УЧРЕЖДЕНИЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН
(ИЯФ СО РАН)

М.Г. Козлов, А.В. Резниченко, В.С. Фадин

ИМПАКТ-ФАКТОР ДЛЯ РОЖДЕНИЯ ГЛЮОНА В МУЛЬТИРЕДЖЕВСКОЙ КИНЕМАТИКЕ В СЛЕДУЮЩЕМ ЗА БОРНОВСКИМ ПРИБЛИЖЕНИИ

ИЯФ 2011-23

НОВОСИБИРСК
2011

Импакт-фактор для рождения глюона в мультиреджевской кинематике в следующем за борновским приближении

М.Г. Козлов[†], *А.В. Резниченко*[‡], *В.С. Фадин*[††]

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера, 630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

Аннотация

Найдена однопетлевая поправка к импакт-фактору рождения глюона при переходе одНореджеонного состояния в t-канале в двухреджеонное. Этот импакт-фактор является составной частью многочастичных амплитуд в мультиреджевской кинематике. Рассматриваемая поправка необходима для развития теории реджевских и мультиреджевских процессов. В частности, она необходима для доказательства мультиреджевской формы амплитуды в следующем за главным логарифмическом приближении. Также поправка позволяет завершить проверку последнего из недоказанных условий бутстрапа для реджезации глюона и доказать в этом приближении справедливость мультиреджевской формы амплитуды. В статье представлены все необходимые вычисления и дано явное выражение для импакт-фактора при всех возможных цветовых состояниях в t-канале.

[*] *Работа выполнена в рамках проектов РФФИ 10-02-01238, а также ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”, грант 14.740.11.0082.*

[†] *e-mail address:* M.G.Kozlov@inp.nsk.su
[‡] *e-mail address:* A.V.Reznichenko@inp.nsk.su
[††] *e-mail address:* Fadin@inp.nsk.su

М.Г. Козлов, А.В. Резниченко, В.С. Фадин

Импакт-фактор для рождения глюона в мультиреджевской кинематике в следующем за борновским приближении

M.G. Kozlov, A.V. Reznichenko, V.S. Fadin

NLO Impact-factor for one gluon production in the multi-Regge kinematics

bf Abstract

We found one-loop corrections to the impact-factor of one gluon production for the transition of one-Reggeon to two-Reggeon state in the t-channel. The impact-factor is a component part of the multi-particle production amplitude in the multi-Regge kinematics. The corrections in question are required by the theory development of Regge and multi-Regge processes. In particular, they are necessary for the proof of the multi-Regge form of the amplitude in the next-to-leading logarithmic approximation (NLA). They allow one to accomplish the verification of the last unproved bootstrap condition for the gluon Reggeization and so to prove the NLA multi-Regge form of the amplitude holds true. In the article we perform all calculations and present the explicit form of the impact-factor for arbitrary colour representations in the t-channel.

1 Введение

Теория полужестких процессов в квантовой хромодинамике (КХД) основана на подходе БФКЛ (Балицкого–Фадина–Кураева–Липатова) [1–4], использующем замечательное свойство КХД – реджезацию глюона. В этом подходе амплитуды упругих процессов представляются в виде свертки импакт-факторов сталкивающихся частиц и функций Грина двух взаимодействующих реджезованных глюонов. При рассмотрении неупругих процессов появляется импакт-фактор другого типа — для перехода реджезованного глюона в обычный. Этот импакт фактор давно известен в главном логарифмическом приближении (ГЛП), когда в ряде теории возмущений суммируются только члены вида $(\alpha_S \ln s)^n$. В настоящее время наибольший интерес представляет развитие подхода БФКЛ в следующем за главным логарифмическом приближении (СГЛП), когда также учитываются члены $\alpha_S(\alpha_S \ln s)^n$. Кварковый вклад в импакт-фактор был найден в этом приближении в [5]. В данной работе мы вычисляем глюонный вклад.

Особую важность рассматриваемому импакт-фактору придает то, что он необходим для доказательстве мультиреджевской формы амплитуд с глюонным обменом, являющейся основой подхода БФКЛ. В ГЛП эта форма давно доказана [6]. Тем самым, твердо установлена справедливость подхода БФКЛ в ГЛП. В СГЛП доказательство мультиреджевской формы амплитуды также практически завершено. Общая схема этого доказательства сформулирована в работе [7]. Проверка гипотезы о мультиреджевской форме амплитуды основывается на бутстрапном подходе: утверждение гипотезы эквивалентно выполнению так называемых *соотношений* бутстрапа — условий совместимости реджевской формы амплитуды с s-канальной унитарностью, справедливость которых гарантирует правильный реджевский вид последовательно во всех порядках теории возмущений [8]. Соотношения бутстрапа представляют собой бесконечное число уравнений, связывающих различные s-канальные скачки амплитуды многочастичного рождения с ее производными по быстротам. С другой стороны, все амплитуды выражены в терминах глюонной траектории и конечного числа эффективных реджеонных вершин, поэтому факт выполнения бесконечного числа соотношений бутстрапа представляется весьма нетривиальным. Тем не менее, оказывается, что все они могут быть удовлетворены, если только вершины и траектория подчиняются нескольким нелинейным *условиям* бутстрапа. К настоящему времени все эти условия сформулированы [8–11] и выполнение всех, кроме одного, полностью доказано [7,12,13]. Выполнение последнего условия — на неупругую амплитуду рождения одного глюона в мультиреджевской кинематике (МРК) — [11] также было явно проверено [5] в фермионном секторе.

Главными составляющими данного условия бутстрапа являются импакт-фактор перехода реджеона в глюон, а также матричный элемент оператора рождения глюона — здесь и далее мы пользуемся терминологией и определениями, введенными в работе [7]. Импакт-фактор определяется как свободная от больших логарифмов часть $s_2 = (p_{B'} + k)^2$-канального скачка амплитуды рождения глюона $G(k)$ в неупругом процессе $A + B \to A' + G(k) + B'$ [11]. Вместе с аналогичным объектом, возникающим от $s = (p_A + p_B)^2$-канального скачка той же амплитуды и определяющим матричный элемент оператора рождения глюона, импакт-фактор входит в неупругое условие бутстрапа, представляющее собой условие совместимости реджевской формы амплитуды $2 \to 3$ и соотношения унитарности. Вычисление обеих составляющих условия бутстрапа позволяет завершить его проверку [14] и, тем самым, сделать заключительный шаг в доказательстве мультиреджевской формы амплитуды КХД с глюонным обменом в рамках СГЛП. Нахождение импакт-фактора является необходимым и наиболее сложным этапом этой задачи.

Конечным результатом данной работы является явное аналитическое выражение для импакт-фактора в случае произвольного цветового представления в t-канале. В работе представлены все необходимые промежуточные результаты, позволяющие проследить вычисление импакт-фактора и проверить его правильность.

2 Определения и обозначения

В основных определениях и обозначениях мы следуем [7] и [5]. В работе мы используем светоконусное разложение импульсов: $k = k^+ n_1 + k^- n_2 + k_\perp$, где $k^+ = (k, n_2)$, $k^- = (k, n_1)$ и $n_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0_\perp; \pm 1)$ – светоконусные векторы, а индекс $\perp$ обозначает компоненты, поперечные плоскости n_1, n_2.

2.1 Определение импакт-фактора рождения глюона в МРК

Ниже мы применяем развитый в [7] подход t-канального операторного формализма, в котором импакт-фактор $\langle GR_1|$ и собственная функция ядра БФКЛ $\langle R_\omega(q)|$ представлены бра-векторами, а явные аналитические выражения для них возникают как результат проектирования на вектор $|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$, описывающий t-канальное состояние двух реджеонов $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. При вычислении матричных элементов мы используем нормировку t-канального скалярного произведения, введенную в [7].

Стоит обратить внимание, что в работе [7], посвященной общей схеме доказательства глюонной реджезации в СГЛП, в определении импакт-фактора была допущена неточность, устраненная в [5]. Итак, корректное определение выглядит следующим образом:

$$\langle GR_1| = \langle GR_1|_s - \langle GR_1|_u\,, \quad \langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_u = \langle GR_1|\mathcal{G}_2\mathcal{G}_1\rangle_s\ , \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\langle GR_1|_s \ &= \ \langle GR_1|_s^\Delta - \langle GR_1|_s^B\Big(\big(\omega(q_1)-\omega(\hat{r}_1)\big)\ln\left|\frac{k_\perp}{(q_1-\hat{r}_1)_\perp}\right| \\ &\quad -\omega(\hat{r}_2)\ln\left|\frac{k_\perp}{\hat{r}_{2\perp}}\right| + \widehat{\mathcal{K}}_r^B\Delta\Big).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Импакт-фактор $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ явно антисимметричен при замене $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$ (данная запись подразумевает замену как импульсов реджеонов, так и их цветовых индексов). Графическое представление импакт-фактора рождения глюона приведено на рис. 1. Здесь $k = q_1 - r_1 - r_2$ — импульс рожденного глюона G; q_1 — импульс реджеона R_1 в канале t_1. В канале t_2 имеется два реджеона $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ с импульсами $r_{1\perp}$ и $r_{2\perp}$ соответственно. Цветовые индексы частиц мы далее будем обозначать теми же символами, что и сами частицы.

Слагаемые с логарифмами в (2.2) мы будем называть вкладом редже-факторов. Это название связано с их происхождением от разложения по g редже-факторов мультиреджевской амплитуды, со скачком которой связан импакт-фактор [11]. Эти вклады представлены на рис. 1c: при этом функция $\mathcal{R}(q_1;r_1,r_2) = \frac{1}{2}\Big\{\omega(r_2)\ln\left[\frac{k_\perp^2}{r_{2\perp}^2}\right] - \Big(\omega(q_1)-\omega(r_1)\Big)\ln\left[\frac{k_\perp^2}{(q_1-r_1)_\perp^2}\right]\Big\}$.

В проекции $\langle GR_1|_s$ на двухреджеонное состояние $|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$, по определе-

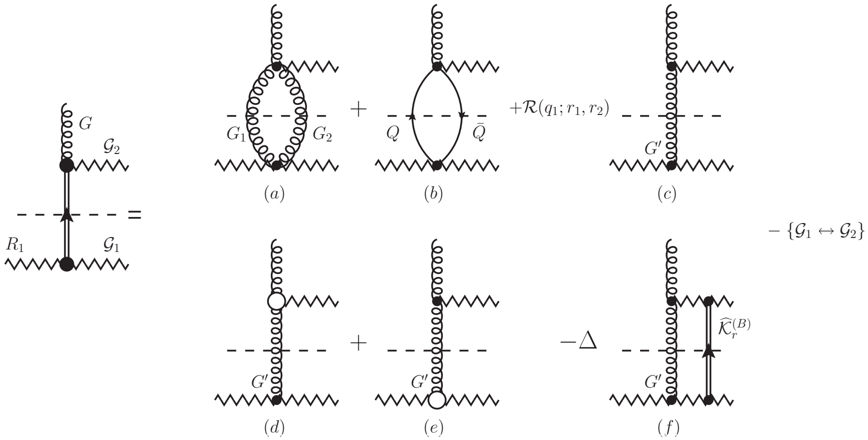

Рис. 1. Схематическое представление импакт-фактора в следующем за борновским приближении. Здесь с учетом антисимметризации $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$: (a) – борновский импакт-фактор: $J = G'$; (b) – вклад реальных глюонных поправок $J = \{G_1, G_2\}$; (c) – вклад редже-факторов; (d) и (e) – вклады вершинных поправок: черные круги обозначают борновские вершины, а белые круги – виртуальные поправки к ним; (f) – вычитательный член (пропорционален регуляризатору Δ), в котором двойная линия со стрелкой обозначает вставку оператора $\widehat{\mathcal{K}}_r^B$. Пунктирная линия изображает массовую поверхность.

