за противоречия между экспериментальными результатами для  $G_E/G_M$  особый интерес представляют радиационные поправки, которые могли повлиять на это отношение. Наибольшая неопределенность связана с вкладами диаграмм двухфотонного обмена для упругого рассеяния и интерференции электронного и протонного тормозного излучения. Для удобства и полноты изложения мы приводим также и те поправки, в вычислении которых нет расхождений.

Статья организована следующим образом. В следующем разделе приводятся используемые обозначения и даются необходимые определения. В третьем разделе рассматриваются виртуальные радиационные поправки, в четвертом – реальные. В Заключение кратко суммируются результаты проведенного анализа. В Приложениях даны детали вычислений петлевых интегралов, функций мягкофотонного приближения, двухфотонной амплитуды рассеяния электрона на точечном протоне и интегралов для вычисления реальных поправок.

## 2 Определения и основные обозначения

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:  $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$  – электромагнитная константа связи;  $m$  – масса электрона;  $M$  – масса протона;  $p_1 = (\epsilon_1, \mathbf{p}_1)$  и  $p_3 = (\epsilon_3, \mathbf{p}_3)$  – начальный и конечный 4-импульсы электрона;  $p_2 = (M, \mathbf{0})$  и  $p_4 = (\epsilon_4, \mathbf{p}_4)$  – начальный и конечный 4-импульсы протона (все 4-импульсы приводятся

системе покоя начального протона);  $q = p_1 - p_3$  — передача импульса,  $Q^2 = -q^2$ . Во всех дальнейших вычислениях масса электрона считается малой (если не оговорено противное):  $m^2/\epsilon_i^2$ ,  $m^2/(-q^2)$ ,  $m^2/M^2 \ll 1$ . В упругом процессе имеем  $\epsilon_{3,el} = \epsilon_1/\eta$ , где

$$\eta = 1 + (2\epsilon_1/M) \sin^2(\theta/2), \quad (1)$$

$\theta$  — угол рассеяния электрона. Инфракрасные расходимости, возникающие при вычислении радиационных поправок, регуляризуются введением массы фотона  $\lambda$ , которая считается малой по сравнению со всеми другими величинами размерности массы. Для выделения радиационных поправок, связанных с протоном, его заряд считается равным  $-Ze$ , где  $e$  — заряд электрона.

Амплитуда упругого рассеяния в борновском приближении имеет вид

$$M_B = -\frac{Ze^2}{q^2} (\bar{u}_{p_3} \gamma^\mu u_{p_1}) (\bar{U}_{p_4} \Gamma^\mu(q) U_{p_2}), \quad (2)$$

где вершина взаимодействия  $\Gamma^\mu(q)$  протона с виртуальным фотоном параметризуется двумя формфакторами

$$\Gamma^\mu(q) = F_1(q^2) \gamma^\mu - F_2(q^2) \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3)$$

Формфакторы  $F_{(1,2)}$  связаны с электрическим и магнитным формфакторами  $G_{(E,M)}$  соотношениями:

$$F_1(q^2) = \frac{G_E(q^2) + \tau G_M(q^2)}{1 + \tau}, \quad (4)$$

$$F_2(q^2) = \frac{G_M(q^2) - G_E(q^2)}{1 + \tau}, \quad (5)$$

где  $\tau = Q^2/(4M^2)$ .

Использование (2) приводит к известной формуле Розенблюта [28] для дифференциального по углу вылета конечного электрона сечения, усредненного по поляризациям начальных и просуммированного по поляризациям конечных частиц:

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{4\epsilon_1^2 \eta \sin^4(\theta/2)} \frac{\sigma_R}{\epsilon(1 + \tau)}, \quad (6)$$

где

$$\epsilon = (1 + 2(1 + \tau) \tan^2(\theta/2))^{-1} = \left(1 + \frac{2\tau(1 + \tau)M^2}{\epsilon_1^2 - M\tau(2\epsilon_1 + M)}\right)^{-1}, \quad (7)$$

$$\sigma_R = \tau G_M^2(q^2) + \epsilon G_E^2(q^2). \quad (8)$$

Величину  $\sigma_R$  называют “редуцированным сечением”. При фиксированной передаче импульса оно остается функцией энергии налетающего электрона, что позволяет извлекать из экспериментальных данных отношение формфакторов при заданном значении  $q^2$ . Зависимость  $\sigma_R$  от  $\epsilon$  изображается прямой с наклоном  $G_E^2$ , пересекающей ось ординат в точке  $\tau G_M^2$ . Отношение  $G_E^2/G_M^2$  измеряется по наклону прямой, который уменьшается с ростом передачи импульса. Это же относится и к относительному вкладу  $G_E$  в сечение. Поэтому определение отношения  $G_E/G_M$  таким методом при больших передачах импульса чрезвычайно чувствительно к зависящим от  $\epsilon$  радиационным поправкам к сечению и становится невозможным, когда вклад  $G_E$  в сечение (6) оказывается в пределах точности их вычисления.

Экспериментально наблюдаемым является сечение электрон-протонного рассеяния с излучением любого числа мягких недетектируемых фотонов. В следующем за борновским приближении оно обычно представляется в виде

$$\frac{d\sigma_{exp}}{d\Omega} = (1 + \delta) \frac{d\sigma_0}{d\Omega}, \quad (9)$$

где радиационная поправка  $\delta$  вычисляется как сумма поправки к сечению упругого процесса от виртуальных фотонов и поправки от излучения реального фотона,  $\delta = \delta_{virt} + \delta_{real}$ . Виртуальную поправку  $\delta_{virt}$  дает интерференция борновской амплитуды (2) с однопетлевыми амплитудами упругого процесса; реальная поправка  $\delta_{real}$  обусловлена излучением одного фотона.

### 3 Виртуальные радиационные поправки

Виртуальная поправка  $\delta_{virt}$  состоит из поправок от поляризации вакуума  $\delta_{vac}$ , от электронной и протонной вершин  $\delta_{vertex}^e$  и  $\delta_{vertex}^p$  соответственно и от двухфотонного обмена  $\delta_{2\gamma}$ ,

$$\delta_{virt} = \delta_{vac} + \delta_{vertex}^e + \delta_{vertex}^p + \delta_{2\gamma}. \quad (10)$$

#### 3.1 Поляризация вакуума и поправка к электронной вершине

Поправка от поляризации вакуума  $\delta_{vac}$  равна удвоенному поляризационному оператору  $\mathcal{P}(q^2)$ ,

$$\delta_{vac} = 2\mathcal{P}(q^2), \quad (11)$$

содержащему лептонный (электронный, мюонный и  $\tau$ -лептонный) и адронный вклады:

$$\mathcal{P}(q^2) = \mathcal{P}_e(q^2) + \mathcal{P}_\mu(q^2) + \mathcal{P}_\tau(q^2) + \mathcal{P}_h(q^2) \quad (12)$$

Однопетлевой лептонный вклад в поляризацию вакуума  $\mathcal{P}_l(q^2)$ ,  $l = e, \mu, \tau$  (рис. 1) хорошо известен:

$$\mathcal{P}_l(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{q^2}} \left( 1 + \frac{2m_l^2}{q^2} \right) \ln \left( \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{q^2}} - 1} \right) - \frac{4m_l^2}{3q^2} - \frac{5}{9} \right). \quad (13)$$

Для электронного вклада, при  $-q^2 \gg m^2$ , имеем

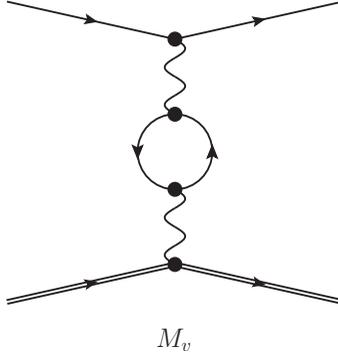


Рис. 1. Диаграмма с лептонной поляризацией вакуума.

$$\mathcal{P}_e(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{3} \ln \left( \frac{-q^2}{m^2} \right) - \frac{5}{9} \right). \quad (14)$$

Мо и Тсай в работе [10] учитывали только этот вклад. Впоследствии при обработке (например, в сравнительно недавнем эксперименте в SLAC [21]) наряду с электронным учитывались также мюонный и тау-лептонный вклады, а также вклад адронов. Адронный вклад  $\mathcal{P}_h(q^2)$ , включающий в себя эффекты сильного взаимодействия, нельзя найти из первых принципов. Значение  $\mathcal{P}_h(q^2)$  при отрицательных значениях  $q^2$  восстанавливается по дисперсионному соотношению из обработки экспериментов по аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны.

Выражение для поправки к электронной вершине (рис. 2) широко известно в литературе. В пределе  $-q^2 \gg m^2$  соответствующая амплитуда

$M_e$  факторизуется:

$$M_e = \frac{\alpha}{2\pi} \left( -K(p_1, p_3) + K(p_1, p_1) + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{-q^2}{m^2} \right) - 2 \right) M_1. \quad (15)$$

Мы придерживаемся обозначений из статьи Тсая [9]:

$$K(p_i, p_j) = (p_i \cdot p_j) \int \frac{dy}{p_y^2} \ln \left( \frac{p_y^2}{\lambda^2} \right), \quad (16)$$

где  $p_y = p_i y + p_j (1 - y)$ . Явное выражение для этих функций выписаны в приложении В. Соответствующий вклад от электронной вершины в виртуальные поправки равен

$$\delta_{vertex}^e = \frac{\alpha}{\pi} \left( -K(p_1, p_3) + K(p_1, p_1) + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{-q^2}{m^2} \right) - 2 \right). \quad (17)$$

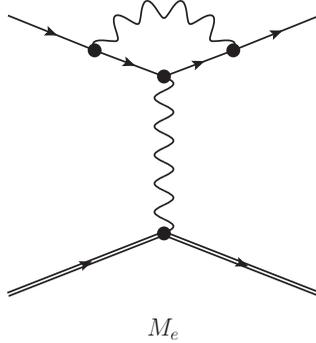


Рис. 2. Диаграмма с поправкой к электронной вершине.

Таким образом, с учетом дополнения о вкладе тяжелых лептонов и адронов в поляризацию вакуума подходы Максимова-Тьена и Мо-Тсая совпадают в этой части виртуальных поправок. Еще раз подчеркнем, что единственное приближение, которое использовалось при выводе (14) и (15) — это то, что  $-q^2 \gg m^2$ .

### 3.2 Поправка к протонной вершине

Амплитуда  $M_p$ , содержащая электромагнитную поправку к протонной вершине, не может быть вычислена в общем случае. Обе группы авторов

использовали для нее одночастичное приближение. В схеме перенормировок на массовой поверхности оно изображается диаграммой рис. 3. В этом приближении из всех виртуальных адронных состояний удерживаются только протонные, причем используются борновские пропагаторы протонов, а вершины взаимодействия фотонов с протонами берутся на массовой поверхности последних, т.е. в форме (3).

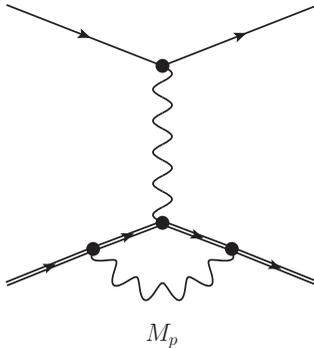


Рис. 3. Поправка к протонной вершине.

Мо и Тсай [9] пошли на дальнейшее упрощение и использовали для этой амплитуды стандартное мягкофотонное приближение, при котором импульсы фотонов в числителях фермионных пропагаторов полагаются равными нулю:

$$M_p = \frac{Z^2 \alpha}{2\pi} (-K(p_2, p_4) + K(p_2, p_2)) M_1, \quad (18)$$

и, соответственно,

$$\delta_{vertex}^p = \frac{Z^2 \alpha}{\pi} (-K(p_2, p_4) + K(p_2, p_2)). \quad (19)$$

Максимон и Тьен применяли одночастичное приближение без дальнейших упрощений. Для входящих в фотонные вершины формфакторов использовались модели с монополярной и дипольной зависимостью от передачи импульса:

$$F_i(q^2) \propto \left( \frac{\Lambda^2}{-q^2 + \Lambda^2} \right)^n, \quad n = 1, 2, \quad \Lambda \simeq 1 \text{ GeV}/c. \quad (20)$$

Оказалось [24], что разница  $\delta_{virt}^{(1)}$  между таким приближением для вклада в поправку (10) от протонной вершины и приближением (18) всегда положительна и пренебрежимо мала в экспериментальной области

энергий и передач импульса ( $\delta_{virt}^{(1)} < 0.012$  при  $Q^2 \lesssim 16$  (GeV/c)<sup>2</sup>). Но при бóльших передачах отличие становится существенным, и, согласно Максимуму и Тьену, поправка  $\delta_{virt}^{(1)}$  должна учитываться в экспериментах по электрон-протонному рассеянию при энергиях больше 8 ГэВ.

Однако целесообразность такого учета представляется сомнительной, поскольку вопрос о том, приближает ли учет  $\delta_{virt}^{(1)}$  поправку к точной, остается открытым. В самом деле, учет  $\delta_{virt}^{(1)}$  означает вычисление вклада в (10) от протонной вершины в описанном выше одночастичном приближении (или, в терминологии [24], с учетом структуры протона), при отбрасывании многоадронных вкладов. Доказательство того, что это приближение лучше, чем стандартное мягкофотонное, отсутствует.

С другой стороны, следует отметить, что протонная вершина имеет вид (3) и с учетом электромагнитных радиационных поправок, так что, на первый взгляд, и не имеет смысл выделять их. Это выделение кажется и физически бессмысленным, поскольку оно означает использование ненаблюдаемых величин – формфакторов без учета электромагнитного взаимодействия. Но проблема в том, что формфакторы ненаблюдаемы даже при включении в них электромагнитного взаимодействия, поскольку они определены для упругого рассеяния, а физически наблюдаемы только процессы с излучением любого числа мягких недетектируемых фотонов. Сечение любого инклюзивного процесса обращается в нуль при учете радиационных поправок, связанных с мягкими фотонами, во всех порядках теории возмущений  $\alpha$ . В каждом данном порядке это проявляется через инфракрасные расходимости в виртуальных и реальных поправках к эксклюзивным сечениям, которые сокращаются только в их сумме. Поэтому с учетом электромагнитных поправок формфакторы содержат в каждом порядке инфракрасные расходимости, а при суммировании поправок обращаются в нуль.