нию, имеем:

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_s^{\Delta} = \delta^{\perp}(q_1 - k - r_1 - r_2)\sum_J \int \gamma_{R_1\mathcal{G}_1}^{J}\Gamma_{GJ}^{\mathcal{G}_2} d\phi_J \prod_i \theta(\Delta - (z - z_i)). \tag{2.3}$$

Суммирование в (2.3) производится по всем дискретным квантовым числам промежуточной струи J. Быстрота каждой из частиц струи J обозначена как $z_i = \frac{1}{2}\ln\frac{l_i^+}{l_i^-}$, l_i — импульс частицы. Быстрота конечного глюона $G(k)$ — $z = \frac{1}{2}\ln\frac{k^+}{k^-}$. Заметим, что в мультиреджевской кинематике в центральной области быстрот $l^+ = k^+$, где l — полный импульс струи J.

В борновском приближении (рис. 1a) промежуточная струя J состоит только из одного глюона G', и импакт-фактор имеет следующий вид, вытекающий из определений (2.1) и (2.3) при подстановке явного вида борновских вершин (2.10) и (2.14):

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(B)} \equiv \delta^{\perp}(q_1-k-r_1-r_2)\sum_{G'}\left(\gamma^{G'(B)}_{R_1\mathcal{G}_1}\Gamma^{\mathcal{G}_2(B)}_{GG'}-\gamma^{G'(B)}_{R_1\mathcal{G}_2}\Gamma^{\mathcal{G}_1(B)}_{GG'}\right)=$$

$$=-2g^2\delta^{\perp}(q_1-k-r_1-r_2)e^*_{\perp\mu}(k)q^2_{1\perp}\Big[T^{G'}_{R_1\,\mathcal{G}_1}T^{G'}_{\mathcal{G}_2\,G}\Big(\frac{q^{\mu}_{1\perp}}{q^2_{1\perp}}-\frac{(q_1-r_1)^{\mu}_{\perp}}{(q_1-r_1)^2_{\perp}}\Big)-$$

$$-T^{G'}_{R_1\,\mathcal{G}_2}T^{G'}_{\mathcal{G}_1\,G}\Big(\frac{q^{\mu}_{1\perp}}{q^2_{1\perp}}-\frac{(q_1-r_2)^{\mu}_{\perp}}{(q_1-r_2)^2_{\perp}}\Big)\Big], \tag{2.4}$$

где $e^{\mu}(k)$ — вектор поляризации рожденного глюона G, g – неперенормированная константа связи (ниже мы также будем использовать обозначение $\bar{g}^2=\frac{g^2N_c\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}}$), а T^a — генераторы цветовой алгебры в присоединенном представлении.

В следующем за борновским порядке струя J может состоять либо из одного глюона, либо из двух. В первом случае мы должны учитывать в (2.3) виртуальные поправки к вершинам: это приводит к диаграммам рис. 1d–1e. Второй случай (рис. 1b) будем называть вкладом реальных поправок.

В (2.2) и (2.3) Δ — регуляризатор расходимости, возникающей при интегрировании по быстротам для вкладов реальных поправок (рис. 1b). Вычитательный член (рис. 1f) устраняет зависимость всего импакт-фактора от Δ.

В (2.2) оператор $\widehat{\mathcal{K}}^B_r$ определяется матричным элементом борновского вклада в "реальную" часть (ассоциируется с рождением реальных частиц) ядра БФКЛ:

$$\langle\mathcal{G}'_1\mathcal{G}'_2|\widehat{\mathcal{K}}^B_r|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle=\delta^{\perp}(r'_1+r'_2-r_1-r_2)\frac{1}{2(2\pi)^{D-1}}\sum_{G'}\gamma^{G'(B)}_{\mathcal{G}'_1\mathcal{G}_1}\gamma^{\mathcal{G}'_2\mathcal{G}_2(B)}_{G'}\,, \tag{2.5}$$

где вершина в кросс-канале $\gamma^{\mathcal{R}'\mathcal{R}}_{G}=\gamma^{G_-}_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}$ — выражается через (2.10), а индекс "–" у глюона G означает изменение знака импульса и комплексное сопряжение его вектора поляризации. Здесь и далее $D=4+2\epsilon$ — регуляризация по размерности пространства-времени. Подставляя явный вид борновской вершины (2.10), получим

$$\langle\mathcal{G}'_1\mathcal{G}'_2|\widehat{\mathcal{K}}^B_r|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle=\delta^{\perp}(r'_1+r'_2-r_1-r_2)\frac{2}{N_c}T^a_{\mathcal{G}'_1\mathcal{G}_1}T^a_{\mathcal{G}_2\mathcal{G}'_2}\mathcal{K}^{(B)}_r(r'_1,r_1;r_1+r_2)\,, \tag{2.6}$$

где N_c — число цветов.

$$\mathcal{K}^{(B)}_r(r'_1,r_1;r_1+r_2)=\frac{g^2N_c}{2(2\pi)^{D-1}}\left((r_1+r_2)^2_{\perp}-\frac{r'^2_{1\perp}r^2_{2\perp}+r'^2_{2\perp}r^2_{1\perp}}{(r_1-r'_1)^2_{\perp}}\right),$$

$$r_2' = r_1 + r_2 - r_1'. \tag{2.7}$$

Величина однопетлевой части траектории глюона в (2.2) обозначена за $\omega(q)$:

$$\omega(q) = -2\bar{g}^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln(-q^2) \right] . \tag{2.8}$$

2.2 Реджевские вершины

Для всех необходимых в наших вычислениях реджевских вершин мы используем светоконусную калибровку $(e, n_2) = 0$. В работе [5] были приведены со всеми необходимыми ссылками эффективные реджевские вершины, а также другие составляющие условия бутстрапа: глюонная траектория $\omega(q)$ и собственная функция $\langle R_\omega(q)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ октетного ядра БФКЛ.

Вершину $\gamma^G_{R_1R_2}$ рождения глюона G с импульсом $k = q_1 - q_2$ и вектором поляризации e при переходе реджеона R_1 с импульсом q_1 в реджеон R_2 с импульсом q_2 представим как

$$\gamma^G_{R_1R_2} = \gamma^{G(B)}_{R_1R_2} + \gamma^{G(C)}_{R_1R_2}. \tag{2.9}$$

При этом борновская вершина $\gamma^{G(B)}_{R_1R_2}$ (см. нижний блок диаграммы на рис. 1d.) в нашей светоконусной калибровке представляется в виде

$$\gamma^{G(B)}_{R_1R_2} = -2gT^G_{R_1R_2} e^*_{\perp\mu} q^2_{1\perp} \left(\frac{q^\mu_{1\perp}}{q^2_{1\perp}} - \frac{k^\mu_\perp}{k^2_\perp} \right) , \tag{2.10}$$

а в следующем за борновским приближении данная вершина приобретает поправки (см. нижний блок диаграммы на рис. 1e.)

$$\gamma^{G(C)}_{R_1R_2} = 2g\bar{g}^2 T^G_{R_1R_2} e^*_{\perp\mu} q^2_{1\perp} V^\mu_g(q_1, q_2) , \tag{2.11}$$

где $V^\mu_g(q_1, q_2)$ — функция вершинных поправок, введенная в [5]:

$$\begin{aligned} V^\mu_g(q_1,q_2) = &\left(\frac{k^\mu_\perp}{k^2_\perp} - \frac{q^\mu_{1\perp}}{q^2_{1\perp}} \right) \left(\frac{11}{6} \frac{q^2_{1\perp} + q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp} - q^2_{2\perp}} \ln \left[\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}} \right] - \frac{1}{2} \ln^2 \left[\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}} \right] - \right. \\ &\left. - \left| k^2_\perp \right|^\epsilon \left[\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\pi^2}{2} \right] + \frac{k^2_\perp}{3\left(q^2_{1\perp} - q^2_{2\perp}\right)^2} \left[q^2_{1\perp} + q^2_{2\perp} - \frac{2q^2_{1\perp}q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp} - q^2_{2\perp}} \ln \left[\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}} \right] \right] \right) - \\ &- \frac{k^\mu_\perp}{k^2_\perp} \left(\frac{11}{3} \frac{q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp} - q^2_{2\perp}} \ln \left[\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}} \right] + \frac{k^2_\perp}{6q^2_{1\perp}} - \frac{k^2_\perp \left(2k^2_\perp - q^2_{1\perp} - q^2_{2\perp} \right)}{6q^2_{1\perp}\left(q^2_{1\perp} - q^2_{2\perp}\right)^2} \times \right. \\ &\left. \times \left[q^2_{1\perp} + q^2_{2\perp} - \frac{2q^2_{1\perp}q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp} - q^2_{2\perp}} \ln \left[\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}} \right] \right] \right) . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Вершину перехода глюона G в глюон G' при рассеянии на реджеоне R также представим в виде суммы борновского вклада и вклада виртуальных поправок:

$$\Gamma^{R}_{G'G} = \Gamma^{R(B)}_{G'G} + \Gamma^{R(C)}_{G'G}. \tag{2.13}$$

В борновском приближении (см. верхний блок диаграммы на рис. 1e)

$$\Gamma^{R(B)}_{G'G} = -g\big(e^{'*}, e\big)_{\perp} T^{R}_{G'G}, \tag{2.14}$$

где e и e' — векторы поляризации глюонов G и G' соответственно. Поправки к этой вершине (см. верхний блок диаграммы на рис. 1d) имеют следующий вид:

$$\Gamma^{R(C)}_{G'G} = -\Gamma^{R(B)}_{G'G}\bar{g}^2|q_{\perp}^2|^{\epsilon}\left(\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{11}{6\epsilon} + \frac{67}{18} - \frac{5\pi^2}{6}\right) -$$

$$-\frac{g\bar{g}^2}{3}T^{R}_{G'G}\left((e_{\perp}^{'*}e_{\perp}) - 2\frac{(e_{\perp}^{'*}q_{\perp})(e_{\perp}q_{\perp})}{q_{\perp}^2}\right), \tag{2.15}$$

где q — импульс реджеона R.

Нам также будет необходима вершина $\Gamma^{R}_{G\{G_1G_2\}}$, получающаяся сопряжением из найденной в [15] вершины $\Gamma^{R}_{\{G_1G_2\}G}$. Представим ее следующим образом

$$\Gamma^{R}_{G\{G_1G_2\}} = 2g^2 e_{\perp}^{*\mu} e_{1\perp}^{\nu} e_{2\perp}^{\rho}\Big[T^{R}_{G_2G'}T^{G}_{G'G_1}\big(M_{\mu\nu\rho}(l_1, l_2, k_{\perp}; x_1) -$$

$$-M_{\mu\nu\rho}(l_1, l_2, l_{\perp}; x_1)\big) + T^{G}_{G_2G'}T^{R}_{G'G_1}\big(M_{\mu\rho\nu}(l_2, l_1, l_{\perp}; x_2) -$$

$$-M_{\mu\rho\nu}(l_2, l_1, l_{\perp}; x_2)\big)\Big], \tag{2.16}$$

где $l = l_1 + l_2$, а l_1, l_2 и k — импульсы глюонов G_1, G_2 и G соответственно, e_i – их векторы поляризации, и мы ввели обозначение $x_i = \frac{l_i^+}{(l_1+l_2)^+}$, $i = 1, 2$ для относительных продольных компонент импульсов глюонов G_i вдоль вектора n_1. Далее,

$$M^{\mu\nu\rho}(l_1, l_2, p_{\perp}; x_1) =$$

$$= \frac{x_1 x_2 g_{\perp}^{\nu\rho}(l_1 - x_1 p)_{\perp}^{\mu} - x_1 g_{\perp}^{\mu\nu}(l_1 - x_1 p)_{\perp}^{\rho} - x_2 g_{\perp}^{\mu\rho}(l_1 - x_1 p)_{\perp}^{\nu}}{(l_1 - x_1 p)_{\perp}^2}, \tag{2.17}$$

где здесь и далее $x_2 \equiv 1 - x_1$.

Ниже мы будем использовать очевидное свойство функции (2.17):

$$M^{\mu}{}_{\beta\alpha}(l_2,l_1,l;x_2) = -M^{\mu}{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2,l;x_1), \quad l = l_1 + l_2. \tag{2.18}$$

Вершине (2.16) отвечает верхний блок диаграммы на рис. 1b.

Калибровочно-инвариантная вершина рождения двух глюонов была получена в [16]. В светоконусной калибровке $(e_{1,2}, n_2) = 0$ она приобретает следующий вид:

$$\gamma^{\{G_1G_2\}}_{R_1R_2} = 4g^2 e^{*\alpha}_{1\perp} e^{*\beta}_{2\perp} \Bigg[T^{R_1}_{G_1G'} T^{R_2}_{G'G_2} b_{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1) +$$

$$+ T^{R_2}_{G_1G'} T^{R_1}_{G'G_2} b_{\beta\alpha}(q_1;l_2,l_1;x_2) \Bigg]. \tag{2.19}$$

Здесь $e_{1,2}$ — векторы поляризации рожденных глюонов G_1 и G_2, а $x_{1,2} = \frac{l^+_{1,2}}{l^+_1 + l^+_2}$. Функция

$$b^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1) = b^{\alpha\beta}_{\Lambda}(q_1;l_1,l_2;x_1) + b^{\alpha\beta}_{\sigma}(q_1;l_1,l_2;x_1) + b^{\alpha\beta}_{\tau}(q_1;l_1,l_2;x_1), \tag{2.20}$$

где мы провели разбиение по типам знаменателей:

$$\begin{aligned}
&b^{\alpha\beta}_{\Lambda}(q_1;l_1,l_2;x_1) = -g^{\alpha\beta}_{\perp}\frac{x_1x_2(q_1,\Lambda)_\perp}{\Lambda^2_\perp} + g^{\alpha\beta}_{\perp}\frac{x_1x_2q^2_{1\perp}\big(\Lambda, x_2l_1 + x_1l_2\big)_\perp}{2\Lambda^2_\perp\sigma} + \\
&+\frac{x_1q^\alpha_{1\perp}\Lambda^\beta_\perp + x_2\Lambda^\alpha_\perp q^\beta_{1\perp}}{\Lambda^2_\perp} - \frac{x_1x_2q^2_{1\perp}\big(\Lambda^\alpha_\perp l^\beta_{2\perp} + l^\alpha_{1\perp}\Lambda^\beta_\perp\big)}{\Lambda^2_\perp\sigma}; \\
&b^{\alpha\beta}_{\sigma}(q_1;l_1,l_2;x_1) = \frac{x_1q^2_{1\perp}l^\alpha_{1\perp}l^\beta_{2\perp}}{l^2_{1\perp}\sigma}; \\
&b^{\alpha\beta}_{\tau}(q_1;l_1,l_2;x_1) = -g^{\alpha\beta}_{\perp}\frac{x_1x_2\big(q^2_{1\perp} - 2(q_1,l_1)_\perp\big)}{2\tau} - \\
&-\frac{x_2l^\alpha_{1\perp}q^\beta_{1\perp} - x_1q^\alpha_{1\perp}(q_1-l_1)^\beta_\perp}{\tau} - \frac{x_1q^2_{1\perp}l^\alpha_{1\perp}(q_1-l_1)^\beta_\perp}{l^2_{1\perp}\tau},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

причем мы обозначили знаменатели как $\sigma = x_1l^2_{2\perp} + x_2l^2_{1\perp}$, $\tau = x_1(q_1 - l_1)^2_\perp + x_2l^2_{1\perp}$, а также ввели вектор $\Lambda^\mu_\perp = \big(x_2l_1 - x_1l_2\big)^\mu_\perp$. Заметим для дальнейших ссылок, что

$$b^{\alpha\beta}_{\Lambda}(q_1;l_1,l_2;x_1) = -b^{\beta\alpha}_{\Lambda}(q_1;l_2,l_1;x_2). \tag{2.22}$$

Вершине (2.19) отвечает нижний блок диаграммы на рис. 1b.

2.3 Цветовые структуры

Следуя [14], мы выбираем следующий базис цветовых структур:

$$\mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2}T^{G}T^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]\,,\ \frac{N_c}{2}T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_1}T^{G'}_{\mathcal{G}_2G}\,,\ \frac{N_c}{2}T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_2}T^{G'}_{\mathcal{G}_1G}. \tag{2.23}$$

Первая цветовая структура симметрична относительно перестановки $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$. Вторая и третья структуры, далее называемые древесными, выбраны такими же, как для вкладов борновского приближения. Выбор в качестве цветового базиса (2.23) удобен тем, что виртуальные поправки к вершинам возникают только для древесных структур, а в силу общей антисимметрии импакт-фактора относительно замены $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$ вклады симметричной цветовой структуры антисимметричны по замене $r_1 \leftrightarrow r_2$ импульсов реджеонов, что существенно облегчает их вычисления.

Ниже мы будем использовать обозначение для общего коэффициента

$$\mathcal{N}_\mu = \delta^\perp(q_1 - k - r_1 - r_2)q_{1\perp}^2\frac{4}{N_c}g^2\bar{g}^2e^*_{\perp\mu}(k). \tag{2.24}$$

3 Общая методика вычисления импакт-фактора

Представим импакт-фактор рождения глюона в следующем за борновским приближении (2.2) в виде суммы структурных частей:

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle = \langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(B)} + \langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(v)} + \langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(r)}. \tag{3.1}$$

В (3.1) величина $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(B)}$ означает борновский импакт-фактор (2.4), $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(v)}$ определяется вкладом в импакт-фактор виртуальных вершинных поправок и редже-факторов и дается выражением (3.3); наконец, $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(r)}$ — наиболее сложная часть, связанная с реальными поправками от двухглюонного промежуточного состояния струи J (3.4). В следующем за борновским приближении существенен только вклад от двухглюонных реальных поправок.

3.1 Вклад $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(v)}$ вершинных поправок и редже-факторов

Величиной $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(v)}$ представлена часть импакт-фактора, содержащая вклады редже-факторов (рис. 1c) и вершинных поправок (рис. 1d, 1e).

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(v)} \equiv \delta^{\perp}(q_1-k-r_1-r_2)\sum_{G'}\Bigg[\gamma^{G'(B)}_{R_1\mathcal{G}_1}\Gamma^{\mathcal{G}_2(B)}_{GG'}\mathcal{R}(q_1;r_1,r_2)+$$

$$+\gamma^{G'(C)}_{R_1\mathcal{G}_1}\Gamma^{\mathcal{G}_2(B)}_{GG'}+\gamma^{G'(B)}_{R_1\mathcal{G}_1}\Gamma^{\mathcal{G}_2(C)}_{GG'}\Bigg]-\{\mathcal{G}_1\leftrightarrow\mathcal{G}_2\}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{R}(q_1;r_1,r_2)=\frac{1}{2}\Big\{\omega(r_2)\ln\Big[\frac{k_\perp^2}{r_{2\perp}^2}\Big]-\Big(\omega(q_1)-\omega(r_1)\Big)\ln\Big[\frac{k_\perp^2}{(q_1-r_1)_\perp^2}\Big]\Big\}.$$

Членами с множителем $\mathcal{R}(q_1;r_1,r_2)$ в (3.3) представлен вклад, который мы называем вкладом редже-факторов: см. рис. 1с. Используя введенные выше вершины (2.9)–(2.15), а также принимая во внимание явный вид (2.8) однопетлевой глюонной траектории, нетрудно чисто алгебраическими преобразованиями получить следующее явное выражение