Итак, включение электромагнитных поправок в формфакторы делает их бессмысленными из-за инфракрасных расходимостей. Но эти расходимости связаны с мягкими фотонами. Они известны во всех порядках теории возмущений, факторизуются в экспоненту с показателем равным расходящейся части поправки 1-го порядка (см., напр. [30]) и не имеют отношения к структуре протона и к многоадронным промежуточным состояниям.

Представляется естественным и физически осмысленным включить в определение формфакторов все поправки, кроме факторизующихся в экспоненту инфракрасно расходящихся. Ввиду неоднозначности выделения расходящейся части поправки, такое определение содержит произвол

и требует уточнения. Удобно использовать для этого стандартное мягко-фотонное приближение. Тогда вся поправка от протонной вершины содержится в (19) (и сокращается с соответствующей реальной поправкой), а поправка  $\delta_{virt}^{(1)}$  и неучтенная в [24] поправка от многоадронных промежуточных состояний включены в определение формфакторов и вычислять их нет нужды.

Заметим, что хотя включение всех электромагнитных поправок в формфакторы делает каждый из них бессмысленным, их отношение остается конечным и имеющим физический смысл, поскольку, благодаря факторизации инфракрасно расходящихся поправок, они не влияют на это отношение.

### 3.3 Амплитуды двухфотонного обмена

Наибольшие сложности при вычислении виртуальных поправок связаны с амплитудами двухфотонного обмена. В одночастичном приближении, когда удерживается только протонное промежуточное состояние, эти амплитуды изображаются диаграммами рис. 4. В фейнмановской калибровке для первой амплитуды имеем

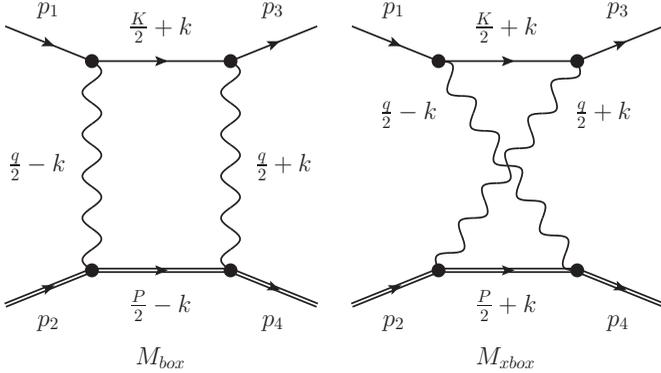


Рис. 4. Диаграммы двухфотонного обмена.

$$\begin{aligned}
 iM_{box} = & Z^2 e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4} \left( \bar{u}_{p_3} \gamma^\mu \left( \hat{k} + \frac{\hat{K}}{2} + m \right) \gamma^\nu u_{p_1} \right) \times \\
 & \times \left( \bar{U}_{p_4} \Gamma^\mu \left( k + \frac{q}{2} \right) \left( -\hat{k} + \frac{\hat{P}}{2} + M \right) \Gamma^\nu \left( \frac{q}{2} - k \right) U_{p_2} \right), \quad (21)
 \end{aligned}$$

а для второй

$$iM_{xbox} = Z^2 e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d'_4} \left( \bar{u}_{p_3} \gamma^\mu \left( \hat{k} + \frac{\hat{K}}{2} + m \right) \gamma^\nu u_{p_1} \right) \times \\ \times \left( \bar{U}_{p_4} \Gamma^\nu \left( \frac{q}{2} - k \right) \left( \hat{k} + \frac{\hat{P}}{2} + M \right) \Gamma^\mu \left( k + \frac{q}{2} \right) U_{p_2} \right). \quad (22)$$

Здесь приняты обозначения

$$d_1 = \left( k - \frac{q}{2} \right)^2 - \lambda^2 + i\epsilon, \quad (23)$$

$$d_2 = \left( k + \frac{K}{2} \right)^2 - m^2 + i\epsilon, \quad (24)$$

$$d_3 = \left( k + \frac{q}{2} \right)^2 - \lambda^2 + i\epsilon, \quad (25)$$

$$d_4 = \left( k - \frac{P}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon, \quad (26)$$

$$d'_4 = \left( k + \frac{P}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon, \quad (27)$$

а также  $K = p_1 + p_3$  и  $P = p_2 + p_4$ .

Дальнейшие упрощения этих амплитуд, использованные обеими группами авторов, основаны на мягкофотонном приближении в разных его вариантах. Мо и Тсай использовали стандартный вариант, когда импульсом мягкого фотона пренебрегают везде, кроме знаменателей пропагаторов этого фотона и взаимодействующих с ним частиц. С учетом уравнений Дирака это дает

$$iM_{box}^{soft} = (-Ze^2)4(p_1 p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{d_1 d_2 d_4} + \frac{1}{d_2 d_3 d_4} \right) M_1, \quad (28)$$

$$iM_{xbox}^{soft} = (-Ze^2)4(p_1 p_4) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{d_1 d_2 d'_4} + \frac{1}{d_2 d_3 d'_4} \right) M_1, \quad (29)$$

или, с учетом определений (16),

$$M_{box}^{soft} = -\frac{Z\alpha}{2\pi} (K(p_1, -p_2) + K(p_3, -p_4)) M_1 = -\frac{Z\alpha}{\pi} K(p_1, -p_2) M_1, \quad (30)$$

$$M_{xbox}^{soft} = \frac{Z\alpha}{2\pi} (K(p_1, p_4) + K(p_3, p_2)) M_1 = \frac{Z\alpha}{\pi} K(p_1, p_4) M_1. \quad (31)$$

Дополнительное упрощение, использованное в [9], состоит в замене  $K(p_1, -p_2)$  на  $K(p_1, p_2)$  в выражении для box-диаграммы (30):

$$M_{box}^{MoT} = -\frac{Z\alpha}{\pi} K(p_1, p_2) M_1, \quad (32)$$

$$M_{xbox}^{MoT} = \frac{Z\alpha}{\pi} K(p_1, p_4) M_1. \quad (33)$$

Эта замена обосновывалась тем, что в виртуальные поправки дает вклад только реальная часть  $K(p_1, -p_2)$ , и что отличием  $Re(K(p_1, -p_2))$  от  $K(p_1, p_2)$  можно пренебречь. Последнее утверждение никак не было обосновано. По существу, оно и неверно. Как показано в приложении В,

$$Re(K(p_1, -p_2)) - K(p_1, p_2) = -\frac{\pi^2}{2} + \int_{1-\frac{M^2}{s-M^2}}^{1+\frac{M^2}{s-M^2}} \frac{dt}{t} \ln |1-t|, \quad (34)$$

где  $s = (p_1 + p_2)^2$ . Видно, что разница скорее велика, чем мала. В пределе больших энергий  $s \gg M^2$  она равна  $-\pi^2/2$ . Нетрудно понять ее происхождение: она связана с разницей дважды-логарифмических членов при  $s > 0$  и  $s < 0$ . С дважды-логарифмической точностью поправку к электронной вершине можно найти, например, в книге Берестецкого, Лифшица и Питаевского [31]. Приведенный там способ выделения дважды-логарифмической асимптотики с незначительными изменениями из-за различия масс  $m \neq M$  работает и для функции  $K(p_1, p_2)$  и дает

$$K(p_1, p_2) = \ln \frac{mM}{\lambda^2} \ln \frac{-(p_1 - p_2)^2}{mM} + \frac{1}{2} \ln \frac{-(p_1 - p_2)^2}{m^2} \ln \frac{-(p_1 - p_2)^2}{M^2} \quad (35)$$

с положительными аргументами логарифмов. Замена  $p_2 \rightarrow -p_2$  означает, что этот результат следует аналитически продолжить в область отрицательных аргументов, что и приводит к добавке  $-\pi^2/2$  в  $Re(K(p_1, -p_2))$ .

Представив вклад двухфотонных амплитуд в виртуальные радиационные поправки как

$$\delta_{2\gamma} = \delta_{box} + \delta_{xbox}, \quad (36)$$

выпишем окончательные выражения для  $\delta_{box}$  и  $\delta_{xbox}$ , которое использовалось в подходе Мо и Тсяя:

$$\delta_{box}^{MoT} = -\frac{2Z\alpha}{\pi} K(p_1, p_2), \quad (37)$$

$$\delta_{xbox}^{MoT} = \frac{2Z\alpha}{\pi} K(p_1, p_4). \quad (38)$$

Как показано выше, проделанная при получении (38) из (30) замена  $K(p_1, -p_2)$  на  $K(p_1, p_2)$  заметно (при большой энергии на величину  $\sim \pi\alpha$ ) меняет значение поправки. Поэтому такая замена кажется существенным недостатком. Но здесь следует заметить, что само стандартное мягкофотонное приближение (30) (так же как и (31)) при больших энергиях (в реджевской области  $s \gg M^2, s \gg |t|$ ) имеет существенный недостаток, так как дает дважды-логарифмические члены типа  $\ln^2(-s)$  (см. (35)), которых, как хорошо известно, заведомо нет в точном ответе. Члены такого типа возникают из-за того, что точный матричный элемент бок-диаграммы (21), в котором подавление вклада больших импульсов виртуальных фотонов связано как с  $s$ , так и с  $t$ , заменяется на сумму матричных элементов двух треугольных диаграмм (30), в которых это подавление связано только с  $s$ . Детально этот вопрос рассмотрен в следующем разделе.

Этот недостаток устранен в приближении, используемом Максимоном и Тьеном. Оно получается приведением членов в (21) и (22) к общему знаменателю и заменой в числителе  $d_1 + d_3$  на  $q^2$  (равенство  $d_1 + d_3 = q^2$  имеет место при нулевых импульсах любого из фотонов). В результате

$$iM_{box}^{MTj} = (-Ze^2)4(p_1p_2)q^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1d_2d_3d_4} M_1, \quad (39)$$

$$iM_{xbox}^{MTj} = (-Ze^2)4(p_1p_4)q^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1d_2d_3d'_4} M_1, \quad (40)$$

что дает после вычисления интегралов

$$\delta_{box}^{MTj} = -\frac{2Z\alpha}{\pi} \frac{\epsilon_1}{|\mathbf{p}_1|} \ln\left(\frac{\epsilon_1 + |\mathbf{p}_1|}{m}\right) \ln\left(\frac{-q^2}{\lambda^2}\right), \quad (41)$$

$$\delta_{xbox}^{MTj} = \frac{2Z\alpha}{\pi} \frac{\epsilon_3}{|\mathbf{p}_3|} \ln\left(\frac{\epsilon_3 + |\mathbf{p}_3|}{m}\right) \ln\left(\frac{-q^2}{\lambda^2}\right). \quad (42)$$

Способ получения этих выражений приведен в приложении А. Отметим только, что результаты (41) и (42) получены из (39) и (40) без использования предположения  $m \ll \epsilon_1, \epsilon_3$ .

Поскольку приближение Максимоном и Тьена устраняет рассмотренный выше недостаток стандартного мягкофотонного приближения, оно кажется более предпочтительным, чем приближение Мо и Тсяя. Однако

такое заключение преждевременно. Как было показано выше, при выводе (37) было сделано два приближения — стандартное мягкофотонное приближение и замена  $K(p_1, -p_2)$  на  $K(p_1, p_2)$ , каждое из которых имеет свои явные недостатки. Но оказывается, что частично эти недостатки компенсируют друг друга. В самом деле, замена  $K(p_1, -p_2)$  на  $K(p_1, p_2)$  приводит к отбрасыванию  $-\pi^2$  в членах  $\ln^2(-(p_1 + p_2)^2)$ , имеющих в  $K(p_1, -p_2)$  при больших энергиях. Но, как уже обсуждалось, в точном ответе нет дважды-логарифмических членов типа  $\ln^2(-(p_1 + p_2)^2)$ , а значит нет и содержащихся в них  $-\pi^2$ , так что отбрасывание последних частично устраняет недостаток стандартного мягкофотонного приближения. Конечно, только частично, поскольку остается главный член,  $\ln^2(p_1 + p_2)^2$ , которого заведомо не должно быть в реджевской области, так что в этой области приближение (37) для вклада box-диаграммы грубо неправильно. Но физический смысл имеет только сумма вкладов (37) и (38); по отдельности вклады диаграмм box и xbox вообще не калибровочно инвариантны. А в сумме члены с  $\ln^2(p_1 + p_2)^2$  от box-диаграммы и  $-\ln^2(-(p_1 - p_4)^2)$  от xbox-диаграммы сокращаются в реджевской области, где  $-(p_1 - p_4)^2 \simeq (p_1 + p_2)^2$ , так что в  $\delta_{2\gamma}^{MoT} = \delta_{box}^{MoT} + \delta_{xbbox}^{MoT}$  бросающиеся в глаза недостатки исчезают. Вопрос о том, насколько полно происходит сокращение, насколько близко приближение Мо и Тсяя к точному ответу, требует более детального анализа.

В похожем положении находится и приближение Максимова и Тье-на. Как было сказано, оно устраняет недостаток стандартного мягкофотонного приближения (появление членов типа  $\ln^2(-(p_1 + p_2)^2)$  или  $\ln^2(-(p_1 - p_4)^2)$ ), но в нем имеется другой явный недостаток: появление лишних дважды-логарифмических сингулярностей по электронной массе во вкладах отдельных диаграмм. В сумме  $\delta_{2\gamma} = \delta_{box} + \delta_{xbbox}$  они сокращаются, но опять вопрос об эффективности этого сокращения остается открытым. В следующем разделе вопрос о том, насколько хорошо описываются (x)box-амплитуды мягкофотонным приближением, исследуется для рассеяния электрона на точечном (бесструктурном) протоне, когда амплитуды двухфотонного обмена вычисляются точно.

### 3.4 Сравнение приближенных и точных амплитуд с двухфотонным обменом в рассеянии электрона на точечном протоне

Матричные элементы даются формулами (21), (22) с заменой  $\Gamma^\mu(\frac{q}{2} \pm k) \rightarrow \gamma^\mu$ . В приложении С приведены детали необходимых вычислений, здесь

же выпишем только результат в случае  $m \rightarrow 0$  (в следующих формулах не предполагается, что  $M^2$  мало по сравнению с инвариантами  $s = (p_1 + p_2)^2$ ,  $t = (p_1 - p_3)^2$ ,  $u = (p_1 - p_4)^2$ ):

$$M_{box} = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi)^2} \left\{ A_{vv}(s, t) (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + A_{aa}(s, t) (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5) - A_{vt}(s, t) \left( \gamma^\mu \otimes \frac{\sigma^{\mu\nu} q^\nu}{2M} \right) \right\}, \quad (43)$$

где принято обозначение  $a \otimes b = (\bar{u}_{p_3} a u_{p_1}) (\bar{U}_{p_4} b U_{p_2})$ . Инвариантные амплитуды  $A$  имеют следующий вид

$$A_{vv}(s, t) = 2(s - M^2) D(s, t) - 2C_2(t) - 2C_4(t) + (s + M^2) \frac{\partial J(s, t)}{\partial s} - J(s, t) - 2M^2 X_4(s, t) + 2M^2 \frac{\partial J(s, t)}{\partial M^2}, \quad (44)$$

$$A_{aa}(s, t) = -(s - M^2) \frac{\partial J(s, t)}{\partial s} + J(s, t), \quad (45)$$

$$A_{vt}(s, t) = -2M^2 \frac{\partial J(s, t)}{\partial M^2} - 2M^2 X_4(s, t), \quad (46)$$

где

$$X_4(s, t) = \frac{1}{2((s - M^2)^2 + s t)} \left[ t(C_2(t) - C_4(t)) + 2(s - M^2) C_2(t) + (s - M^2) (t D(s, t) - C_1(s) - C_3(s)) \right]. \quad (47)$$

Явные выражения для функций  $D$ ,  $C_i$ ,  $J$  приведены в приложении А.

Амплитуда  $M_{xbox}$  получается заменой  $s \leftrightarrow u$ :

$$M_{xbox} = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi)^2} \left\{ -A_{vv}(u, t) (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + A_{aa}(u, t) (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5) + A_{vt}(u, t) \left( \gamma^\mu \otimes \frac{\sigma^{\mu\nu} q^\nu}{2M} \right) \right\}. \quad (48)$$

Выпишем в явном виде инвариантные амплитуды в пределе, когда обе массы стремятся к нулю ( $m, M \rightarrow 0$ ):

$$A_{vv}^{(0)}(s, t) = 2s D^{(0)}(s, t) - 2C_2^{(0)}(t) - 2C_4^{(0)}(t) + s \frac{\partial J^{(0)}(s, t)}{\partial s} - J^{(0)}(s, t), \quad (49)$$

$$A_{aa}^{(0)}(s, t) = -s \frac{\partial J^{(0)}(s, t)}{\partial s} + J^{(0)}(s, t), \quad (50)$$

$$A_{vt}^{(0)}(s, t) = 0, \quad (51)$$

причем

$$D^{(0)}(s, t) = \frac{2}{st} \ln\left(\frac{-t}{\lambda^2}\right) \left(\ln\left(\frac{s}{mM}\right) - i\pi\right), \quad (52)$$

$$D^{(0)}(u, t) = \frac{2}{ut} \ln\left(\frac{-t}{\lambda^2}\right) \ln\left(\frac{-u}{mM}\right), \quad (53)$$

$$J^{(0)}(s, t) = \frac{1}{s+t} \left(-\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s}{-t}\right) + i\pi \ln\left(\frac{s}{-t}\right)\right), \quad (54)$$

$$J^{(0)}(u, t) = \frac{1}{u+t} \left(-\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{u}{t}\right) - \frac{\pi^2}{2}\right). \quad (55)$$

$$C_2^{(0)}(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{-t}{M^2}\right) + \frac{2\pi^2}{3}\right), \quad (56)$$

$$C_4^{(0)}(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{-t}{m^2}\right) + \frac{2\pi^2}{3}\right). \quad (57)$$

Функции  $C_2^{(0)}(t)$  и  $C_4^{(0)}(t)$  сокращаются в сумме вкладов box и xbox диаграмм.

Для суммы амплитуд получаем:

$$\begin{aligned} M_{box}^{(0)} + M_{xbox}^{(0)} = & \frac{Z^2 e^4}{2(4\pi)^2 t} \times \left\{ \gamma^\mu \otimes \gamma^\mu \left(-8 \ln\left(\frac{-t}{\lambda^2}\right) \left(\ln\left(-\frac{u}{s}\right) + i\pi\right)\right) + \right. \\ & + \gamma^\mu \otimes \gamma^\mu \left(\frac{s-u}{t} \left(\frac{\ln^2\left(\frac{u}{t}\right) + \pi^2}{\left(-\frac{s}{t}\right)^2} + \frac{\ln^2\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)^2}\right) + 2 \left(\frac{\ln\left(\frac{u}{t}\right)}{\left(-\frac{s}{t}\right)} + \frac{\ln\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)}\right) - \right. \\ & - 2\pi i \left(\frac{s-u}{t} \left(\frac{\ln\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)^2} + \frac{t}{u}\right)\right) + \\ & + \gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5 \left(\frac{s-u}{t} \left(\frac{\ln^2\left(\frac{u}{t}\right) + \pi^2}{\left(-\frac{s}{t}\right)^2} - \frac{\ln^2\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)^2}\right) + \right. \\ & \left. \left. + 2 \left(\frac{\ln\left(\frac{u}{t}\right)}{\left(-\frac{s}{t}\right)} - \frac{\ln\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)}\right) + 2\pi i \left(\frac{s-u}{t} \left(\frac{\ln\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)^2} + \frac{t}{u}\right)\right) \right\}. \quad (58) \end{aligned}$$

В работе [32] амплитуды двухфотонного обмена при  $M = m = 0$  представлены в форме, содержащей  $\hat{P} \otimes \hat{K}$ . Поскольку уже при  $m = 0$  справедливо соотношение

$$\hat{P} \otimes \hat{K} = (s - u) (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + t (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5), \quad (59)$$

можно привести (58) к виду

$$\begin{aligned} M_{box}^{(0)} + M_{box}^{(0)} &= \frac{Z^2 e^2}{-t} \frac{e^2}{4\pi^2} \times \left\{ \gamma^\mu \otimes \gamma^\mu \left[ \ln \left( -\frac{s}{u} \right) \ln \left( \frac{\lambda^2}{\sqrt{-s}u} \right) + \frac{\pi^2}{2} \right] + \right. \\ &+ \gamma^\mu \otimes \gamma^\mu \left[ \frac{1}{2} \ln \left( -\frac{s}{u} \right) + \frac{t}{4} \left( \frac{\ln^2 \left( \frac{u}{t} \right)}{s} - \frac{\ln^2 \left( -\frac{s}{t} \right)}{u} + \frac{\pi^2}{s} \right) - \right. \\ &- i \pi \left( \ln \left( \frac{\lambda^2}{s} \right) - \frac{t}{2u} \ln \left( -\frac{s}{t} \right) + \frac{1}{2} \right) \left. \right] + \\ &+ \frac{\hat{P} \otimes \hat{K}}{4} \left[ \frac{1}{s u} \left( s \ln \left( -\frac{s}{t} \right) + u \ln \left( \frac{u}{t} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{s - u}{2} \left( \frac{s}{u} \ln^2 \left( -\frac{s}{t} \right) - \frac{u}{s} \ln^2 \left( \frac{u}{t} \right) - \frac{u}{s} \pi^2 \right) \right) - \right. \\ &\left. \left. - i \pi \frac{1}{u} \left( \frac{s - u}{u} \ln \left( -\frac{s}{t} \right) + 1 \right) \right] \right\}, \quad (60) \end{aligned}$$

который полностью совпадает с выражением из статьи [32].

Для вклада (x)box-диаграмм в виртуальные поправки при  $m \rightarrow 0$  получаем из (43), (48):

$$\begin{aligned} \delta_{box} &= -\frac{Z\alpha}{2\pi} \text{Re} \left[ t A_{vv}(s, t) - \frac{2t^2(s-u)}{t(t+4M^2) + (s-u)^2} A_{aa}(s, t) + \right. \\ &\left. + \frac{2t^3}{t(t+4M^2) + (s-u)^2} A_{vt}(s, t) \right], \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{xbox} &= -\frac{Z\alpha}{2\pi} \text{Re} \left[ -t A_{vv}(u, t) - \frac{2t^2(s-u)}{t(t+4M^2) + (s-u)^2} A_{aa}(u, t) - \right. \\ &\left. - \frac{2t^3}{t(t+4M^2) + (s-u)^2} A_{vt}(u, t) \right]. \quad (62) \end{aligned}$$

В высокоэнергетическом пределе ( $m, M \rightarrow 0$ ) для полного вклада в вир-

туальные поправки от двухфотонных диаграмм имеем

$$\begin{aligned} \delta_{2\gamma} = \delta_{box} + \delta_{xbox} = & \frac{Z\alpha}{\pi} \left[ -2 \ln \left( -\frac{s}{u} \right) \ln \left( -\frac{t}{\lambda^2} \right) - \right. \\ & - \frac{t(s-u)}{2(s^2+u^2)} \left( \ln^2 \left( -\frac{s}{t} \right) + \ln^2 \left( \frac{u}{t} \right) + \pi^2 \right) - \\ & \left. - \frac{t^2}{s^2+u^2} \left( \frac{u}{t} \ln \left( -\frac{s}{t} \right) - \frac{s}{t} \ln \left( \frac{u}{t} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

В этом выражении первое слагаемое в квадратных скобках соответствует приближению Максимова-Тьена.

Рассмотрим вклад каждой из диаграмм в виртуальные поправки в пределе высоких энергий и сравним эти результаты с тем, что дают различные приближения. Сопоставляя формулы (44) и (39), мы видим, что приближение Максимова и Тьена соответствует тому, что в инвариантных амплитудах  $A_{vv}$  для (x)box-диаграмм удержан только самый первый член, а все остальные слагаемые в  $A_{vv}$  и вклады  $A_{aa}$ ,  $A_{vt}$  отброшены. Для разницы между точным ответом для рассеяния электрона на точечном протоне и приближениями Максимова-Тьена и Мо-Тсяя получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \delta_{box} - \delta_{box}^{MTj} = & \frac{Z\alpha}{\pi} \left[ -\frac{t(s-u)}{2(s^2+u^2)} \ln^2 \left( -\frac{s}{t} \right) - \frac{tu}{s^2+u^2} \ln \left( -\frac{s}{t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{-t}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{-t}{M^2} \right) + \frac{4\pi^2}{3} \right], \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \delta_{xbox} - \delta_{xbox}^{MTj} = & \frac{Z\alpha}{\pi} \left[ -\frac{t(s-u)}{2(s^2+u^2)} \left( \ln^2 \left( \frac{u}{t} \right) + \pi^2 \right) + \frac{ts}{s^2+u^2} \ln \left( \frac{u}{t} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{-t}{m^2} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{-t}{M^2} \right) - \frac{4\pi^2}{3} \right], \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \delta_{box} - \delta_{box}^{MoT} = & \frac{Z\alpha}{\pi} \left[ -\frac{t(s-u)}{2(s^2+u^2)} \ln^2 \left( -\frac{s}{t} \right) - \frac{tu}{s^2+u^2} \ln \left( -\frac{s}{t} \right) + \right. \\ & \left. + \ln^2 \left( -\frac{s}{t} \right) + \pi^2 \right], \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \delta_{xbox} - \delta_{xbox}^{MoT} = & \frac{Z\alpha}{2\pi} \left[ -\frac{t(s-u)}{2(s^2+u^2)} \left( \ln^2 \left( \frac{u}{t} \right) + \pi^2 \right) + \frac{ts}{s^2+u^2} \ln \left( \frac{u}{t} \right) - \right. \\ & \left. - \ln^2 \left( \frac{u}{t} \right) - \pi^2 \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Мы видим, что в разнице с приближением Максимова и Тьена возникают квадраты больших логарифмов  $\ln^2(-t/m^2)$  и  $\ln^2(-t/M^2)$ . Этот результат следует пояснить. Рассмотрим интеграл  $D(s, t)$ , через который выражается приближение Максимова-Тьена:

$$D(s, t) = \frac{(4\pi)^2}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4}. \quad (68)$$

Заметим, что этот интеграл соответствует бокс-диаграмме без числителей. Рассмотрим его при  $s, |t| \gg m^2, M^2$ . Стандартное мягкофотонное приближение позволяет найти вклад в интеграл от кинематических областей, в которых один из фотонов мягкий, а импульс второго близок к  $q$ . В этом приближении бокс-диаграмма заменяется на сумму двух треугольных  $s$ -канальных диаграмм с множителем  $1/t$ . Подчеркнем, что область мягких фотонов дает большой вклад не только потому, что он содержит инфракрасно расходящийся логарифм  $\ln \lambda^2$ . Этот вклад велик и тогда, когда все массы одного порядка,  $\sim \mu$ , благодаря так называемым судаковским дважды-логарифмам  $\ln^2(s/\mu^2)$ .

Поскольку интеграл (68) не содержит числителей фермионных пропагаторов, аналогичным образом мы можем вычислить “мягкофермионный” вклад, то есть вклад от области малых импульсов фермионов. Этот вклад дается суммой двух треугольных  $t$ -канальных диаграмм с множителем  $1/s$ . И он тоже содержит судаковские дважды-логарифмы, теперь  $\ln^2(-t/m^2)$  и  $\ln^2(-t/M^2)$ . Но правильный ответ не должен их содержать, потому что область мягких фермионов подавлена числителями фермионных пропагаторов, имеющимися в точном матричном элементе. Вот эти-то “лишние” дважды-логарифмы и проявляются в разностях (64) и (65). С другой стороны, отсутствие вклада от мягких фермионов при использовании точного матричного элемента означает, что вклад от области мягких фотонов должен давать хорошее приближение к точному ответу в этом случае, если эта область правильно выделена.