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(v)}=\mathcal{N}_\mu\frac{N_c}{2}T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_1}T^{G'}_{\mathcal{G}_2G}\Bigg\{\frac{2r^\mu_{2\perp}}{3r^2_{2\perp}}\Big(\frac{(q_1,r_2)_\perp}{q^2_{1\perp}}-\frac{(q_1-r_1,r_2)_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp}\Big)+$$

$$+\frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{6(q^2_{1\perp}-r^2_{1\perp})^2}\Big(-q^2_{1\perp}+2(q_1-r_1)^2_\perp-r^2_{1\perp}\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{q^2_{1\perp}+r^2_{1\perp}}{q^2_{1\perp}}-\frac{2r^2_{1\perp}}{q^2_{1\perp}-r^2_{1\perp}}\ln\Big[\frac{q^2_{1\perp}}{r^2_{1\perp}}\Big]\Big)-\frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{6q^2_{1\perp}}-$$

$$-\frac{11}{3}\frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp}\frac{r^2_{1\perp}}{q^2_{1\perp}-r^2_{1\perp}}\ln\Big[\frac{q^2_{1\perp}}{r^2_{1\perp}}\Big]+\Big(\frac{q^\mu_{1\perp}}{q^2_{1\perp}}-\frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp}\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{3}{\epsilon^2}-\frac{11}{6\epsilon}+\frac{\ln[-(q_1-r_1)^2_\perp]}{\epsilon}+\frac{2}{\epsilon}\ln[-r^2_{2\perp}]+\ln^2[-r^2_{2\perp}]-\frac{11}{6}\ln[-r^2_{2\perp}]+$$

$$+\frac{\ln^2[-(q_1-r_1)^2_\perp]}{2}+\frac{1}{2}\ln^2\Big[\frac{q^2_{1\perp}}{r^2_{1\perp}}\Big]-\frac{11}{6}\frac{q^2_{1\perp}+r^2_{1\perp}}{q^2_{1\perp}-r^2_{1\perp}}\ln\Big[\frac{q^2_{1\perp}}{r^2_{1\perp}}\Big]-$$

$$-\frac{4\pi^2}{3}+\frac{61}{18}+\frac{2q^2_{1\perp}r^2_{1\perp}(q_1-r_1)^2_\perp}{3(q^2_{1\perp}-r^2_{1\perp})^3}\ln\Big[\frac{q^2_{1\perp}}{r^2_{1\perp}}\Big]-$$

$$-\frac{(q_1-r_1)^2_\perp(q^2_{1\perp}+r^2_{1\perp})}{3(q^2_{1\perp}-r^2_{1\perp})^2}+\frac{1}{\epsilon}\ln\Big[\frac{k^2_\perp}{r^2_{2\perp}}\Big]-\ln\Big[\frac{q^2_{1\perp}}{r^2_{1\perp}}\Big]\ln\Big[\frac{k^2_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp}\Big]+$$

$$+\ln\Big[\frac{k^2_\perp}{r^2_{2\perp}}\Big]\ln[-r^2_{2\perp}]\Big)\Bigg\}-\mathcal{N}_\mu\frac{N_c}{2}T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_2}T^{G'}_{\mathcal{G}_1G}\Big\{r_1\leftrightarrow r_2\Big\}. \tag{3.3}$$

3.2 Вклад $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(r)}$ реальных поправок

Рассмотрим теперь $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(r)}$ — вклад в импакт-фактор за счет механизма рождения двух реальных промежуточных глюонов в струе J: диаграммы на рис. 1b (собственно вклад реальной поправки) и рис. 1f (вычитательный член).

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(r)} = \delta^{\perp}(q_1 - k - r_1 - r_2) \sum_{G_1\, G_2} \int \Big[\gamma_{R_1\mathcal{G}_1}^{\{G_1\, G_2\}}\Gamma_{G\{G_1\, G_2\}}^{\mathcal{G}_2} - \tag{3.4}$$

$$-\gamma_{R_1\mathcal{G}_2}^{\{G_1\, G_2\}}\Gamma_{G\{G_1\, G_2\}}^{\mathcal{G}_1}\Big]\, d\phi_{\{G_1\, G_2\}} \prod_{i=1,2} \theta\Big(\Delta - (z - z_i)\Big) - \Delta\langle GR_1|\hat{\mathcal{K}}_r^B|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^B .$$

Импульсы частиц промежуточного состояния, состоящего из двух глюонов, обозначим как l_1, l_2:

$$l_i = l_i^+ n_1 + l_i^- n_2 + l_{i\perp}, \;\; l_i^- = -\frac{l_{i\perp}^2}{2l_i^+}, \;\; z_i = \frac{1}{2}\ln\frac{l_i^+}{l_i^-}. \tag{3.5}$$

Как и прежде, быстрота рожденного глюона $G(k)$ обозначена как $z = \frac{1}{2}\ln\frac{k^+}{k^-}$.

Для промежуточного состояния из двух глюонов интегрирование в (3.4) проводится с мерой

$$d\phi_{\{G_1\, G_2\}} = \frac{1}{2} d^{D-2}l_{1\perp} d^{D-2}l_{2\perp} \frac{\delta^{\perp}(l - l_1 - l_2)}{(2\pi)^{D-1}} \frac{dx_1 dx_2}{2x_1x_2}\delta(1 - x_1 - x_2)\;, \tag{3.6}$$

где полный поперечный импульс промежуточного состояния $l_\perp = q_{1\perp} - r_{1\perp}$ для первого произведения вершин $\gamma_{R_1\mathcal{G}_1}^{\{G_1\, G_2\}}\Gamma_{G\{G_1\, G_2\}}^{\mathcal{G}_2}$ в (3.4) и $l_\perp = q_{1\perp} - r_{2\perp}$ — для второго. Коэффициент $\frac{1}{2}$ в (3.6) учитывает тождественность глюонов. Ограничения на область интегрирования, налагаемые θ-функциями в (3.4), переписываются в виде

$$x_i \geq \sqrt{\frac{l_{i\perp}^2}{k_\perp^2} e^{-\Delta}}\;. \tag{3.7}$$

Роль вычитательного слагаемого, представленного последним членом в (3.4), — сократить промежуточный регуляризатор Δ расходимости при интегрировании по x_1. Ниже мы продемонстрируем, как в общем виде происходит это сокращение.

Подстановка в определение (3.4) явного вида вершин $\gamma^{\{G_1\, G_2\}}_{R_1 \mathcal{G}_{1,2}}$ и $\Gamma^{\mathcal{G}_{2,1}}_{G\{G_1\, G_2\}}$ из (2.19) и (2.16) естественным образом приводит к следующим трем цветовым структурам, которые мы выражаем через базисные:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^{G} T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}]\,, \\
&\mathrm{Tr}[T^{G} T^{\mathcal{G}_2} T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] = \mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^{G} T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] + \frac{N_c}{2} T^{G'}_{R_1 \mathcal{G}_1} T^{G'}_{\mathcal{G}_2 G}\,, \\
&\mathrm{Tr}[T^{G} T^{\mathcal{G}_1} T^{\mathcal{G}_2} T^{R_1}] = \mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^{G} T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] + \frac{N_c}{2} T^{G'}_{R_1 \mathcal{G}_2} T^{G'}_{\mathcal{G}_1 G}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

До проведения преобразований (3.19) нам будет удобно работать с этими структурами. После суммирования по поляризациям промежуточных глюонов $G_{1,2}$

$$
\sum_{pol\, G_i} (e^*_{i\perp})^{\alpha} (e_{i\perp})^{\alpha'} = -g_{\perp}^{\alpha\alpha'}
\tag{3.9}
$$

мы получаем коэффициентами при них свертки величин (2.22) и (2.17) следующего вида. Для структуры $\mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^{G} T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}]$ это сумма

$$
\begin{aligned}
&b^{\alpha\beta}(q_1; l_1, l_2; x_1)\Big[M^{\mu}{}_{\beta\alpha}(l_2, l_1, k_\perp; x_2) - \\
&- M^{\mu}{}_{\beta\alpha}(l_2, l_1, l_\perp; x_2)\Big]\Bigg|_{l = l_1 + l_2 = q_1 - r_1} - \Big(r_1 \to r_2\Big)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&b^{\beta\alpha}(q_1; l_2, l_1; x_2)\Big[M^{\mu}{}_{\alpha\beta}(l_1, l_2, k_\perp; x_1) - \\
&- M^{\mu}{}_{\alpha\beta}(l_1, l_2, l_\perp; x_1)\Big]\Bigg|_{l = l_1 + l_2 = q_1 - r_1} - \Big(r_1 \to r_2\Big)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Для цветовой структуры $\mathrm{Tr}[T^{G} T^{\mathcal{G}_2} T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}]$ это сумма сверток

$$
b^{\alpha\beta}(q_1; l_1, l_2; x_1)\Big[M^{\mu}{}_{\alpha\beta}(l_1, l_2, k_\perp; x_1) - M^{\mu}{}_{\alpha\beta}(l_1, l_2, l_\perp; x_1)\Big]
\tag{3.12}
$$

и

$$
b^{\beta\alpha}(q_1; l_2, l_1; x_2)\Big[M^{\mu}{}_{\beta\alpha}(l_2, l_1, k_\perp; x_2) - M^{\mu}{}_{\beta\alpha}(l_2, l_1, l_\perp; x_2)\Big],
\tag{3.13}
$$

где и в (3.12), и в (3.13) $l = l_1 + l_2 = q_1 - r_1$.

Принимая во внимание симметрию меры интегрирования (3.6) и произведения θ-функций в (3.4), проведем замену $l_1 \leftrightarrow l_2$, во вкладах со свертками (3.11) и (3.13), после чего эти вклады переходят соответственно в (3.10) и (3.12). Для последних же при интегрировании по x_1 больше нет расходимости при $x_1 = 0$. А для (3.10) расходимость по x_1 отсутствует также и в точке $x_1 = 1$. В каждом случае факт отсутствия данных инфракрасных расходимостей можно также проследить на уровне диаграмм Фейнмана. Таким образом, вычитательный член $-\Delta\langle GR_1|\hat{\mathcal{K}}_r^B|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^B$ в (3.4) оказывается важен только для второй и третьей цветовых структур (3.8), в чем можно убедиться явно из (2.4) и выражения для "реальной" части ядра БФКЛ (2.7).

Следующим шагом является разбиение области интегрирования по x_1 на две части:

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(r)} = \frac{\delta^\perp(q_1-k-r_1-r_2)}{4}\int\frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}}\int\limits_0^{1-e^{-\Delta}\sqrt{\frac{l_{2\perp}^2}{k_\perp^2}}}\frac{dx_1}{x_1x_2}\Big[\dots\Big] - \tag{3.14}$$

$$-\Delta\langle GR_1|\hat{\mathcal{K}}_r^B|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^B = \frac{\delta^\perp(q_1-k-r_1-r_2)}{4}\int\frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}}\int\limits_0^{1-e^{-\Delta}}\frac{dx_1}{x_1x_2}\Big[\dots\Big] -$$

$$-\Delta\langle GR_1|\hat{\mathcal{K}}_r^B|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^B + \frac{\delta^\perp(q_1-k-r_1-r_2)}{4}\int\frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}}\int\limits_{1-e^{-\Delta}}^{1-e^{-\Delta}\sqrt{\frac{l_{2\perp}^2}{k_\perp^2}}}\frac{dx_1}{x_1x_2}\Big[\dots\Big].$$

В (3.14) за $[\dots]$ обозначены просуммированные по поляризациям и цветам глюонов G_1 и G_2 вклады в квадратных скобках из (3.4) после описанных выше преобразований (при которых теперь отсутствует расходимость при $x_1 = 0$). После "снятия" дельта-функций здесь остается интегрирование по поперечному импульсу $l_{1\perp}$ ($l_{2\perp} = l_\perp - l_{1\perp}$) и по продольной переменной x_1. Теперь можно избавиться от Δ, переходя к пределу $\Delta \to +\infty$:

$$\lim_{\Delta\to+\infty}\left(\frac{\delta^{\perp}(q_1-k-r_1-r_2)}{4}\int\frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}}\int\limits_0^{1-e^{-\Delta}}\frac{dx_1}{x_1(1-x_1)}\Big[\dots\Big]-\right. \tag{3.15}$$

$$\left.-\Delta\langle GR_1|\hat{\mathcal{K}}_r^B|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^B\right)=\frac{\delta^{\perp}(q_1-k-r_1-r_2)}{4}\int\frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}}\int\limits_0^{1}\frac{dx_1}{x_1(1-x_1)_+}\Big[\dots\Big],$$