Посмотрим, насколько хорошо работает описанная выше процедура выделения кинематических областей “мягких” частиц для  $D(s, t)$  (68). Пользуясь ею, получаем следующее приближение:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[ D^{(0)}(s, t) \right] &\approx \text{Re} \left[ \frac{1}{t} \left( C_1^{(0)}(s) + C_3^{(0)}(s) \right) + \frac{1}{s} \left( C_2^{(0)}(t) + C_4^{(0)}(t) \right) \right] = \\ &= \frac{2}{ts} \left( \ln \frac{Mm}{\lambda^2} \ln \frac{s}{Mm} + \frac{1}{2} \ln \frac{s}{M^2} \ln \frac{s}{m^2} \right) + \frac{1}{ts} \left( \frac{1}{2} \ln^2 \frac{(-t)}{M^2} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{(-t)}{m^2} \right) = \\ &= \frac{1}{ts} \left( 2 \ln \frac{(-t)}{\lambda^2} \ln \frac{s}{Mm} + \ln^2 \frac{s}{(-t)} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

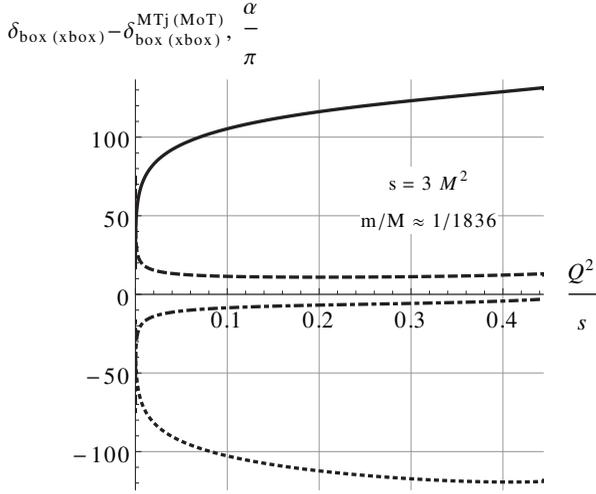


Рис. 5. Разница между точными значениями вкладов диаграмм двух-фотонного обмена  $\delta_{\text{box}}$  и  $\delta_{\text{xbox}}$  в виртуальные радиационные поправки к сечению упругого рассеяния электрона на точечном протоне и приближения Максимона-Тъена (сплошная — отличие во вкладе box-диаграммы, штриховая линия — во вкладе xbox-диаграммы) и Мо-Тсяя (пунктирная линия — для box-диаграммы, штрих-пунктирная — для xbox-диаграммы).

Сравнивая с точным ответом для  $D^{(0)}(s, t)$ , мы видим, что это приближение неплохо работает при  $s \sim |t|$ , но неприменимо в реджевской области  $s \gg |t|$  (и в не достижимой при  $ep$ -рассеянии области  $|t| \gg |s|$ ). Ясно, почему в этих областях процедура перестает работать. В box-диаграмме есть  $s$ -канальные и  $t$ -канальные ограничения на область применимости мягкочастичного приближения. Заменяя box-диаграмму на сумму треугольных, мы отбрасываем одно из них. Это можно делать, когда оба инварианта одного порядка, но заведомо неправильно, когда один из них много больше другого и мы оставляем только наиболее слабое ограничение.

Таким образом, мы приходим к заключению, что применимость приближения Мо Тсяя к вычислению  $\delta_{\text{box}}$  и  $\delta_{\text{xbox}}$  нарушается только в реджевской области. Что же касается приближения Максимона и Тъена, то его применимость к вычислению  $\delta_{\text{box}}$  и  $\delta_{\text{xbox}}$  нарушается уже при  $|t| \gg m^2$ , то есть оно неприменимо во всей представляющий интерес области. Эти заключения подтверждаются графиками на рис. 5.

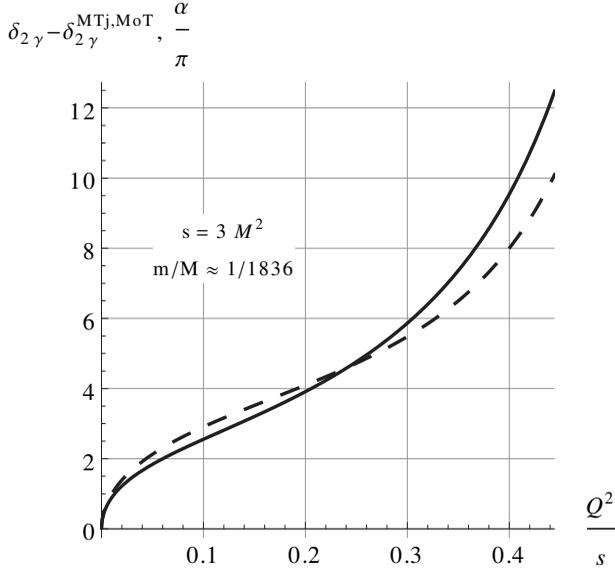


Рис. 6. Отличие между точным значением вклада диаграмм двухфотонного обмена  $\delta_{2\gamma}$  в виртуальные радиационные поправки к сечению рассеяния электрона на точечном протоне и приближениями Максимова-Тьяна (сплошная линия) и Мо-Тсяя (пунктирная линия). Разница отложена в единицах  $\alpha/\pi$  в зависимости от отношения  $Q^2/s$ .

Но физический интерес представляет только сумма  $\delta_{2\gamma} = \delta_{box} + \delta_{xbox}$ . Нетрудно понять, что в этой сумме члены, явно нарушающие применимость приближений, сокращаются, как в приближении Мо и Тсяя, так и в приближении Максимова и Тьяна (см. рис. 6). В самом деле, поскольку члены, нарушающие применимость последнего приближения для  $\delta_{box}^{MTj}$ , связаны с вкладом мягких фермионов в  $D^{(0)}(s, t)$ , имеющим в области  $s, |t| \gg m^2, M^2$  вид  $s^{-1}f(t)$ , где  $f(t)$  отвечает  $t$ -канальным треугольным диаграммам, то, с учетом множителя  $2(p_1 p_2)t$  в (39), в  $\delta_{box}^{MTj}$  с точностью до численного коэффициента они имеют вид  $2(p_1 p_2)ts^{-1}f(t) \simeq tf(t)$ ; а в  $\delta_{xbox}$ , с учетом множителя  $2(p_1 p_4)t$  в (40), с точностью до того же численного коэффициента они имеют вид  $2(p_1 p_4)tu^{-1}f(t) \simeq -tf(t)$ ; так что в сумме они сокращают друг друга.

Что касается приближения Мо и Тсяя, то из формул (32) и (33) видно, что  $\delta_{box}^{MoT}$  зависит только от  $(p_1 p_2)$ , а  $\delta_{xbox}^{MoT}$  получаются из нее заменой  $p_2 \leftrightarrow p_4$  и изменением знака. Поскольку в реджевском пределе

$(p_1 p_2) = (p_1 p_4)$ , очевидно, что в этом пределе  $\delta_{2\gamma}^{MoT} = \delta_{box}^{MoT} + \delta_{xbox}^{MoT}$  обращается в нуль, как должно и быть, так как амплитуда двухфотонного обмена в этом пределе чисто мнима. Еще раз отметим, что это сокращение происходит после замены в стандартном мягкофотонном приближении  $K(p_1, -p_2) \rightarrow K(p_1, p_2)$ , которая означает отбрасывание слагаемого вида  $\pi^2/2$ .

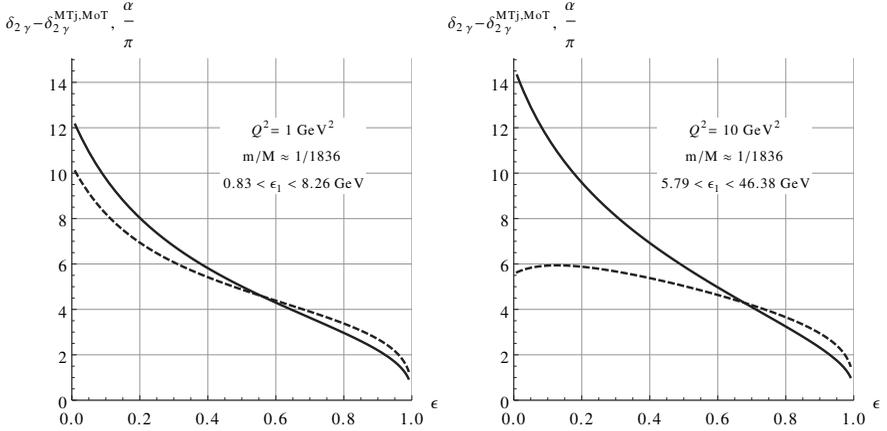


Рис. 7. Отличие между точным значениям вклада диаграмм двухфотонного обмена в виртуальные радиационные поправки к сечению рассеяния электрона на точечном протоне и приближениями Максимова-Тьяна (сплошная линия) и Мо-Тсяя (пунктирная линия). Разница отложена в единицах  $\alpha/\pi$  при  $Q^2 = 1, 10 \text{ GeV}^2$  в зависимости от параметра  $\epsilon$ .

На графиках (рис. 7) мы представили разницу между точным значением вклада амплитуд двухфотонного обмена в виртуальные поправки к сечению рассеяния электрона на точечном протоне с тем, что дают приближения Максимова-Тьяна и Мо-Тсяя при значениях кинематических инвариантов порядка массе протона  $M$  для различных значениях  $Q^2$  в зависимости от параметра  $\epsilon$ .

## 4 Реальные радиационные поправки

Реальная радиационная поправка  $\delta_{real}$  равна отношению дифференциального по углам вылета электрона сечения тормозного излучения, проинтегрированного по импульсам фотона с учетом ограничений, накла-

дываемых в эксперименте для отбора “упругих” событий, к борновскому сечению (6). Диаграммы тормозного излучения электроном и протоном представлены на (рис. 8) и (рис. 9) соответственно.

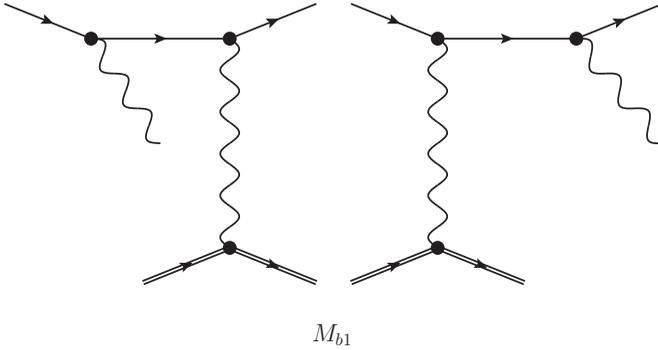


Рис. 8. Диаграммы излучения фотона электроном.

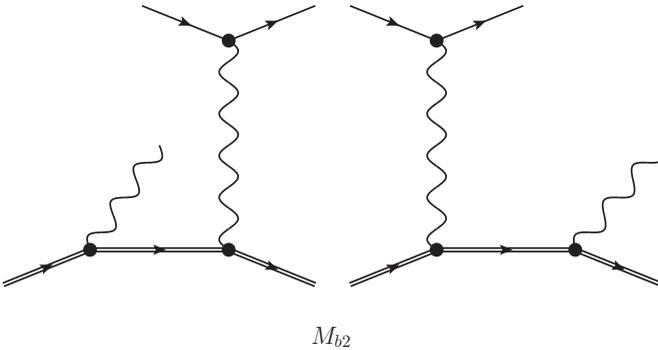


Рис. 9. Диаграммы излучения фотона протоном.

И в работе Максимова-Тьена, и в работе Мо-Тсяя расчет реальных радиационных поправок основан на мягкофотонном приближении. В этом приближении амплитуда излучения

$$M_{b1} + M_{b2} = e \left( -\frac{p_1}{(kp_1)} + \frac{p_3}{(kp_3)} + Z \frac{p_2}{(kp_2)} - Z \frac{p_4}{(kp_4)} \right)^\mu e_\mu(k) M_1, \quad (70)$$

где  $k = (\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}, \mathbf{k})$  и  $e(k)$  – 4-векторы импульса и поляризации фотона.

При достаточно малом  $\Delta E$  можно учитывать его только в ограничении на доступную кинематическую область импульсов фотона и пренебречь влиянием излучения на входящие в (70) импульсы заряженных частиц. Тогда

$$\frac{d\sigma_b}{d\Omega} = \frac{d\sigma_B}{d\Omega} \left( -\frac{\alpha}{4\pi^2} \right) \times \\ \times \int \frac{d^3k}{\omega} \left( -\frac{p_1}{(kp_1)} + \frac{p_3}{(kp_3)} + Z \frac{p_2}{(kp_2)} - Z \frac{p_4}{(kp_4)} \right)^2 \theta(\epsilon_3 + \Delta E - \epsilon_1/\eta), \quad (71)$$

где  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$  – энергии начального и конечного электронов в системе покоя начального протона  $\mathbf{p}_2 = 0$ , причем энергия  $\epsilon_3$  должна быть выражена с помощью законов сохранения через  $\epsilon_1$ , угол рассеяния электрона  $\theta$  в системе  $\mathbf{p}_2 = 0$  и углы вылета и энергию фотона. Связь между этими величинами дается соотношением

$$(p_1 + p_2 - p_3 - k)^2 = p_4^2 = M^2. \quad (72)$$

Благодаря инвариантности меры интегрирования и подынтегрального выражения интегрирование можно проводить в любой системе отсчета. Как было замечено Тсаем [9] и использовалось в вычислениях Максимова и Тьена [24], удобно это сделать в системе  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 = 0$ . Обозначив в этой системе  $p_1^0 + p_2^0 - p_3^0 = W$ , имеем при  $m^2 \ll \epsilon_1, \epsilon_3$ :

$$W^2 = M^2 + 2M(\epsilon_1 - \eta\epsilon_3), \quad (73)$$

а соотношение (72) дает

$$W^2 - M^2 - \lambda^2 - 2W\omega' = 0, \quad (74)$$

где штрих означает величину в системе  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 = 0$ . Преимущество этой системы в том, что  $\epsilon_3$  в ней не зависит от направления вылета фотона. При  $\Delta E \ll M$  из соотношения (73) и (74) получаем

$$\omega' \approx \eta(\epsilon_{3,el} - \epsilon_3) \leq \eta\Delta E. \quad (75)$$

Последнее неравенство следует из ограничения на  $\epsilon_3$ . В итоге получаем

$$\frac{d\sigma_b}{d\Omega} = \frac{d\sigma_B}{d\Omega} \left( -\frac{\alpha}{4\pi^2} \right) \int_{\lambda}^{\eta\Delta E} d\omega' |\mathbf{k}'| \times \\ \times \int d\Omega'_\gamma \left( -\frac{p_1}{(kp_1)} + \frac{p_3}{(kp_3)} + Z \frac{p_2}{(kp_2)} - Z \frac{p_4}{(kp_4)} \right)^2. \quad (76)$$

Это выражение совпадает с приведенным в статье Максимона и Тьена [24], т.е.

$$\frac{d\sigma_b^{MTj}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_b}{d\Omega}. \quad (77)$$

Мо и Тсай использовали в качестве переменной интегрирования величину  $W^2$  (73), связанную с  $\omega'$  соотношением (74). Переходя от интегрирования по  $W^2$  к интегрированию по  $\omega'$ , при  $\Delta E \ll M$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_b^{MoT}}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_B}{d\Omega} \left( -\frac{\alpha}{4\pi^2} \right) \int_{\lambda}^{\eta \Delta E} \omega' d\omega' \times \\ &\times \int d\Omega'_\gamma \left( -\frac{p_1}{(kp_1)} + \frac{p_3}{(kp_3)} + Z \frac{p_2}{(kp_2)} - Z \frac{p_4}{(kp_4)} \right)^2. \end{aligned} \quad (78)$$

Таким образом, мы видим, что обе группы авторов исходили из одних и тех же предположений, но по ходу вычислений Тсаем была сделана замена  $|\mathbf{k}'| \rightarrow \omega'$ . В приложении D выписаны некоторые детали вычисления интегралов (76) и (78) Здесь же мы только приводим сравнение результатов.