где использовано обозначение:

$$\int_0^1\frac{dx_1}{(1-x_1)_+}f(x_1)=\int_0^1 dx_1\frac{f(x_1)-f(1)}{1-x_1}. \tag{3.16}$$

Заметим, что устранить Δ можно, даже не прибегая к явному виду частей формулы (3.15). В действительности, соотношение (3.15) является следствием свойства факторизации для эффективных вершин, входящих в (3.4). Когда для промежуточных глюонов компоненты x_1 или x_2 близки к единице, вершины $\gamma_{R_1\mathcal{G}_1}^{\{G_1\,G_2\}}$ и $\Gamma_{G\{G_1\,G_2\}}^{\mathcal{G}_2}$ факторизуются на произведения двух вершин типа (2.10) в первом случае и типа (2.10) и (2.14) во втором: см. [17], формулы (12) и (13). Принимая также во внимание факторизованную форму (2.5) для "реальной" части ядра БФКЛ, получаем

$$\frac{(4\pi)^{D/2}\mathcal{N}_\mu\mathrm{Tr}[T^GT^{\mathcal{G}_2}T^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]}{q_{1\perp}^2\Gamma(1-\epsilon)}\left\{\int\frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}}\Big[M^{\mu}{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2,k_\perp;x_1)-\right.$$

$$\left.\left.-M^{\mu}{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2,l_\perp;x_1)\Big]b^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)\right\}\right|_{x_1=1;\;l=q_1-r_1}-\Big\{\mathcal{G}_1\leftrightarrow\mathcal{G}_2\Big\}=$$

$$=\langle GR_1|\hat{\mathcal{K}}_r^B|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^B. \tag{3.17}$$

После этого замечания сокращение Δ становится очевидным. Графически в области интегрирования по x_1 вблизи единицы (или нуля) происходит переход от квазимультиреджевской кинематики диаграммы рис. 1b к мультиреджевской кинематике диаграммы рис. 1f.

В последнем интеграле в правой части (3.14) также можно перейти к пределу $\Delta\to+\infty$: всюду, кроме знаменателя $1-x_1$, положить $x_1=1$. Это приводит к наиболее сложным, с точки зрения дальнейшего интегрирования по импульсам, слагаемым с логарифмом $\ln\left[\frac{l_{2\perp}^2}{k_\perp^2}\right]$ во вкладах цветовых структур $\mathrm{Tr}[T^GT^{\mathcal{G}_2}T^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]$ и $\mathrm{Tr}[T^GT^{\mathcal{G}_1}T^{\mathcal{G}_2}T^{R_1}]$: см. (3.18).

Получаем следующее представление для реальных поправок импакт-фактора:

$$
\begin{aligned}
&\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(r)} = 4g^4 e^*_{\perp\mu}\delta^{\perp}(q_1-k-r_1-r_2)\int\frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}}\Bigg[\mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2}T^{G}T^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]\times\\
&\times\Bigg\{\int_0^1\frac{dx_1}{x_1(1-x_1)_+}b^{\alpha\beta}(q_1;l_1,q_1-r_1-l_1;x_1)\Big[M^{\mu}{}_{\beta\alpha}(q_1-r_1-l_1,l_1,k_\perp;x_2)-\\
&-M^{\mu}{}_{\beta\alpha}(q_1-r_1-l_1,l_1,q_{1\perp}-r_{1\perp};x_2)\Big]-\{r_1\leftrightarrow r_2\}\Bigg\}+\mathrm{Tr}[T^{G}T^{\mathcal{G}_2}T^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]\times\\
&\times\Bigg\{\int_0^1\frac{dx_1}{x_1(1-x_1)_+}b^{\alpha\beta}(q_1;l_1,q_1-r_1-l_1;x_1)\Big[M^{\mu}{}_{\alpha\beta}(l_1,q_1-r_1-l_1,k_\perp;x_1)-\\
&-M^{\mu}{}_{\alpha\beta}(l_1,q_1-r_1-l_1,q_{1\perp}-r_{1\perp};x_1)\Big]-\frac{q_{1\perp}^2}{4}\ln\left[\frac{(q_1-r_1-l_1)_\perp^2}{k_\perp^2}\right]\times\\
&\times\Big(\frac{q^{\mu}_{1\perp}}{q_{1\perp}^2}-\frac{l^{\mu}_{1\perp}}{l_{1\perp}^2}\Big)\Big[\frac{1}{(q_1-r_1-l_1)_\perp^2}\Big(\frac{r_{1\perp}^2}{(q_1-l_1)_\perp^2}+\frac{r_{2\perp}^2}{(k-l_1)_\perp^2}\Big)-\\
&-\frac{(q_1-k)_\perp^2}{(q_1-l_1)_\perp^2(k-l_1)_\perp^2}\Big]\Bigg\}-\mathrm{Tr}[T^{G}T^{\mathcal{G}_1}T^{\mathcal{G}_2}T^{R_1}]\Bigg\{r_1\leftrightarrow r_2\Bigg\}\Bigg]. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

В следующем за борновским приближении импакт-фактор как нелогарифмическая часть скачка амплитуды определен неоднозначно (относительно изменения нормировки аргумента большого логарифма). Эта неоднозначность не меняет выражение для полного скачка амплитуды, и следовательно, не влияет на вывод условия бутстрапа. Введем оператор $\widehat{\mathcal{U}}_k \sim g^2$, который модифицирует импакт-фактор следующим образом:

$$
\langle GR_1|_* = \langle GR_1|(1-\widehat{\mathcal{U}}_k)\,. \qquad (3.19)
$$

Так же (умножением справа на оператор $1-\widehat{\mathcal{U}}_k$) изменяется все условие бутстрапа [14], которое при этом может существенно упроститься, поскольку удачный выбор оператора $\widehat{\mathcal{U}}_k$ позволяет устранить наиболее сложные вклады как в импакт-факторе, так и в матричном элементе оператора рождения глюона. Это можно сделать, взяв оператор со следующими матричными элементами:

$$\langle \mathcal{G}_1'\mathcal{G}_2'|\widehat{\mathcal{U}}_k|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle = g^2\delta^{\perp}(r_1'+r_2'-r_1-r_2)T^a_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}T^a_{\mathcal{G}_2\mathcal{G}_2'}\frac{r_{1\perp}^{'2}r_{2\perp}^{'2}}{(2\pi)^{D-1}}\times$$
$$\times\left(\frac{r_{1\perp}^{'\alpha}}{r_{1\perp}^{'2}}+\frac{(r_1-r_1')_{\perp}^{\alpha}}{(r_1-r_1')_{\perp}^2}\right)\left(\frac{r_{2\perp\alpha}^{'}}{r_{2\perp}^{'2}}+\frac{(r_2-r_2')_{\perp\alpha}}{(r_2-r_2')_{\perp}^2}\right)\ln\left[\frac{k_{\perp}^2}{(r_1'-r_1)_{\perp}^2}\right]= \quad (3.20)$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{k_{\perp}^2}{(r_1-r_1')_{\perp}^2}\right]\langle \mathcal{G}_1'\mathcal{G}_2'|\widehat{\mathcal{K}}_r^B|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle.$$

Заметим также для дальнейших ссылок, что преобразованная с помощью оператора $\widehat{\mathcal{U}}_k$ собственная функция октетного ядра БФКЛ имеет вид

$$\langle R_\omega(q_1)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_* \equiv \langle R_\omega(q_1)|(1-\widehat{\mathcal{U}}_k)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle =$$
$$=\delta^{\perp}(q_1-r_1-r_2)T^{R_1}_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}\left(1-\bar{g}^2R_k(r_1,r_2)\right), \quad (3.21)$$

где

$$R_k(r_1,r_2)=\frac{1}{\epsilon^2}+\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{11}{6}+\ln[-k_{\perp}^2]\right)+\left(\frac{11}{6}+\ln\left[\frac{k_{\perp}^2}{(r_1+r_2)_{\perp}^2}\right]\right)\times$$
$$\times\ln\left[\frac{r_{1\perp}^2r_{2\perp}^2}{-(r_1+r_2)_{\perp}^2}\right]-\frac{1}{2}\ln^2\left[\frac{r_{1\perp}^2}{(r_1+r_2)_{\perp}^2}\right]-\frac{1}{2}\ln^2\left[\frac{r_{2\perp}^2}{(r_1+r_2)_{\perp}^2}\right]+ \quad (3.22)$$
$$+\frac{1}{2}\ln^2[-(r_1+r_2)_{\perp}^2]-\frac{67}{18}+\mathcal{O}(\epsilon).$$

Из явного вида (3.20) можно установить, что преобразование (3.19), при котором мы переходим от $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ к $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_* \equiv \langle GR_1|(1-\widehat{\mathcal{U}}_k)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$, позволяет полностью устранить в (3.18) члены при второй и третьей цветовых структурах, пропорциональные $\ln\left[\frac{(q_1-r_1-l_1)_{\perp}^2}{k_{\perp}^2}\right]$ и $\ln\left[\frac{(q_1-r_2-l_1)_{\perp}^2}{k_{\perp}^2}\right]$ соответственно.

Теперь с помощью формул (3.8) перейдем к нашему цветовому базису (2.23), состоящему из симметричной и древесных цветовых структур, и рассмотрим подробно вычисление коэффициентов при этих структурах.

4 Импакт-фактор рождения глюона в МРК. Древесные цветовые структуры

Данный раздел посвящен вычислению реальных поправок для вкладов древесных цветовых структур (ниже они обозначаются индексом “tree”) в преобразованный импакт-фактор $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_*$:

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(r)}_{*tree} = \frac{\mathcal{N}_\mu}{q_{1\perp}^2} N_c T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_1} T^{G'}_{\mathcal{G}_2 G} \int_0^1 dx_1 \frac{1}{(x_1x_2)_+} \int \bar{d}l_1 b^{\alpha\beta}(q_1; l_1, l_2; x_1)\times$$
$$\times \Big[M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1, l_2; k_\perp; x_1) - M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1, l_2; l_\perp; x_1)\Big]\Bigg|_{l_1+l_2=l=q_1-r_1} - \Big\{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\Big\}. \tag{4.1}$$

Для краткости записи мы ввели обозначение для меры $\bar{d}l_1 = \dfrac{d^{D-2}l_1}{\pi^{1+\epsilon}\Gamma(1-\epsilon)}$, а также здесь и ниже в промежуточных выкладках мы полагаем $l = l_1 + l_2 = q_1 - r_1$.

Используя формулы раздела 7, проведем интегрирование по поперечным импульсам выражения

$$\int \bar{d}l_1 \frac{1}{(x_1x_2)_+} b^{\alpha\beta}(q_1; l_1, l_2; x_1)\Big[M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1, l_2; k_\perp; x_1) - M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1, l_2; l_\perp; x_1)\Big].$$

Разобьем это вычисление на части в соответствии с различными типами знаменателей $b^{\alpha\beta}(q_1; l_1, l_2; x_1)$ в представлении (2.22). В дальнейшем наибольшей трудностью при непосредственном применении формул раздела 7 является возникновение в результате интегрирования в разложении по ϵ сингулярных членов вида $\frac{1}{x_{1+}}\ln[x_1]$ (и $\frac{1}{x_{2+}}\ln[x_2]$). Присутствие таких членов означает, что необходимо выделять точно по ϵ вклады, приводящие к таким сингулярностям при $x_1 \to 0$ (либо $x_2 \to 0$). В каждой конкретной ситуации это нетрудно сделать, используя точные по ϵ формулы (7.1), (7.3), (7.5) и (7.8).

Результат вычисления наиболее сложного вклада, полученный с помощью формулы (7.9), ее частного случая (7.10), а также формулы (7.4). Для выделения сингулярных вкладов, в частности, используется точная формула (7.5):

$$
\frac{1}{(x_1x_2)_+}\int \bar{d}l_1 b_\tau^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)\big[M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2;k;x_1)-M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2;l;x_1)\big]=
$$

$$
=\frac{q_{1\perp}^2}{2}\Bigg\{\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2}\Bigg[2\Big(2-x_1x_2-\frac{x_2^2q_{1\perp}^2}{(q_1-l)_\perp^2}\Big)\ln\big[\frac{x_1(q_1-l)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2}{x_2q_{1\perp}^2}\big]-
$$

$$
-\frac{1}{x_2}\ln\big[\frac{x_1(q_1-l)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2}{(q_1-l)_\perp^2}\big]+\frac{x_2l_\perp^2-(q_1-l)_\perp^2}{(q_1-x_1l)_\perp^2}\ln\big[\frac{x_1(q_1-l)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2}{x_1x_2l_\perp^2}\big]-
$$

$$
-2\frac{(-x_1^2l_\perp^2)^\epsilon}{x_1}\Big(\frac{1}{\epsilon}-\epsilon\zeta_2\Big)\Bigg]+\frac{(q_1-l)_\perp^\mu}{(q_1-l)_\perp^2}\Bigg[-4x_1x_2\frac{\big(q_1,q_1-l\big)_\perp}{q_{1\perp}^2}+
$$

$$
+\Big(\frac{4x_2^2(q_1,q_1-l)_\perp}{(q_1-l)_\perp^2}+2x_2(x_1-x_2)\Big)\ln\big[\frac{x_1(q_1-l)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2}{x_2q_{1\perp}^2}\big]\Bigg]+
$$

$$
+\frac{l_\perp^\mu}{l_\perp^2}\Bigg[\frac{1}{x_2}\ln\big[\frac{x_1(q_1-l)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2}{(q_1-l)_\perp^2}\big]-
$$

$$
-\frac{x_2l_\perp^2}{(q_1-x_1l)_\perp^2}\ln\big[\frac{x_1(q_1-l)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2}{x_1x_2l_\perp^2}\big]\Bigg]\Bigg\}-\frac{q_{1\perp}^2}{2}\Bigg\{l\to k\Bigg\}. \tag{4.2}
$$

Здесь $\zeta_2=\frac{\pi^2}{6}$ — дзета-функция Римана.

Для получения следующего результата используем формулу (7.4) в приведенном "полуразложенном" по ϵ виде, формулу (7.7), точные формулы (7.1), (7.3) и (7.5):

$$
\int \bar{d}l_1 b_\sigma^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2;l;x_1)=\frac{q_{1\perp}^2l_\perp^\mu}{l_\perp^2}\Bigg\{-\frac{x_1}{2}\ln x_1+\frac{x_2}{2}\ln x_2+
$$

$$
+\frac{(-l_\perp^2)^\epsilon}{\epsilon}\Bigg(x_2\big(x_1^\epsilon-x_1^{2\epsilon}(1-\epsilon^2\zeta_2)\big)+x_1(x_2^\epsilon-1)\Bigg)\Bigg\}. \tag{4.3}
$$

$$
\frac{1}{(x_1x_2)_+}\int\bar{d}l_1 b_\sigma^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2;k;x_1)=q_{1\perp}^2\Bigg\{\frac{(k-l)_\perp^\mu}{2(k-l)_\perp^2}\Big(\frac{1}{x_1}-2\Big)\times
$$

$$
\times\ln\big[\frac{x_1(k-l)_\perp^2+x_2l_\perp^2}{x_2l_\perp^2}\big]+\frac{k_\perp^\mu}{2k_\perp^2}\frac{1}{x_2}\ln\big[\frac{x_1(k-l)_\perp^2+x_2l_\perp^2}{(k-l)_\perp^2}\big]-
$$

$$
-\frac{x_2k_\perp^\mu l_\perp^2+l_\perp^\mu\big((l-k)_\perp^2-x_2k_\perp^2\big)}{2l_\perp^2(l-x_1k)_\perp^2}\ln\big[\frac{x_1(k-l)_\perp^2+x_2l_\perp^2}{x_1x_2k_\perp^2}\big]+\frac{l_\perp^\mu}{2l_\perp^2}\Bigg[\frac{1}{x_1}\ln\frac{1}{x_2}+
$$

$$+\frac{1}{x_2}\ln\Big[\frac{x_1(k-l)_\perp^2+x_2l_\perp^2}{x_1(k-l)_\perp^2}\Big]+\frac{2}{x_1}\ln\Big[\frac{x_1(k-l)_\perp^2+x_2l_\perp^2}{l_\perp^2}\Big]-$$
$$-\frac{2}{x_1}(-x_1^2k_\perp^2)^\epsilon\Big(\frac{1}{\epsilon}-\epsilon\zeta_2\Big)+\frac{2}{x_1\epsilon}(-x_1l_\perp^2)^\epsilon\Big]\Big\}. \tag{4.4}$$

При интегрировании свертки $b_\Lambda^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2;k;x_1)$ для вкладов, происходящих от свертки первого и третьего слагаемых из представления (2.22) для $b_\Lambda^{\alpha\beta}$, мы непосредственно применяем формулы (7.3), (7.5) и (7.8). Для вкладов, происходящих от свертки второго и четвертого слагаемых из представления (2.22) для $b_\Lambda^{\alpha\beta}$, удобно сначала разделить знаменатели, используя простое соотношение

$$\frac{x_1x_2}{\Lambda_\perp^2[x_2l_{1\perp}^2+x_1l_{2\perp}^2]}=\frac{1}{(l_1+l_2)_\perp^2}\Big[\frac{1}{\Lambda_\perp^2}-\frac{1}{x_2l_{1\perp}^2+x_1l_{2\perp}^2}\Big]. \tag{4.5}$$

После чего мы применяем формулы (7.4), (7.5), а также (7.6) и частные ее случаи (7.7) и (7.8).

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x_1x_2)_+}\int \bar{d}l_1 b_\Lambda^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2;k;x_1)=\\
&=\frac{(k-l)_\perp^\mu}{(k-l)_\perp^2}\Big[-2x_1x_2(q_1,k-l)_\perp+\frac{q_{1\perp}^2}{2}\Big(2-2x_2(x_1-x_2)+\\
&+4x_2^2\frac{(l,k-l)_\perp}{(k-l)_\perp^2}-\frac{1}{x_1}\Big)\ln\Big[\frac{x_2l_\perp^2+x_1(k-l)_\perp^2}{x_2l_\perp^2}\Big]\Big]+\\
&+q_{1\perp}^\mu\Big[x_1x_2+(2-x_1x_2)\Big(\frac{1}{\epsilon}+\ln\big(-x_1^2(k-l)_\perp^2\big)\Big)-\\
&-\frac{1}{x_2}\ln x_1^2-\frac{1}{x_1}\big(-x_1^2(k-l)_\perp^2\big)^\epsilon\Big(\frac{1}{\epsilon}-\epsilon\zeta_2\Big)\Big]-\\
&-q_{1\perp}^2\frac{l_\perp^\mu}{l_\perp^2}\Big[(x_1x_2-2)\ln\Big[\frac{x_2l_\perp^2+x_1(k-l)_\perp^2}{x_1(k-l)_\perp^2}\Big]+\\
&+\frac{x_2^2l_\perp^2}{(k-l)_\perp^2}\ln\Big[\frac{x_2l_\perp^2+x_1(k-l)_\perp^2}{x_2l_\perp^2}\Big]+\frac{1}{x_2}\ln\Big[\frac{x_2l_\perp^2+x_1(k-l)_\perp^2}{x_1(k-l)_\perp^2}\Big]+\\
&+\frac{1}{x_1}\Big(\ln\Big[\frac{x_2l_\perp^2+x_1(k-l)_\perp^2}{l_\perp^2}\Big]-\big(-x_1^2(k-l)_\perp^2\big)^\epsilon\Big[\frac{1}{\epsilon}-\epsilon\zeta_2\Big]+\frac{1}{\epsilon}(-x_1l_\perp^2)^\epsilon\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Далее

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(x_1x_2)_+}\int \bar{d}l_1 b_\Lambda^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2;l;x_1) = \\
&= -q_{1\perp}^2\frac{l_\perp^\mu}{l_\perp^2}(-l_\perp^2)^\epsilon\frac{1}{\epsilon}\Big[(x_1x_2)^{\epsilon+1}+x_1^{\epsilon+1}x_2^{\epsilon-1}+x_1^{\epsilon-1}x_2^{\epsilon+1}\Big].
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

После проведения свертки по α и β здесь оказалось удобно перейти от переменной интегрирования $l_{1\perp}$ к переменной $\Lambda_\perp = (x_2l_1 - x_1l_2)_\perp = (l_1 - x_1l)_\perp$. После чего, опуская не дающие вклада в размерностной регуляризации интегралы, применяем вторую формулу (7.1) и приходим к (4.7).