Очевидно, замена  $|\mathbf{k}'| \rightarrow \omega'$  не влияет на инфракрасно расходящиеся члены, так что разница  $\delta_{real} - \delta_{real}^{MoT}$  конечна. Ее можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \delta_{real} - \delta_{real}^{MoT} &= \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left[ Li_2 \left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) - \frac{\pi^2}{6} \right] - \right. \\ &- 2Z \left[ \ln \eta \ln x - Li_2 \left( 1 - \frac{\eta}{x} \right) + Li_2 \left( 1 - \frac{1}{\eta x} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} Li_2 \left( 1 - \eta \frac{2\epsilon_4}{M} \right) - \frac{1}{2} Li_2 \left( 1 - \frac{2\epsilon_4}{\eta M} \right) \left. \right] + \\ &+ Z^2 \left[ \frac{\epsilon_4}{|\mathbf{p}_4|} \left( \ln x - Li_2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) + Li_2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) + \frac{\pi^2}{12} \right) - \right. \\ &\left. \left. - \ln \left( \frac{4\epsilon_4}{M} + 1 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (79)$$

где  $x = (\epsilon_4 + |\mathbf{p}_4|)/M$ , а энергия протона  $\epsilon_4$  соответствует упругому процессу:  $\epsilon_4 = M - q^2/(2M)$ , то есть  $\epsilon_4$  и  $x$  зависят только от передачи  $q^2$ .

Таким образом, в результате сделанной замены  $|\mathbf{k}'| \rightarrow \omega'$  в работе Мо и Тсая оказались опущены члены, стоящие в правой части (79). Слагаемые, не содержащие  $Z$ , были добавлены впоследствии Тсаем (правда, с опечаткой в общем знаке) в препринте [34], и включались (с правильным

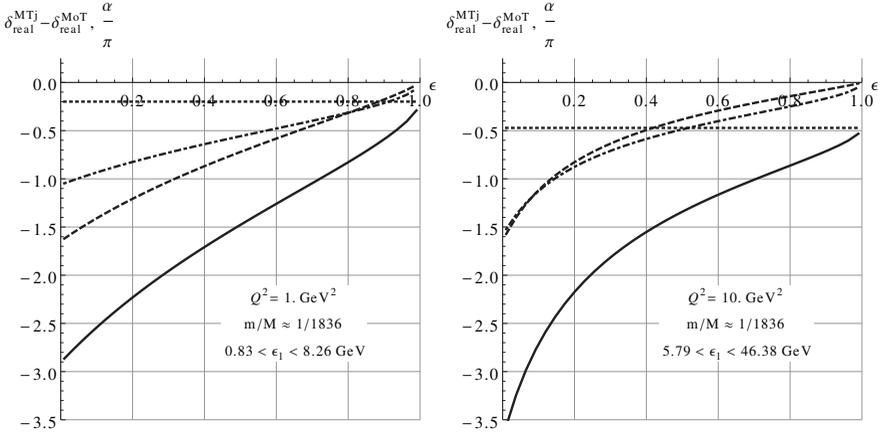


Рис. 10. Отличие между результатами Максимова-Тьена и Мо-Тсяя для реальных радиационных поправок в упругом  $e^-p$  – рассеянии при  $Q^2 = 1, 10 \text{ GeV}^2$ . Пунктирная линия на графике – вклад членов, не содержащих  $Z$  (излучение фотона электроном); штрих-пунктирная – пропорциональных  $Z$  (интерференция), штриховая – пропорциональных  $Z^2$  (излучение фотона протоном), сплошная – общая разница между результатами двух групп авторов. Отличие  $\delta_{real}^{MTj} - \delta_{real}^{MoT}$  отложено в единицах  $\alpha/\pi$  в зависимости от параметра  $\epsilon$ .

знаком) при анализе некоторых экспериментов (например, при обработке эксперимента в SLAC [21]). Эта добавка (называемая в [34] поправкой Швингера  $\delta_{Sch}$ ) необходима для правильного перехода в пределе  $M \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 1$ ,  $x \rightarrow 1$  к рассеянию на кулоновском центре, рассмотренному ранее Швингером [35]. Тсай в работе [34] правильно замечает, что эти слагаемые возникли из инфракрасноконечной части сечения излучения мягких фотонов. Однако автор не приводит соответствующих расчетов, а отличия в интерференционных членах и в слагаемых, связанных с излучением с протонной линии, в препринте [34] не обсуждаются. В работе Максимова и Тьена [24] поправка Швингера возникает в ответе автоматически, и правильная асимптотика считается одним из достоинств их конечного результата. Авторы справедливо связывают факт расхождения своих результатов с результатами Мо и Тсяя с некоторыми математическими допущениями Тсяя, но не конкретизируют их. Мы надеемся, что наше рассмотрение заполнило этот пробел.

На следующих графиках (рис. 10) мы приводим разницу между результатами Максимова-Тьена и Мо-Тсяя для реальных радиационных

поправок, а также вклады в нее от излучения с электронной линии (не содержащие  $Z$ ), излучения с протонной линии ( $\propto Z^2$ ) и интерференции ( $\propto Z$ ). Важной особенностью является то, что вклад излучения с протонной линии зависит только от передачи  $q^2$ , в то время как, излучение с электронной линии и интерференция зависят и от  $q^2$  и  $\epsilon$ , поэтому ошибка в этих членах может оказать влияние на отношение формфакторов, извлекаемое методом розенблютовского разделения.

## 5 Заключение

Учет радиационных поправок к сечению электрон-протонного рассеяния необходим для определения формфакторов протона. Точность этого учета особенно важна при обработке данных экспериментов по измерению формфакторов при больших передачах импульса  $Q$  методом розенблютовского разделения. Ошибка в поправке должна быть меньше падающего с ростом  $Q$  вклада в сечение электрического формфактора  $G_E$ .

Наибольшее применение для учета радиационных поправок при обработке экспериментальных данных получила работа Мо и Тсяя [10]. Более современный расчет, проделанный Максимоном и Тъеном [24], считается [23] значительным улучшением результатов работы [10]. В данной работе мы провели анализ имеющихся в результатах работ [10] и [24] расхождений и использованных в них приближений.

Наиболее существенные расхождения имеются в вычислении виртуальной поправки к протонной вершине, вкладов диаграмм двухфотонного обмена и тормозного излучения.

На наш взгляд, использование для определения поправки к вершине только стандартного мягкофотонного приближения, как это было сделано в [10], является более конструктивным, чем дополнение его модельным учетом структуры протона, проделанное в [24]. Дело здесь в том, что все поправки, кроме инфракрасно расходящейся, учитываемой мягкофотонным приближением, естественно включить в определение формфакторов. При таком определении отпадает необходимость учета как структуры протона, так и многоадронных вкладов, который модельно зависим и имеет плохо контролируруемую точность.

Для вычисления вкладов диаграмм двухфотонного обмена обе группы авторов использовали мягкофотонное приближение в разных его вариантах. Мы дали простой качественный анализ применимости этих приближений, основанный на физических соображениях. Качественно, для вычисления суммарной поправки от двух диаграмм двухфотонного об-

мена ни один из двух вариантов не выглядит явно предпочтительным. Оба они ухватывают главную часть поправки. Достоинством варианта, использованного в [24], является простота конечного выражения для поправки. В то же время для вкладов отдельных диаграмм оба варианта дают завышенные (по модулю) значения; при этом вариант [10] – только в реджевской области, а вариант [24] – практически во всей кинематической области, и завышение громадно. Качественный анализ подтвержден количественным сравнением результатов [10] и [24] с точным расчетом, проведенным для случая бесструктурных частиц. Сравнение показывает, что в полной поправке за счет двухфотонного обмена качественных отличий в разнице между точным и приближенным результатами [10] и [24] нет, но количественно приближение [10] ближе к точному.

Выяснена причина расхождения результатов [24] и [10] для поправки за счет излучения реального фотона. Расхождения не должно было бы быть, так как используемые в [24] и [10] исходные приближения совпадают. Указано место в вычислениях [10], в котором сделана неправильная замена.

Проблема правильного учета радиационных поправок обострилась в связи с расхождением при больших передачах импульса результатов для отношения электрического и магнитного формфакторов  $G_E/G_M$ , полученных методом розенблютовского разделения и поляризационным методом. Поскольку речь идет о сравнительно небольших ( $Q < 3\text{GeV}$ ) передачах, трудно ожидать здесь какой-то “новой физики”, и противоречие должно исчезнуть при правильном учете поправок. На наш взгляд, лучшим выходом была бы переобработка экспериментальных данных с учетом всех продвижений в вычислении радиационных поправок, сделанных в последние годы.

## А Петлевые интегралы

Для вычисления интегралов с четырьмя знаменателями  $d_i$  ((23)–(27)) используется фейнмановская параметризация

$$\frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4} = \int dx_1 \dots dx_4 \delta\left(\sum x_i - 1\right) \Gamma(4) \frac{1}{(k_{box}^2 - \Delta_{box} + i0)^4}, \quad (80)$$

где

$$k_{box} = k - (x_1 - x_3) \frac{q}{2} + x_2 \frac{K}{2} - x_4 \frac{P}{2}, \quad (81)$$

$$\Delta_{box} = (-t) x_1 x_3 + \lambda^2 (x_1 + x_3) + (-s) x_2 x_4 + M^2 x_4 (x_2 + x_4) + m^2 x_2 (x_2 + x_4). \quad (82)$$

Интегрирование по  $d^4 k$  дает

$$D(s, t) \equiv \frac{(4\pi)^2}{i} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4} = \int dx_1 \dots dx_4 \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{1}{(\Delta_{box} - i0)^2}. \quad (83)$$

Вводя новые переменные  $x_1 = \sigma\alpha$ ,  $x_3 = \sigma(1 - \alpha)$ ,  $x_2 = (1 - \sigma)\beta$ ,  $x_4 = (1 - \sigma)(1 - \beta)$ , получаем

$$D(s, t) = \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\sigma$$

$$\frac{\sigma(1 - \sigma)}{(\sigma^2(-t)\alpha(1 - \alpha) + \lambda^2 \sigma + (1 - \sigma)^2((-s)\beta(1 - \beta) + M^2(1 - \beta) + m^2\beta)) - i0)^2}. \quad (84)$$

Замечая, что  $\lambda^2$  необходимо удерживать в знаменателе только при  $\sigma \rightarrow 1$  можно заменить  $\lambda^2 \sigma \rightarrow \lambda^2 \sigma^2$  и затем взять интеграл по  $\sigma$ :

$$D(s, t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{(-t)\alpha(1 - \alpha) + \lambda^2} \int_0^1 \frac{d\beta}{(-s)\beta(1 - \beta) + M^2(1 - \beta) + m^2\beta - i0}. \quad (85)$$

Вычисление оставшихся интегралов не представляет большого труда и дает

$$D(s, t) = \frac{2}{t\sqrt{(M^2 + m^2 - s)^2 - 4m^2M^2}} \ln\left(\frac{-t}{\lambda^2}\right) \times \ln\left(\frac{M^2 + m^2 - s + \sqrt{(M^2 + m^2 - s)^2 - 4m^2M^2}}{2Mm}\right). \quad (86)$$

Формулы (41) и (42) получаются из (39) и (40) с помощью этого результата. Для получения (42) надо сделать замену  $p_2 \leftrightarrow p_4$ , то есть  $s \leftrightarrow u$ , а для получения (41) надо учесть, что в физической области  $s$ -канала нужно брать (86) на верхнем берегу разреза по  $s$  и удерживать только реальную часть.

При  $|s - M^2| \gg m^2$  результат существенно упрощается:

$$D(s, t) = \frac{2}{t(s - M^2)} \ln \left( \frac{-t}{\lambda^2} \right) \ln \left( \frac{-s + M^2}{M m} \right). \quad (87)$$

Нам необходимы также некоторые интегралы, содержащие три  $d_i$  в знаменателе. Рассмотрим интеграл, содержащий в знаменателе произведение  $d_1 d_2 d_3$ . После фейнмановской параметризации

$$\frac{1}{d_1 d_2 d_3} = \int dx_1 \dots dx_3 \delta \left( \sum x_i - 1 \right) \Gamma(3) \frac{1}{(k_{123}^2 - \Delta_{123})^3}, \quad (88)$$

где

$$k_{123} = k - (x_1 - x_3) \frac{q}{2} + x_2 \frac{K}{2}, \quad (89)$$

$$\Delta_{123} = (-t) x_1 x_3 + \lambda^2 (x_1 + x_3) + m^2 x_2^2, \quad (90)$$

Интегрирование по  $d^4 k$  дает

$$C_4(t) \equiv \frac{(4\pi)^2}{i} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_2 d_3} = - \int dx_1 dx_2 dx_3 \delta \left( \sum x_i - 1 \right) \frac{1}{\Delta_{123}}. \quad (91)$$

Интеграл не содержит расходимости при  $\lambda \rightarrow 0$ , поэтому массу фотона можно сразу положить равной нулю. Переходя к переменным  $\sigma = x_1 + x_3$  и  $\alpha = x_1/\sigma$ ,

$$C_4(t) = - \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\alpha \frac{\sigma}{\sigma^2 (-t) \alpha(1 - \alpha) + m^2 (1 - \sigma)^2}, \quad (92)$$

и интегрируя по  $\sigma$ , получаем

$$C_4(t) = - \frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \left( \frac{\pi m}{\sqrt{(-t)\alpha(1 - \alpha)} ((-t)\alpha(1 - \alpha) + m^2)} + \frac{\ln \left( \frac{(-t)\alpha(1 - \alpha)}{m^2} \right)}{(-t)\alpha(1 - \alpha) + m^2} \right). \quad (93)$$

Интегрирование по  $\alpha$  дает

$$C_4(t) = -\frac{1}{\sqrt{t(t-4m^2)}} \left[ \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{\sqrt{1-\frac{4m^2}{t}}-1}{\sqrt{1-\frac{4m^2}{t}}+1} \right) + 2 \operatorname{Li}_2 \left( \frac{\sqrt{1-\frac{4m^2}{t}}-1}{\sqrt{1-\frac{4m^2}{t}}+1} \right) + \frac{2\pi^2}{3} \right]. \quad (94)$$

Здесь мы воспользовались следующими интегралами:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)+x} = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \ln \left( \frac{\sqrt{1+4x}+1}{\sqrt{1+4x}-1} \right), \quad (95)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \frac{\ln(\alpha(1-\alpha))}{\alpha(1-\alpha)+x} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \left( \operatorname{Li}_2 \left( -\frac{\sqrt{1+4x}+1}{2x} \right) - \operatorname{Li}_2 \left( \frac{\sqrt{1+4x}-1}{2x} \right) \right), \quad (96) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)} (\alpha(1-\alpha)+x)} = \frac{\pi}{\sqrt{1+4x}\sqrt{x}}. \quad (97)$$

В пределе  $m^2 \rightarrow 0$  имеем

$$C_4^{(0)}(t) = \frac{1}{t} \left( \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{-t}{m^2} \right) + \frac{2\pi^2}{3} \right). \quad (98)$$

Интеграл

$$C_2(t) \equiv \frac{(4\pi)^2}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_3 d_4} \quad (99)$$

получается из (94) заменой  $m \rightarrow M$ .

Для интеграла с  $d_1 d_2 d_4$  в знаменателе,

$$C_3(s) \equiv \frac{(4\pi)^2}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_2 d_4} = - \int dx_1 dx_2 dx_4 \delta \left( \sum x_i - 1 \right) \frac{1}{\Delta_{124}}, \quad (100)$$

где

$$\Delta_{124} = (-s) x_2 x_4 + m^2 x_2 (x_2 + x_4) + M^2 x_4 (x_2 + x_4) + \lambda^2 (1 - (x_2 + x_4)), \quad (101)$$

вводя переменные  $x_2 = \sigma\alpha$ ,  $x_4 = \sigma(1 - \alpha)$ , получим

$$C_3(s) = - \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\sigma \frac{\sigma}{\sigma^2 ((-s)\alpha(1 - \alpha) + M^2(1 - \alpha) + m^2\alpha) + \lambda^2(1 - \sigma)}. \quad (102)$$

Замечая, что  $\lambda^2$  необходимо учитывать только, если  $\sigma$  близко к нулю, проинтегрируем по переменной  $\sigma$ :

$$C_3(s) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{(-s)\alpha(1 - \alpha) + M^2(1 - \alpha) + m^2\alpha} \times \ln \left( \frac{(-s)\alpha(1 - \alpha) + M^2(1 - \alpha) + m^2\alpha}{\lambda^2} \right). \quad (103)$$

Интегрирование по  $\alpha$  нетрудно выполнить в пределе  $|s - M^2| \gg m^2$ . В результате получаем:

$$C_3(s) = \frac{1}{s - M^2} \left( \ln \left( \frac{Mm}{\lambda^2} \right) \ln \left( \frac{(-s) + M^2}{Mm} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(-s) + M^2}{M^2} \right) \ln \left( \frac{(-s) + M^2}{m^2} \right) - Li_2 \left( \frac{(-s)}{(-s) + M^2} \right) \right) \quad (104)$$

В физической области (при  $s > M^2$ ) нужно брать значение этой функции на верхнем берегу разреза. При этом

$$Li_2 \left( \frac{s}{s - M^2} \right) \equiv -Li_2 \left( \frac{s - M^2}{s} \right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{s}{s - M^2} \right) - i\pi \ln \left( \frac{s}{s - M^2} \right). \quad (105)$$

Очевидно,

$$C_1(s) \equiv \frac{(4\pi)^2}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_2 d_3 d_4} = C_3(s). \quad (106)$$

Для вычисления  $M_{box}$  в случае рассеяния электрона на точечном протоне необходим также интеграл

$$J(s, t) = \int dx_1 \dots dx_4 \delta \left( \sum x_i - 1 \right) \frac{1}{\Delta_{box}}, \quad (107)$$

где  $\Delta_{box}$  определено формулой (82). Этот интеграл не содержит инфракрасной расходимости, поэтому в  $\Delta_{box}$  можно изначально положить

$\lambda = 0$ . Вычислим этот интеграл при  $s - M^2 \gg m^2$ . Так как он сходится при  $m^2 \rightarrow 0$ , то можно положить  $\Delta_{box} = \Delta_{box}^0$ ,

$$\Delta_{box}^0 = (-t) x_1 x_3 + (-s) x_2 x_4 + M^2 x_4 (x_2 + x_4). \quad (108)$$

Интеграл удобно брать в области  $(-s) + M^2 > 0$  и  $(-t) > 0$ , где он не имеет мнимой части; переход в физическую область дается аналитическим продолжением на верхний берег разреза по  $s$ .

Сначала положим  $x_2 = 1 - x_1 - x_3 - x_4$  и проинтегрируем по  $x_1$ :

$$\begin{aligned} J(s, t) &= \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4} dx_3 \int_0^{1-x_3-x_4} dx_1 \times \\ &\times \frac{1}{((-t) x_3 - ((-s) + M^2) x_4) x_1 + ((-s) (1 - x_3 - x_4) x_4 + M^2 (1 - x_3) x_4)} = \\ &= \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4} dx_3 \frac{1}{((-t) x_3 - ((-s) + M^2) x_4)} \left\{ \ln((-t) (1 - x_3 - x_4) x_3 + M^2 x_4^2) - \right. \\ &\quad \left. - \ln((-s) (1 - x_3 - x_4) x_4 + M^2 (1 - x_3) x_4) \right\}. \quad (109) \end{aligned}$$

Далее введем новые переменные  $x_3 = \sigma(1 - \alpha)$ ,  $x_4 = \sigma\alpha$  и проинтегрируем по  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} J(s, t) &= \int_0^1 d\alpha \frac{1}{((-t) (1 - \alpha) - ((-s) + M^2) \alpha)} \times \\ &\times \left[ \frac{(-t) (1 - \alpha) \ln\left(\frac{(1-\alpha)(-t)}{\alpha^2 M^2}\right)}{((-t) (1 - \alpha) - M^2 \alpha^2)} - \frac{((-s) + M^2) \ln\left(\frac{(-s)+M^2}{M^2 \alpha}\right)}{((-s) + M^2 - M^2 \alpha)} \right] = \\ &= \frac{1}{((-s) + M^2)^2 + (-s) (-t)} \int_0^1 d\alpha \left( \frac{M^2 ((-s) + M^2) \ln\left(\frac{(-s)+M^2}{\alpha M^2}\right)}{(-s) + M^2 - \alpha M^2} - \right. \\ &\quad - \frac{M^2 (\alpha ((-s) + M^2) + (-t)) \ln\left(\frac{(1-\alpha)(-t)}{\alpha^2 M^2}\right)}{(1 - \alpha)(-t) - \alpha^2 M^2} + \\ &\quad \left. + \frac{((-s) + M^2) ((-s) + M^2 + (-t)) \ln\left(\frac{\alpha((-s)+M^2)}{(1-\alpha)(-t)}\right)}{\alpha((-s) + M^2) - (1 - \alpha)(-t)} \right). \quad (110) \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned}
 J(s, t) &= \\
 &= \frac{(-s) + M^2}{((-s) + M^2)^2 + (-s)(-t)} \left( \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{(-s) + M^2}{(-t)} \right) - Li_2 \left( \frac{(-s)}{(-s) + M^2} \right) \right) + \\
 &+ \frac{2\pi^2}{3} - \frac{(-t)}{(-s) + M^2} \frac{M^2}{(-t)} f \left( \frac{M^2}{(-t)} \right) - \frac{M^2}{(-t)} g \left( \frac{M^2}{(-t)} \right), \quad (111)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^1 d\rho \frac{\ln \left( \frac{1-\rho}{x\rho^2} \right)}{(1-\rho) - x\rho^2} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \left[ \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1} \right) + 2 Li_2 \left( \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1} \right) + \frac{2\pi^2}{3} \right], \quad (112)
 \end{aligned}$$

так что  $f \left( \frac{M^2}{-t} \right) = t C_2(t)$  (см. (94), (99)),

$$g(x) = \int_0^1 d\rho \frac{\rho \ln \left( \frac{1-\rho}{x\rho^2} \right)}{(1-\rho) - x\rho^2} = \frac{1}{2x} \left( \frac{2\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \ln^2 x - f(x) \right), \quad (113)$$

и мы воспользовались значениями интегралов

$$\int_0^1 \frac{dx}{a-bx} \ln \left( \frac{a}{bx} \right) = \frac{1}{b} \left[ \frac{\pi^2}{6} - Li_2 \left( \frac{a-b}{a} \right) \right], \quad (114)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{ax-b(1-x)} \ln \left( \frac{ax}{b(1-x)} \right) = \frac{1}{a+b} \left[ \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{a}{b} \right) \right]. \quad (115)$$

В физической области канала рассеяния  $s > M^2$

$$\begin{aligned}
 J(s, t) &= \frac{(-s) + M^2}{((-s) + M^2)^2 + (-s)(-t)} \left[ \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{s-M^2}{(-t)} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{s-M^2}{s} \right) \right] + \\
 &+ Li_2 \left( \frac{s-M^2}{s} \right) - \frac{\pi^2}{6} - \frac{(-t)}{(-s) + M^2} \frac{M^2}{(-t)} f \left( \frac{M^2}{(-t)} \right) - \frac{M^2}{(-t)} g \left( \frac{M^2}{(-t)} \right) - \\
 &- i\pi \ln \left( \frac{s-M^2}{(-t)} \right) - i\pi \ln \left( \frac{s-M^2}{s} \right), \quad (116)
 \end{aligned}$$

## В Функции $K(p_i, p_j)$

Изначально функции  $K(p_i, p_j)$  появляются как интегралы

$$K(p_i, p_j) = -2(p_i p_j) \frac{(4\pi)^2}{i} \times \\ \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2 + i0)(k^2 + 2(kp_i) + i0)(k^2 + 2(kp_j) + i0)}. \quad (117)$$

Представление (16) получается при  $\lambda \rightarrow 0$  из (117) после фейнмановской параметризации

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2 + i0)(k^2 + 2(kp_i) + i0)(k^2 + 2(kp_j) + i0)} \\ = 2 \int_0^1 dy \int_0^1 x dx \frac{1}{(k^2 + 2x(kp_y) - \lambda^2 + i0)^3}, \quad (118)$$

интегрирования по  $d^4 k$  и затем по  $x$ .

При совпадающих аргументах определения (16) имеем

$$K(p_1, p_1) = K(p_3, p_3) = \ln \left( \frac{m^2}{\lambda^2} \right), \quad (119)$$

$$K(p_2, p_2) = K(p_4, p_4) = \ln \left( \frac{M^2}{\lambda^2} \right). \quad (120)$$

Функция  $K(p_1, p_3)$  входит в поправку к электронной вершине (см. (15)) и широко известна в литературе. Из книги Берестецкого, Лифшица и Питаевского [31] нетрудно получить представление

$$K(p_1, p_3) = \frac{\theta}{\tanh \theta} \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + \frac{4}{\tanh \theta} \int_0^{\theta/2} d\phi \phi \tanh \phi, \quad (121)$$

в котором

$$\sinh^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{-q^2}{4m^2}. \quad (122)$$

Оставшийся интеграл выражается через дилוגарифм:

$$K(p_1, p_3) = \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \left[ \ln \xi \ln \left( \frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\ln^2 \xi}{2} + 2 Li_2(-\xi) + 2 \ln \xi \ln(1 + \xi) \right], \quad (123)$$

где

$$\xi = e^\theta = \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{-t}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{-t}} - 1}. \quad (124)$$

В пределе  $-t \gg m^2$  получаем

$$K(p_1, p_3) = \ln \left( \frac{-t}{m^2} \right) \ln \left( \frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{-t}{m^2} \right) - \frac{\pi^2}{6}. \quad (125)$$

Выражение для  $K(p_2, p_4)$  получается заменой  $m \rightarrow M$ .

Рассмотрим теперь  $K(p_1, -p_2)$ . Сравнивая (117) и (100), имеем

$$K(p_1, -p_2) = 2(p_1 p_2) C_3(s), \quad (126)$$

что с учетом (104) и (105) дает в физической области канала рассеяния

$$\begin{aligned} K(p_1, -p_2) = & \ln \left( \frac{M m}{\lambda^2} \right) \left( \ln \left( \frac{s - M^2}{M m} \right) - i\pi \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{s - M^2}{M^2} \right) - i\pi \right) \left( \ln \left( \frac{s - M^2}{m^2} \right) - i\pi \right) - Li_2 \left( \frac{s}{s - M^2} \right). \end{aligned} \quad (127)$$

В своей работе Тсай сделал замену  $K(p_1, -p_2) \rightarrow K(p_1, p_2)$ . Она эквивалентна замене  $(-s) \rightarrow (s - 2M^2)$  в выражении (100), и в результате, пользуясь выражением для интеграла  $C_3$  (104), получаем

$$\begin{aligned} K(p_1, p_2) = & \ln \left( \frac{M m}{\lambda^2} \right) \ln \left( \frac{s - M^2}{M m} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{s - M^2}{M^2} \right) \ln \left( \frac{s - M^2}{m^2} \right) - Li_2 \left( \frac{s - 2M^2}{s - M^2} \right). \end{aligned} \quad (128)$$

Сравнивая (127) и (128), находим разницу

$$\begin{aligned} & Re(K(p_1, -p_2)) - K(p_1, p_2) = \\ & = -\frac{\pi^2}{2} - Re \left( Li_2 \left( 1 + \frac{M^2}{s - M^2} \right) \right) + Li_2 \left( 1 - \frac{M^2}{s - M^2} \right), \end{aligned} \quad (129)$$

или

$$Re(K(p_1, -p_2)) - K(p_1, p_2) = -\frac{\pi^2}{2} + \int_{1 - \frac{M^2}{s - M^2}}^{1 + \frac{M^2}{s - M^2}} \frac{dt}{t} \ln |1 - t|. \quad (130)$$