Собирая все результаты вместе до интегрирования по x_1, получаем

$$
\begin{aligned}
&\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(r)}_{*tree} = \mathcal{N}_\mu\frac{N_c}{2}T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_1}T^{G'}_{\mathcal{G}_2G}\int_0^1 dx_1\Bigg\{\Bigg[\left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2}-\frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2}\right)\times\\
&\times\left(\frac{1}{x_2}\ln\frac{\big[x_1(q_1-k)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2\big]}{(q_1-k)_\perp^2}-\frac{x_2k_\perp^2}{(q_1-x_1k)_\perp^2}\ln\frac{\big[x_1(q_1-k)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2\big]}{x_1x_2k_\perp^2}\right)+\\
&+\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2}\Bigg(\frac{(q_1-k)_\perp^2}{(q_1-x_1k)_\perp^2}\ln\frac{\big[x_1(q_1-k)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2\big]}{x_1x_2k_\perp^2}-\\
&-2\left(2-x_1x_2-\frac{x_2q_{1\perp}^2}{(q_1-k)_\perp^2}\right)\ln\frac{\big[x_1(q_1-k)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2\big]}{x_2q_{1\perp}^2}\Bigg)-\\
&-\frac{(q_1-k)_\perp^\mu}{(q_1-k)_\perp^2}\left(\frac{4x_2^2(q_1,q_1-k)_\perp}{(q_1-k)_\perp^2}+2x_2(x_1-x_2)\right)\ln\frac{\big[x_1(q_1-k)_\perp^2+x_2q_{1\perp}^2\big]}{x_2q_{1\perp}^2}\Bigg]-\\
&-\big[k\to l\big]-\big[q_1\to l\big]+2\frac{l_\perp^\mu}{l_\perp^2}\left(\frac{(-l_\perp^2)^\epsilon}{\epsilon}\left((x_1x_2)^\epsilon\Big[x_1x_2+2\frac{x_1}{x_2}\Big]-2x_1^{\epsilon-1}\right)+\right.\\
&\left.+(2-x_1x_2)\ln\frac{x_2l_\perp^2}{x_1(l-k)_\perp^2}\right)+2\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2}\Bigg(x_1x_2+(2-x_1x_2)\times\\
&\times\left(\frac{1}{\epsilon}+\ln\big(-x_1^2(k-l)_\perp^2\big)\right)-2\frac{\ln x_1}{x_2}\Bigg)-2\left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2}-\frac{l_\perp^\mu}{l_\perp^2}\right)x_1^{2\epsilon-1}\Big[\big(-(k-l)_\perp^2\big)^\epsilon-\\
&-\big(-k_\perp^2\big)^\epsilon+\big(-l_\perp^2\big)^\epsilon\Big]\left(\frac{1}{\epsilon}-\epsilon\zeta_2\right)-\frac{4x_1x_2}{q_{1\perp}^2}\Bigg(\frac{(q_1,k-l)_\perp(k-l)_\perp^\mu}{(k-l)_\perp^2}+
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

$$+\frac{(q_1,q_1-l)_\perp (q_1-l)^\mu_\perp}{(q_1-l)^2_\perp} - \frac{(q_1,q_1-k)_\perp (q_1-k)^\mu_\perp}{(q_1-k)^2_\perp}\Big)\Bigg\} -$$
$$-\mathcal{N}_\mu \frac{N_c}{2} T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_2} T^{G'}_{\mathcal{G}_1 G} \int_0^1 dx_1 \Big\{ r_1 \leftrightarrow r_2 \Big\}.$$

Дальнейшее интегрирование (4.9) либо элементарно, либо приводит к функциям дилогарифмического типа: $\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^1 dy \frac{\ln[1-zy]}{y}$, а также типа

$$I(q_{1\perp},q_{2\perp}) = \int_0^1 \frac{dx}{(xq_1+(1-x)q_2)^2_\perp} \ln\Big[\frac{xq^2_{1\perp}+(1-x)q^2_{2\perp}}{x(1-x)(q_1-q_2)^2_\perp}\Big]. \tag{4.9}$$

Для $I(q_{1\perp},q_{2\perp})$ имеют место следующие соотношения симметрии (см. [12], Appendix B):

$$\begin{aligned} &I(q_{1\perp},q_{2\perp}) = I(q_{2\perp},q_{1\perp}) = I(q_{1\perp},q_{1\perp}-q_{2\perp}) = I(q_{2\perp}-q_{1\perp},q_{2\perp}) = \\ &= I(-q_{1\perp},q_{2\perp}-q_{1\perp}), \end{aligned} \tag{4.10}$$

которые мы используем для записи окончательного результата наряду со следующим простым соотношением:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dx \frac{(q_1-q_2,q_1-x(q_1-q_2))}{(q_1-x(q_1-q_2))^2} \ln\Big[\frac{xq_2^2+(1-x)q_1^2}{x(1-x)(q_1-q_2)^2}\Big] = \\ &= \mathrm{Li}_2\Big(1-\frac{q_2^2}{q_1^2}\Big) + \frac{1}{2}\ln\Big[\frac{q_2^2}{q_1^2}\Big]\ln\Big[\frac{(q_1-q_2)^2}{q_1^2}\Big]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Заметим, что все дилогарифмические функции, кроме типа (4.9), сокращаются между собой при интегрировании по x_1, если использовать известное соотношение

$$\mathrm{Li}_2(1-z) + \mathrm{Li}_2(1-\frac{1}{z}) = -\frac{1}{2}\ln^2[z]. \tag{4.12}$$

Используя обозначения $V_g^\mu(r_1,r_2)$ и $R_k(r_1,r_2)$, введенные выше в формулах (2.12) и (3.22) соответственно, а также применяя соотношения симметрии (4.10) для функций (4.9), приведем полный результат для реальных поправок вкладов древесных структур:

$$
\begin{aligned}
&\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(r)}_{*tree} = \mathcal{N}_\mu \frac{N_c}{2} T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_1} T^{G'}_{\mathcal{G}_2 G} \Bigg\{ \left(\frac{q^\mu_{1\perp}}{q^2_{1\perp}} - \frac{k^\mu_\perp}{k^2_\perp} \right) \Bigg(R_k(r_1, r_2) - \\
&- \frac{1}{2} \ln\Big[\frac{(q_1-k)^2_\perp}{q^2_{1\perp}} \Big] \ln\Big[\frac{(q_1-k)^2_\perp}{k^2_\perp} \Big] + \frac{1}{2} \ln\Big[\frac{q^2_{1\perp}}{r^2_{1\perp}} \Big] \ln\Big[\frac{(k^2_\perp)^2}{(q_1-r_1)^2_\perp r^2_{1\perp}} \Big] \Bigg) - \\
&- \left(\frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp} - \frac{k^\mu_\perp}{k^2_\perp} \right) \Bigg(R_k(r_1, q_1-r_1) - \frac{1}{2} \ln\Big[\frac{r^2_{2\perp}}{(q_1-r_1)^2_\perp} \Big] \ln\Big[\frac{r^2_{2\perp}}{k^2_\perp} \Big] + \\
&+ \frac{1}{2} \ln\Big[\frac{q^2_{1\perp}}{r^2_{1\perp}} \Big] \ln\Big[\frac{(k^2_\perp)^2}{(q_1-r_1)^2_\perp r^2_{1\perp}} \Big] \Bigg) + \left(\frac{q^\mu_{1\perp}}{q^2_{1\perp}} - \frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp} \right) \Bigg(-\frac{2}{\epsilon^2} + \\
&+ \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{11}{6} - \ln[k^2_\perp r^2_{2\perp}] \right) + \frac{11}{6} \ln[-r^2_{2\perp}] - \frac{61}{18} + \frac{5\pi^2}{6} - \ln[-r^2_{2\perp}] \ln[-k^2_\perp] \Bigg) - \\
&- \frac{2}{3} \frac{r^\mu_{2\perp}}{r^2_{2\perp}} \left(\frac{(q_1, r_2)_\perp}{q^2_{1\perp}} - \frac{(q_1-r_1, r_2)_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp} \right) + \Bigg(q^\mu_{1\perp} \frac{(q_1, q_1-k)_\perp}{q^2_{1\perp}} - \qquad (4.13) \\
&- k^\mu_\perp \frac{(k, q_1-k)_\perp}{k^2_\perp} \Bigg) I(q_{1\perp}, k_\perp) - \left((q_1-r_1)^\mu_\perp \frac{(q_1-r_1, r_2)_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp} - k^\mu_\perp \frac{(r_2, k)_\perp}{k^2_\perp} \right) \times \\
&I(q_{1\perp} - r_{1\perp}, k_\perp) - \left(q^\mu_{1\perp} \frac{(q_1, r_1)_\perp}{q^2_{1\perp}} - (q_1-r_1)^\mu_\perp \frac{(r_1, q_1-r_1)_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp} \right) I(q_{1\perp}, r_{1\perp}) + \\
&+ V^\mu_g(q_1, q_1-k) - V^\mu_g(q_1, r_1) - V^\mu_g(q_1-r_1, r_2) \Bigg\} - \\
&- \mathcal{N}_\mu \frac{N_c}{2} T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_2} T^{G'}_{\mathcal{G}_1 G} \Big\{ r_1 \leftrightarrow r_2 \Big\}.
\end{aligned}
$$

Итак, с учетом виртуальных поправок (3.3) окончательное выражение для вкладов древесных цветовых структур в преобразованный импакт-фактор можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_{*tree} = \mathcal{N}_\mu \frac{N_c}{2} T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_1} T^{G'}_{\mathcal{G}_2 G} \Bigg\{ - \frac{q^\mu_{1\perp}}{2q^2_{1\perp}} \Bigg(\ln\Big[\frac{(q_1-k)^2_\perp}{q^2_{1\perp}} \Big] \ln\Big[\frac{(q_1-k)^2_\perp}{k^2_\perp} \Big] - \\
&- \ln\Big[\frac{r^2_{1\perp}}{q^2_{1\perp}} \Big] \ln\Big[\frac{r^2_{1\perp}}{(q_1-r_1)^2_\perp} \Big] \Bigg) + \frac{k^\mu_\perp}{2k^2_\perp} \Bigg(\ln\Big[\frac{(q_1-k)^2_\perp}{q^2_{1\perp}} \Big] \ln\Big[\frac{(q_1-k)^2_\perp}{k^2_\perp} \Big] - \\
&- \ln\Big[\frac{r^2_{2\perp}}{(q_1-r_1)^2_\perp} \Big] \ln\Big[\frac{r^2_{2\perp}}{k^2_\perp} \Big] \Bigg) - \frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{2(q_1-r_1)^2_\perp} \Bigg(\ln\Big[\frac{r^2_{2\perp}}{(q_1-r_1)^2_\perp} \Big] \ln\Big[\frac{k^2_\perp}{r^2_{2\perp}} \Big] +
\end{aligned}
$$

$$
+\ln\Big[\frac{q_{1\perp}^2}{r_{1\perp}^2}\Big]\ln\Big[\frac{(q_1-r_1)_\perp^2}{r_{1\perp}^2}\Big]\bigg)+\bigg(q_{1\perp}^\mu\frac{(q_1,q_1-k)_\perp}{q_{1\perp}^2}-k_\perp^\mu\frac{(k,q_1-k)_\perp}{k_\perp^2}\bigg)\times
$$

$$
\times I(q_{1\perp},k_\perp)-\bigg((q_1-r_1)_\perp^\mu\frac{(q_1-r_1,r_2)_\perp}{(q_1-r_1)_\perp^2}-k_\perp^\mu\frac{(r_2,k)_\perp}{k_\perp^2}\bigg)I(q_{1\perp}-r_{1\perp},k_\perp)-
$$

$$
-\bigg(q_{1\perp}^\mu\frac{(q_1,r_1)_\perp}{q_{1\perp}^2}-(q_1-r_1)_\perp^\mu\frac{(r_1,q_1-r_1)_\perp}{(q_1-r_1)_\perp^2}\bigg)I(q_{1\perp},r_{1\perp})+
$$

$$
-\bigg(\frac{(q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-r_1)_\perp^2}-\frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2}\bigg)R_k(r_1,q_1-r_1)-V_g^\mu(q_1-r_1,r_2)+ \tag{4.14}
$$

$$
+\bigg(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2}-\frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2}\bigg)R_k(r_1,r_2)+V_g^\mu(q_1,q_1-k)\bigg\}-\mathcal{N}_\mu\frac{N_c}{2}T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_2}T^{G'}_{\mathcal{G}_1G}\bigg\{r_1\leftrightarrow r_2\bigg\}.
$$