Перейдем к функции  $K(p_1, p_4)$ . Легко видеть, что

$$K(p_1, p_4) = -2(p_1 p_4) C_3(u), \quad (131)$$

так что из (104) получаем

$$K(p_1, p_4) = \ln \left( \frac{M m}{\lambda^2} \right) \ln \left( \frac{(-u) + M^2}{M m} \right) + \\ + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(-u) + M^2}{M^2} \right) \ln \left( \frac{(-u) + M^2}{m^2} \right) - Li_2 \left( \frac{(-u)}{(-u) + M^2} \right). \quad (132)$$

Функции  $K(p_i, p_j)$  для импульсов на массовой поверхности зависят только от скалярного произведения  $(p_i p_j)$ , поэтому

$$K(p_3, p_4) = K(p_1, p_2), \quad K(p_3, -p_4) = K(p_1, -p_2), \quad (133)$$

$$K(p_2, p_3) = K(p_1, p_4). \quad (134)$$

## С Амплитуды двухфотонного обмена в процессе упругого рассеяния электрона на точечном протоне

Рассмотрим выражение для box-диаграммы (21) в случае рассеяния электрона на точечном протоне

$$iM_{box} = Z^2 e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4} \times \\ \times \left( \bar{u}_{p_3} \gamma^\mu \left( \hat{k} + \frac{\hat{K}}{2} + m \right) \gamma^\nu u_{p_1} \right) \left( \bar{U}_{p_4} \gamma^\mu \left( -\hat{k} + \frac{\hat{P}}{2} + M \right) \gamma^\nu U_{p_2} \right). \quad (135)$$

Используя для краткости обозначение

$$\bar{u}_{p_3} A u_{p_1} \bar{U}_{p_4} B U_{p_2} = (A \otimes B)$$

и соотношения

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu &= g^{\mu\rho} \gamma^\nu + g^{\rho\nu} \gamma^\mu - g^{\mu\nu} \gamma^\rho + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\sigma \gamma^5, \quad \epsilon^{0123} = 1, \quad \gamma^5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \\
& \left( \gamma^\mu \hat{a} \gamma^\nu \otimes \gamma^\mu \hat{b} \gamma^\nu \right) = \\
& = 2(ab) \left( (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5) \right) + 2 \left( \hat{b} \otimes \hat{a} \right) - 2 \left( \hat{b} \gamma^5 \otimes \hat{a} \gamma^5 \right), \\
& 2 \left( \frac{P}{2} - k \right) \left( \frac{K}{2} + k \right) = s - d_2 - d_4 - m^2 - M^2, \tag{136}
\end{aligned}$$

вводя Фейнмановские параметры так же как в (80), переходя в числителе от  $k$  к  $k_{box}$  (81), используя уравнения Дирака и учитывая, что в интеграле по  $d^4 k_{box}$  можно заменить  $k_{box}^\rho k_{box}^\sigma$  на  $-g^{\rho\sigma} \Delta_{box}/2$ , а линейные по  $k_{box}$  и по  $q$  (т.е. по разности  $x_1 - x_3$ ) члены заануляются (первое обстоятельство очевидно, а второе, являющееся следствием  $T$ -инвариантности, видно из симметрии знаменателя и области интегрирования относительно замены  $x_1 \leftrightarrow x_3$ ), получаем

$$\begin{aligned}
iM_{box} &= \frac{Z^2 e^4}{(2\pi)^4} \int dx_1 \dots dx_4 \Gamma(4) \delta \left( \sum x_i - 1 \right) \int \frac{d^4 k_{box}}{(k_{box}^2 - \Delta_{box} - i0)^4} \\
& \left\{ (s - d_2 - d_4 - m^2 - M^2) \left( (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5) \right) \right. \\
& + \Delta_{box} \left( (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) - (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5) \right) - 2(x_1 - x_3)^2 mM (\gamma^5 \otimes \gamma^5) + \\
& + \frac{1}{2}(1 - x_2)(1 - x_4) \left[ \left( \hat{P} \otimes \hat{K} \right) - \left( \hat{P} \gamma^5 \otimes \hat{K} \gamma^5 \right) \right] - Mx_4^2 \left( \hat{P} \otimes 1 \right) - \\
& - mx_2^2 \left( 1 \otimes \hat{K} \right) - 2(2 - x_2 - x_4 - x_2 x_4) mM (1 \otimes 1) + \\
& + mM (\gamma^\mu \gamma^\nu \otimes \gamma^\mu \gamma^\nu) + \frac{i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2} \left( M(x_4 P + (1 - x_2)K)^\sigma (\gamma^\rho \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^\nu) + \right. \\
& \left. + m(x_2 K + (1 - x_4)P)^\sigma (\gamma^\mu \gamma^\nu \otimes \gamma^\rho \gamma^5) \right) \left. \right\}. \tag{137}
\end{aligned}$$

Как известно, общий вид  $P$ - и  $T$ -инвариантной амплитуды рассеяния фермиона на фермионе содержит 6 независимых спиновых структур. Выбрав эти структуры в виде

$$\left( \gamma^\mu \otimes \gamma^\mu \right), \left( \gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5 \right), \left( \frac{\hat{P}}{2M} \otimes 1 \right), \left( 1 \otimes \frac{\hat{K}}{2m} \right), (1 \otimes 1), (\gamma^5 \otimes \gamma^5), \tag{138}$$

мы можем выразить (137) через них с помощью соотношений

$$\left(\hat{P} \otimes \hat{K}\right) = (s - u) (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + t (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5) + 4mM (\gamma^5 \otimes \gamma^5), \quad (139)$$

$$\begin{aligned} \left(\hat{P} \gamma^5 \otimes \hat{K} \gamma^5\right) &= \frac{(t - 4M^2)(t - 4m^2)}{t} (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + \\ &+ (s - u) \left[ (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5) + \frac{4mM}{t} \left( (1 \otimes 1) + (\gamma^5 \otimes \gamma^5) \right) \right] + \\ &+ \frac{4M^2(t - 4m^2)}{t} \left( \frac{\hat{P}}{2M} \otimes 1 \right) + \frac{4m^2(t - 4m^2)}{t} \left( 1 \otimes \frac{\hat{K}}{2m} \right), \quad (140) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mM (\gamma^\mu \gamma^\nu \otimes \gamma^\mu \gamma^\nu) &= -\frac{8m^2 M^2}{t} (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + \frac{8m^2 M^2}{t} \left( \frac{\hat{P}}{2M} \otimes 1 \right) + \\ &+ \frac{8m^2 M^2}{t} \left( 1 \otimes \frac{\hat{K}}{2m} \right) + \frac{2Mm(2t - (s - u))}{t} (1 \otimes 1) - \frac{2Mm(s - u)}{t} (\gamma^5 \otimes \gamma^5), \quad (141) \end{aligned}$$

$$i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P^\sigma (\gamma^\rho \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^\nu) = -4M (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5) - 4m (\gamma^5 \otimes \gamma^5), \quad (142)$$

$$\begin{aligned} i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} K^\sigma (\gamma^\rho \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^\nu) &= -4M \frac{t - 4m^2}{t} \left[ (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) - \left( \frac{\hat{P}}{2M} \otimes 1 \right) \right] - \\ &- \frac{16m^2 M}{t} \left( 1 \otimes \frac{\hat{K}}{2m} \right) + \frac{4m(s - u)}{t} \left[ (1 \otimes 1) + (\gamma^5 \otimes \gamma^5) \right], \quad (143) \end{aligned}$$

и соотношений для  $i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} K^\sigma (\gamma^\mu \gamma^\nu \otimes \gamma^\rho \gamma^5)$  и  $i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P^\sigma (\gamma^\mu \gamma^\nu \otimes \gamma^\rho \gamma^5)$ , получающихся из двух последних уже выписанных с помощью замены  $p_1 \leftrightarrow p_2$ ,  $p_3 \leftrightarrow p_4$ ,  $m \leftrightarrow M$  и перестановки сомножителей в  $\otimes$ -произведении. Справедливость этих соотношений легко проверить в системе центра инерции аннигиляционного канала, переходя от биспиноров к

двух-компонентным спинорам. Используя их, получаем

$$\begin{aligned}
iM_{box} = & \frac{Z^2 e^4}{(2\pi)^4} \int dx_1 \dots dx_4 \Gamma(4) \delta\left(\sum x_i - 1\right) \int \frac{d^4 k_{box}}{(k_{box}^2 - \Delta_{box} - i0)^4} \times \\
& \times \left\{ \left( 2(s - m^2 - M^2)(1 - x_2 - x_4) + \frac{2x_2 x_4 (st - 4m^2 M^2)}{t} + 2\Delta_{box} \right) \times \right. \\
& \times (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + ((s - m^2 - M^2)(x_2 + x_4 - x_2 x_4) - d_2 - d_4 - \Delta_{box} - \\
& - 2m^2 x_2 - 2M^2 x_4) [(\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5)] + \\
& + 2M^2 \left( (1 - x_4)x_4 + \frac{x_2 x_4 (4m^2 - t)}{t} \right) \left( \frac{\hat{P}}{2M} \otimes 1 \right) + \\
& + 2m^2 \left( (1 - x_2)x_2 + \frac{x_2 x_4 (4M^2 - t)}{t} \right) \left( 1 \otimes \frac{\hat{K}}{2m} \right) + \\
& + 2mM \left( x_2 + x_4 - \frac{2x_2 x_4 (s - m^2 - M^2)}{t} \right) (1 \otimes 1) + \\
& \left. + 2mM \left( 1 - 2x_2 - 2x_4 - \frac{2x_2 x_4 (s - m^2 - M^2)}{t} - (x_1 - x_3)^2 \right) (\gamma^5 \otimes \gamma^5) \right\}. \tag{144}
\end{aligned}$$

Заметим, что при интегрировании по  $d^4 k_{box}$  можно сделать замену  $(s - m^2 - M^2)(x_2 + x_4) \rightarrow 2\Delta_{box} + d_2 + d_4 + 2m^2 x_2 + 2M^2 x_4$ , поскольку разница между этими выражениями линейна по  $k_{box}$ .

В пределе  $m \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned}
iM_{box} = & \frac{Z^2 e^4}{(2\pi)^4} \int dx_1 \dots dx_4 \Gamma(4) \delta\left(\sum x_i - 1\right) \int \frac{d^4 k_{box}}{(k_{box}^2 - \Delta_{box} - i0)^4} \times \\
& \times \left\{ (2(s - M^2) - 2d_2 - 2d_4 - 4M^2 x_4 + 2s x_2 x_4 - 2\Delta_{box}) (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + \right. \\
& + (-x_2 x_4 (s - M^2) + \Delta_{box}) [(\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5)] + \\
& \left. 2M^2 (x_4 - (x_2 + x_4)x_4) \left[ (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + \left( \gamma^\mu \otimes \frac{\sigma^{\mu\nu} q^\nu}{2M} \right) \right] \right\} \tag{145}
\end{aligned}$$

В приложении А мы вычислили все интегралы необходимые для нахождения явного вида  $M_{box}$ . Единственное, что нужно сделать — это преобразовать члены, содержащие только  $x_4$  в первой степени. Для вох-амплитуды из (81) получаем:

$$x_4 = -2 \left( (k_{box} - k) \frac{K^2 P - (KP)K}{K^2 P^2 - (KP)^2} \right) \tag{146}$$

Члены пропорциональные  $k_{box}$  обращаются в нуль при интегрировании по  $d^4 k_{box}$ , поэтому получаем

$$x_4 = -\frac{2K^2}{K^2 P^2 - (KP)^2} (-kP) - \frac{2(KP)}{K^2 P^2 - (KP)^2} (kK), \quad (147)$$

Члены, содержащие  $k$  мы перепишем через  $d_i$  :

$$x_4 = -\frac{2K^2}{K^2 P^2 - (KP)^2} \left( d_4 - \frac{d_1 + d_3 - q^2}{2} \right) - \frac{2(KP)}{K^2 P^2 - (KP)^2} \left( d_2 - \frac{d_1 + d_3 - q^2}{2} \right). \quad (148)$$

Следует отметить, что вклад этого выражения в амплитуду конечен при  $m \rightarrow 0$ .

Наконец, выполняя в (145) интегрирование по  $k_{box}$  мы приходим к формуле (43)

## D Интегралы, возникающие при вычислении реальных радиационных поправок

В выражении (76) для реальных радиационных поправок возникают интегралы следующего вида (здесь мы придерживаемся обозначений из статьи Максимова и Тьена)

$$L_{ij} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega} \frac{1}{(p_i k)(p_j k)} \theta \left( \eta \Delta E - \frac{(k p_4)}{M} \right) = \int_{\lambda}^{\omega'_{max}} |\mathbf{k}'| d\omega' \int d\Omega'_{\gamma} \frac{1}{(p_i k)(p_j k)}, \quad (149)$$

где штрихом обозначаются величины в специальной системе отсчета, в которой обращаются в ноль пространственные компоненты 4-вектора  $p_1 + p_2 - p_3$ ; верхний предел интегрирования по энергии фотона  $\omega'_{max} = \eta \Delta E$ ; интеграл по углу вылета фотона берется по всем возможным направлениям, индексы  $i, j$  в (149) пробегает значения от 1 до 4. В рамках мягкофотонного приближения считаем, что

$$\epsilon'_1 = \epsilon_{3,el}, \quad \epsilon'_3 = \epsilon_1, \quad \epsilon'_2 = \epsilon_1 + M - \epsilon_{3,el}, \quad (150)$$

Как уже было сказано выше, результат Мо и Тсяя воспроизводится после замены  $|\mathbf{k}'| \rightarrow \omega'$  в выражении (149), то есть он получается из результата

Максимона и Тьена заменой функций  $L_{ij}$  на  $\tilde{L}_{ij}$ , где

$$\tilde{L}_{ij} = \int_{\lambda}^{\omega'_{max}} \omega' d\omega' \int d\Omega'_{\gamma} \frac{1}{(p_i k)(p_j k)} \quad (151)$$

Используя параметризацию

$$\frac{1}{(kp_i)(kp_j)} = \int_0^1 \frac{dx}{(kp_x)^2}, \quad (152)$$

где  $p_x = xp_i + (1-x)p_j$ , и проинтегрировав по углам и энергии фотона, получаем

$$L_{ij} = \int_0^1 dx \frac{2\pi}{p_x^2} \left[ 2 \ln \left( \frac{2\omega'_{max}}{\lambda} \right) + \frac{p_x^0}{|\mathbf{p}_x|} \ln \left( \frac{p_x^0 - |\mathbf{p}_x|}{p_x^0 + |\mathbf{p}_x|} \right) \right]. \quad (153)$$

$$\tilde{L}_{ij} = \int_0^1 dx \frac{2\pi}{p_x^2} \left[ 2 \ln \left( \frac{2\omega'_{max}}{\lambda} \right) + \ln \left( \frac{p_x^2}{4(p_x^0)^2} \right) \right]. \quad (154)$$

При совпадающих индексах удобно напрямую пользоваться этими соотношениями, получая в пределе  $m \ll \epsilon_1, \epsilon_3$

$$\frac{L_{11}}{4\pi} = \frac{1}{m^2} \left[ \ln \left( \frac{2\eta \Delta E}{\lambda} \right) - \ln \left( \frac{2\epsilon_3}{m} \right) \right] = \frac{\tilde{L}_{11}}{4\pi}, \quad (155)$$

$$\frac{L_{33}}{4\pi} = \frac{1}{m^2} \left[ \ln \left( \frac{2\eta \Delta E}{\lambda} \right) - \ln \left( \frac{2\epsilon_1}{m} \right) \right] = \frac{\tilde{L}_{33}}{4\pi}, \quad (156)$$

$$\frac{L_{22}}{4\pi} = \frac{1}{M^2} \left[ \ln \left( \frac{2\eta \Delta E}{\lambda} \right) - \frac{\epsilon_4}{|\mathbf{p}_4|} \ln \left( \frac{\epsilon_4 + |\mathbf{p}_4|}{M} \right) \right], \quad (157)$$

$$\frac{\tilde{L}_{22}}{4\pi} = \frac{1}{M^2} \left[ \ln \left( \frac{2\eta \Delta E}{\lambda} \right) - \ln \left( \frac{2\epsilon_4}{M} \right) \right], \quad (158)$$

$$\frac{L_{44}}{4\pi} = \frac{1}{M^2} \left[ \ln \left( \frac{2\eta \Delta E}{\lambda} \right) - 1 \right], \quad (159)$$

$$\frac{\tilde{L}_{44}}{4\pi} = \frac{1}{M^2} \left[ \ln \left( \frac{2\eta \Delta E}{\lambda} \right) - \ln \left( \frac{2M}{M} \right) \right]. \quad (160)$$

При  $i \neq j$  вычисление интегралов требует усилий. Удобный трюк был предложен в работе т'Хофта и Вельтмана [33]. Очевидно, замена  $p_i \rightarrow \alpha p_i$  изменяет значение интеграла в  $\alpha^{-1}$  раз. В то же время, при

выборе  $\alpha$  таким, чтобы выполнялось условие  $(\alpha p_i - p_j)^2 = 0$ , интегралы (153) и (154) с заменой  $p_i \rightarrow \alpha p_i$  значительно упрощаются, поскольку после нее  $p_x^2$  становится линейным по  $x$ . Результат представляется следующим образом (в формулах, приведенных ниже, не требуется малость массы  $m$ ):

$$L_{ij} = \frac{2\pi}{\sqrt{(p_i p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}} \left( S_{ij}^{(1)} + S_{ij}^{(2)} \right), \quad (161)$$

где

$$S_{ij}^{(1)} = 2 \ln \left( \frac{(p_i p_j) + \sqrt{(p_i p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}}{m_i m_j} \right) \ln \left( \frac{2\omega_{max}}{\lambda} \right), \quad (162)$$

$$S_{ij}^{(2)} = \ln^2 \left( \frac{\beta_i}{m_i M} \right) - \ln^2 \left( \frac{\beta_j}{m_j M} \right) + Li_2 \left( 1 - \frac{\beta_i (lp_4)}{\gamma_{ij} M^2} \right) + \\ + Li_2 \left( 1 - \frac{m_i^2 (lp_4)}{\gamma_{ij} \beta_i} \right) - Li_2 \left( 1 - \frac{\beta_j (lp_4)}{\alpha \gamma_{ij} M^2} \right) - Li_2 \left( 1 - \frac{m_j^2 (lp_4)}{\alpha \gamma_{ij} \beta_j} \right), \quad (163)$$

$$\alpha = \frac{(p_i p_j) + \sqrt{(p_i p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}}{m_i^2}, \quad l = \alpha p_i + p_j, \quad (164)$$

$$\beta_k = (p_k t) + \sqrt{(p_k t)^2 - m_k^2 M^2}, \quad \gamma_{ij} = \sqrt{(p_i p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}. \quad (165)$$

Функции  $\tilde{L}_{ij}$  записываются в аналогичном виде:

$$\tilde{L}_{ij} = \frac{2\pi}{\sqrt{(p_i p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}} \left( S_{ij}^{(1)} + \tilde{S}_{ij}^{(2)} \right), \quad (166)$$

где инфракрасно расходящаяся часть  $S_{ij}^{(1)}$  выделена так же, как и в  $L_{ij}$  (161).

Выпишем явные выражения для функций  $S_{ij}^{(2)}$  и  $\tilde{S}_{ij}^{(2)}$  в пределе малой массы электрона:

$$S_{13}^{(2)} = -\ln^2 \left( \frac{2\epsilon_1}{m} \right) - \ln^2 \left( \frac{2\epsilon_3}{m} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\pi^2}{6} + Li_2 \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\pi^2}{6} \quad (167)$$

$$\tilde{S}_{13}^{(2)} = -\ln^2 \left( \frac{2\epsilon_1}{m} \right) - \ln^2 \left( \frac{2\epsilon_3}{m} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\pi^2}{6} \quad (168)$$

$$S_{14}^{(2)} = -\ln^2 \left( \frac{2\epsilon_3}{m} \right) - \frac{\pi^2}{6} \quad (169)$$

$$\tilde{S}_{14}^{(2)} = -\ln^2 \left( \frac{2\epsilon_3}{m} \right) - \frac{\pi^2}{12} \quad (170)$$

$$S_{34}^{(2)} = -\ln^2 \left( \frac{2\epsilon_1}{m} \right) - \frac{\pi^2}{6} \quad (171)$$

$$\tilde{S}_{34}^{(2)} = -\ln^2 \left( \frac{2\epsilon_1}{m} \right) - \frac{\pi^2}{12} \quad (172)$$

$$S_{12}^{(2)} = -\ln^2 \left( \frac{2\epsilon_3}{m} \right) - \ln^2 x + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{x}{\eta} \right) - Li_2 \left( 1 - \frac{1}{\eta x} \right) + Li_2 \left( 1 - \frac{\eta}{x} \right) - \frac{\pi^2}{6} \quad (173)$$

$$\tilde{S}_{12}^{(2)} = -\ln^2 \left( \frac{2\epsilon_3}{m} \right) + \ln^2 \eta + Li_2 \left( 1 - \eta \frac{2\epsilon_4}{x} \right) \quad (174)$$

$$S_{32}^{(2)} = -\ln^2 \left( \frac{2\epsilon_1}{m} \right) - \ln^2 x + \frac{1}{2} \ln^2 (\eta x) + Li_2 \left( 1 - \frac{1}{\eta x} \right) - Li_2 \left( 1 - \frac{\eta}{x} \right) - \frac{\pi^2}{6} \quad (175)$$

$$\tilde{S}_{32}^{(2)} = -\ln^2 \left( \frac{2\epsilon_1}{m} \right) - \ln^2 \frac{1}{\eta} + Li_2 \left( 1 - \frac{2\epsilon_4}{\eta x} \right) \quad (176)$$

$$S_{24}^{(2)} = -\ln^2 x - Li_2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) \quad (177)$$

$$\tilde{S}_{24}^{(2)} = -\ln^2 x - Li_2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) - \frac{\pi^2}{12} \quad (178)$$

Приведенные выражения удобны для сравнения ответов двух групп авторов между собой и получения разницы  $\delta_{real}^{MTj} - \delta_{real}^{MoT}$  (79).

Выражения для  $S_{ij}^{(2)}$  можно найти в приложении D статьи Максимова и Тьена [24], только следует отметить, что  $S_{13}^{(2)}$  и  $S_{24}^{(2)}$  там содержат опечатки (окончательный ответ для реальных радиационных поправок, тем не менее, правильный). В промежуточных результатах Тсяя [9] фигурируют функции  $I_{i,j}$ , определение которых можно переписать следующим образом:

$$I_{i,j} = \frac{1}{2} K(p_i, p_j) - (p_i p_j) \frac{\tilde{L}_{ij}}{4\pi}. \quad (179)$$

Выражения для функций  $I_{i,j}$  есть в приложении статьи [9], но там также имеются неточности: ошибки в выражениях  $I_{1,3}$  и  $I_{2,4}$  (исправленные

в более поздней работе Мо и Тсяя [10]) и опечатка в знаке одного из слагаемых  $I_{4,1}$  (исправленная в окончательном ответе для радиационных поправок в статье Тсяя [9]).

## Список литературы

- [1] R. Hofstadter and R. W. McAllister, Phys. Rev. **98** (1955) 217.
- [2] R. Hofstadter, Rev. Mod. Phys. **28** (1956) 214.
- [3] R. W. Mcallister and R. Hofstadter, Phys. Rev. **102** (1956) 851.
- [4] R. Hofstadter, F. Bumiller and M. Croissiaux, Phys. Rev. Lett. **5** (1960) 263.
- [5] F. Bumiller, M. Croissiaux and R. Hofstadter, Phys. Rev. Lett. **5** (1960) 261.
- [6] L. N. Hand, Rev. Mod. Phys. **35** (1963) 335.
- [7] T. Janssens, R. Hofstadter, E. B. Hughes and M. R. Yearian, Phys. Rev. **142** (1966) 922.
- [8] D. H. Coward, H. C. DeStaebler, R. A. Early, J. Litt, A. Minten, L. W. Mo, W. K. H. Panofsky and R. E. Taylor *et al.*, Phys. Rev. Lett. **20** (1968) 292.
- [9] Y. -S. Tsai, Phys. Rev. **122** (1961) 1898.
- [10] L. W. Mo and Y. -S. Tsai, Rev. Mod. Phys. **41** (1969) 205.
- [11] J. Litt, G. Buschhorn, D. H. Coward, H. C. DeStaebler, L. W. Mo, R. E. Taylor, B. C. Barish and S. C. Loken *et al.*, Phys. Lett. B **31** (1970) 40.
- [12] C Berger, V. Burkert, G. Knop, B. Langenbeck and K. Rith, Phys. Lett. B **35** (1971) 87.
- [13] L. E. Price, J. R. Dunning, M. Goitein, K. Hanson, T. Kirk and R. Wilson, Phys. Rev. D **4** (1971) 45.
- [14] W. Bartel, F. W. Busser, W. r. Dix, R. Felst, D. Harms, H. Krehbiel, P. E. Kuhlmann and J. McElroy *et al.*, Nucl. Phys. B **58** (1973) 429.
- [15] K. M. Hanson, J. R. Dunning, M. Goitein, T. Kirk, L. E. Price and R. Wilson, Phys. Rev. D **8** (1973) 753.
- [16] F. Borkowski, P. Peuser, G. G. Simon, V. H. Walther and R. D. Wendling, Nucl. Phys. B **93** (1975) 461.
- [17] G. G. Simon, C. Schmitt, F. Borkowski and V. H. Walther, Nucl. Phys. A **333** (1980) 381.

- [18] P. E. Bosted, L. Clogher, A. Lung, L. Stuart, J. Alster, R. G. Arnold, C. C. Chang and F. Dietrich *et al.*, Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 3841.
- [19] A. F. Sill, R. G. Arnold, P. E. Bosted, C. C. Chang, J. Gomez, A. T. Katramatou, C. J. Martoff and G. Petratos *et al.*, Phys. Rev. D **48** (1993) 29.
- [20] L. Andivahis, P. E. Bosted, A. Lung, L. M. Stuart, J. Alster, R. G. Arnold, C. C. Chang and F. S. Dietrich *et al.*, Phys. Rev. D **50** (1994) 5491.
- [21] R. C. Walker, B. Filippone, J. Jourdan, R. Milner, R. McKeown, D. H. Potterveld, L. Andivahis and R. Arnold *et al.*, Phys. Rev. D **49** (1994) 5671.
- [22] M. E. Christy *et al.* [E94110 Collaboration], Phys. Rev. C **70** (2004) 015206.
- [23] J. Arrington, P. G. Blunden and W. Melnitchouk, Prog. Part. Nucl. Phys. **66** (2011) 782 [arXiv:1105.0951 [nucl-th]].
- [24] L. C. Maximon and J. A. Tjon, Phys. Rev. C **62** (2000) 054320 [nucl-th/0002058].
- [25] M. K. Jones *et al.* [Jefferson Lab Hall A Collaboration], Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1398.
- [26] O. Gayou *et al.* [Jefferson Lab Hall A Collaboration], Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 092301.
- [27] V. Punjabi, C. F. Perdrisat, K. A. Aniol, F. T. Baker, J. Berthot, P. Y. Bertin, W. Bertozzi and A. Besson *et al.*, Phys. Rev. C **71** (2005) 055202 [Erratum-ibid. C **71** (2005) 069902].
- [28] M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. **79** (1950) 615.
- [29] I. A. Qattan, J. Arrington, R. E. Segel, X. Zheng, K. Aniol, O. K. Baker, R. Beams and E. J. Brash *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 142301.
- [30] D. R. Yennie, S. C. Frautschi and H. Suura, Annals Phys. **13**, 379 (1961).
- [31] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т., Т. IV/В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Квантовая электродинамика. — 3-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 728 с. — ISBN 5-02-014422-3 (Т. IV).
- [32] Y. C. Chen, A. Afanasev, S. J. Brodsky, C. E. Carlson and M. Vanderhaeghen, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 122301 [hep-ph/0403058].
- [33] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **153** (1979) 365.
- [34] Y. -S. Tsai, SLAC-PUB-0848.
- [35] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **76** (1949) 790.

*Р.Е. Герасимов, В.С. Фадин*

**Анализ приближений,  
используемых при вычислении радиационных поправок  
к сечению электрон-протонного рассеяния**

*R.E. Gerasimov, V.S. Fadin*

**Analysis of approximations  
used in calculations of radiative corrections  
to electron-proton scattering cross section**

ИЯФ 2014-10

Ответственный за выпуск А.В. Васильев

Работа поступила 9.06.2014 г.

---

Подписано в печать 9.06.2014 г.

Сдано в набор 16.06.2014 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3.0 печ.л., 2.4 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 10

---

Обработано на РС и отпечатано на  
ротапринте «ИЯФ им. Г.И. Будкера» СО РАН  
*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*