5 Импакт-фактор рождения глюона в МРК. Симметричная цветовая структура

Ввиду отсутствия виртуальных поправок для вкладов симметричной цветовой структуры $\mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2}T^GT^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]$ окончательный результат в следующем за борновским приближении определяется только вкладами реальных поправок. Исходя из (3.18), с учетом (3.8) и (2.18) имеем

$$
\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_{*sym}=\frac{2\mathcal{N}_\mu}{q_{1\perp}^2}\mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2}T^GT^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]\int_0^1\frac{dx_1}{(x_1x_2)_+}\int\bar{d}l_1b^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)\times
$$
$$
\times\Big[M^\mu{}_{\beta\alpha}(l_2,l_1,k_\perp;x_2)+M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2,k_\perp;x_1)\Big]\Bigg|_{l_1+l_2=l=q_1-r_1}-\{\mathcal{G}_1\leftrightarrow\mathcal{G}_2\}. \tag{5.1}
$$

Делая замену переменных $l_1\leftrightarrow l_2,\ x_1\leftrightarrow x_2$ для первого вклада в квадратных скобках, приходим к следующему подынтегральному выражению в (5.1):

$$
M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2,k_\perp;x_1)b_s^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1),
$$

где $M^\mu{}_{\alpha\beta}(l_1,l_2,k_\perp;x_1)$ из явного вида (2.17) зависит только от r_1+r_2, а

$$
\begin{aligned}
b_s^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)&\equiv b^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)+b^{\beta\alpha}(q_1;l_2,l_1;x_2)=\\
&=q_{1\perp}^2\frac{l_1^\alpha l_2^\beta}{l_1^2l_2^2}+b_{\tau_1}^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2;x_1)+b_{\tau_2}^{\beta\alpha}(q_1;l_2,l_1;x_2).
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

При получении последнего выражения мы использовали (2.20) – (2.22); здесь $\tau_1=x_1(q_1-l_1)_\perp^2+x_2l_{1\perp}^2$ и $\tau_2=x_2(q_1-l_2)_\perp^2+x_1l_{2\perp}^2$.

Поскольку $b^{\alpha\beta}_{\tau_1}(q_1; l_1, l_2; x_1)$ зависит только от q_1 и импульса интегрирования l_1, при антисимметризации $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$ в (5.1) его вклад исчезает. Более того, все слагаемые в $b^{\beta\alpha}_{\tau_2}(q_1; l_2, l_1; x_2)$, кроме последнего $-\dfrac{x_2 q^2_{1\perp} l^{\beta}_{2\perp}(q_1 - l_2)^{\alpha}_{\perp}}{l^2_{2\perp}\tau_2}$, также сокращаются при антисимметризации $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$, в чем легко убедиться, проделав для этих слагаемых замены переменных интегрирования $x_1 \to x_2$, $l_{1\perp} \to (k - l_1)_{\perp}$.

Отбрасывая эти слагаемые, проводя свертку по α и β, получаем

$$\langle GR|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_{*sym} = 2\mathcal{N}_\mu \mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2}T^G T^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]\left\{\int_0^1 dx_1 \times\right.$$
$$\times \int \bar{d}l_1 \frac{1}{(l_1 - x_1 k)^2_{\perp}(l_1 - q_1 + r_1)^2_{\perp}}\left[-\frac{(l_1 - x_1 k)^{\mu}_{\perp}}{l^2_{1\perp}}(l_1, l_1 - q_1 + r_1)_{\perp} + \right.$$
$$+\frac{l^{\mu}_{1\perp}}{(x_2)_+ l^2_{1\perp}}(l_1 - x_1 k, l_1 - q_1 + r_1)_{\perp} + \frac{(l_1 - q_1 + r_1)^{\mu}_{\perp}}{(x_1)_+ l^2_{1\perp}}(l_1 - x_1 k, l_1)_{\perp} +$$
$$+\frac{x_2(l_1 - x_1 k)^{\mu}_{\perp}(l_1 - q_1 + r_1, l_1 + r_1)}{x_1(l_1 - q_1 + r_1)^2_{\perp} + x_2(l_1 + r_1)^2_{\perp}} - \frac{(l_1 + r_1)^{\mu}_{\perp}(l_1 - q_1 + r_1, l_1 - x_1 k)_{\perp}}{x_1(l_1 - q_1 + r_1)^2_{\perp} + x_2(l_1 + r_1)^2_{\perp}} -$$
$$\left.\left. -\frac{x_2(l_1 - q_1 + r_1)^{\mu}_{\perp}(l_1 - x_1 k, l_1 + r_1)_{\perp}}{(x_1)_+[x_1(l_1 - q_1 + r_1)^2_{\perp} + x_2(l_1 + r_1)^2_{\perp}]}\right]\right\} -$$
$$-2\mathcal{N}_\mu \mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2}T^G T^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]\Big\{r_1 \leftrightarrow r_2\Big\}. \tag{5.3}$$

При интегрировании в пространстве поперечных импульсов первого и второго интегралов в квадратных скобках в (5.3) мы использовали соотношение:

$$\int \bar{d}l \frac{(l-a)^{\mu}_{\perp}(l-b, l-c)_{\perp}}{(l-a)^2_{\perp}(l-b)^2_{\perp}(l-c)^2_{\perp}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(a-b)^{\mu}_{\perp}}{(a-b)^2_{\perp}}\ln\left[\frac{(a-c)^2_{\perp}}{(b-c)^2_{\perp}}\right] + \frac{(a-c)^{\mu}_{\perp}}{(a-c)^2_{\perp}}\ln\left[\frac{(a-b)^2_{\perp}}{(c-b)^2_{\perp}}\right]\right\} + \mathcal{O}(\epsilon). \tag{5.4}$$

Однако в случае применения формулы (5.4) к третьему интегралу в квадратных скобках в (5.3) результат оказывается сингулярным при $D = 4$ для дальнейшего интегрирования по x_1. Поэтому необходимо выделить расходящуюся часть этого интеграла при малых x_1 точно по ϵ. С этой целью используем формулу (точную по D при $K = 0$), которая также была основной для вычислений [14] матричного элемента оператора рождения глюона для вкладов симметричной цветовой структуры:

$$\int \bar{d}l \frac{(l, l-K)_\perp}{l_\perp^2 (l-K)_\perp^2} \frac{(l-Q)_\perp^\mu}{(l-Q)_\perp^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{(Q-K)_\perp^\mu}{(Q-K)_\perp^2} \ln\left[\frac{Q_\perp^2}{(Q-K)_\perp^2}\right] + \left(\frac{(Q-K)_\perp^\mu}{(Q-K)_\perp^2} - \frac{Q_\perp^\mu}{Q_\perp^2}\right) \ln\left[\frac{(Q-K)_\perp^2}{K_\perp^2}\right]\right\} +$$
$$+\mathcal{O}(\epsilon) + \frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\Gamma(1+2\epsilon)} \frac{1}{\epsilon} \frac{Q_\perp^\mu}{Q_\perp^2} \left([-(Q-K)_\perp^2]^\epsilon - [-K_\perp^2]^\epsilon \right). \tag{5.5}$$

Формула (5.4) является, очевидно, частным случаем (5.5). Таким образом, для случая третьего интеграла из (5.3): $Q = q_1 - r_1$, $K = x_1 k$, и формула (5.5) дает

$$\frac{1}{(x_1)_+} \int \bar{d}l_1 \frac{(l_1 - q_1 + r_1)_\perp^\mu (l_1, l_1 - x_1 k)_\perp}{l_{1\perp}^2 (l_1 - q_1 + r_1)_\perp^2 (l_1 - x_1 k)_\perp^2} = -\frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\Gamma(1+2\epsilon)} \frac{1}{\epsilon} \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^\mu} \frac{(-k_\perp^2)^\epsilon}{x_1^{1-2\epsilon}} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{ \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \frac{1}{x_1} \ln\left[\frac{(q_1 - r_1 - x_1 k)_\perp^2}{(q_1 - r_1)_\perp^2}\right] + \frac{1}{x_1} \left(\frac{(q_1 - r_1 - x_1 k)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1 - x_1 k)_\perp^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right) \ln\left[\frac{(q_1 - r_1)_\perp^2}{x_1^2 k_\perp^2}\right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon). \tag{5.6}$$

Наконец, четвертый, пятый и шестой интегралы по импульсам в (5.3) дают конечный при $D = 4$ результат. Их вычисление можно провести либо при $D = 4$ методом теории вычетов, либо стандартным способом, что в данном случае проще, так как при этом используются те же базовые интегралы, что и для вкладов древесных цветовых структур. Следуя по этому пути, после сокращения в числителе квадратичных комбинаций по импульсу l_1 со знаменателем к четвертому интегралу из (5.3) мы применяем формулы (7.2), (7.5) и (7.9); к пятому интегралу — формулы (7.2), (7.4) и (7.9); к шестому интегралу — формулы (7.4), (7.5) и (7.9).

Окончательный результат интегрирования по импульсам для вкладов симметричной цветовой структуры представим в виде

$$\langle GR|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_{*sym} = -\mathcal{N}_\mu \mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2}T^{G}T^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]\int_0^1 dx_1 \Bigg\{ \frac{(q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-r_1)_\perp^2}\frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\Gamma(1+2\epsilon)}\times$$
$$\times \frac{2(-k_\perp^2)^\epsilon}{\epsilon x_1^{1-2\epsilon}} - \frac{(q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-r_1)_\perp^2}\frac{1}{x_1}\ln\Big[\frac{(r_1+x_1k)_\perp^2(r_2+x_1k)_\perp^2(r_2+x_2k)_\perp^2}{x_2^2 r_{1\perp}^2 r_{2\perp}^2(k+r_2)_\perp^2}\Big]+$$
$$+\left(\frac{x_1k_\perp^\mu}{(r_2+x_1k)_\perp^2}+\frac{(q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-r_1)_\perp^2}\frac{(r_{2\perp}^2-x_1k_\perp^2)}{(r_2+x_1k)_\perp^2}\right)\ln\Big[\frac{(r_1+x_2k)_\perp^2(q_1-r_1)_\perp^2}{q_{1\perp}^2k_\perp^2x_2^2}\Big]+$$
$$+\frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2}\frac{1}{x_1}\ln\Big[\frac{(r_1+x_1k)_\perp^2}{r_{1\perp}^2}\Big]-\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2}\frac{1}{x_1}\ln\Big[\frac{(r_1+x_2k)_\perp^2(r_1+x_1k)_\perp^2}{(r_1+k)_\perp^2r_{1\perp}^2}\Big]\Bigg\}+$$
$$+\mathcal{N}_\mu \mathrm{Tr}[T^{\mathcal{G}_2}T^{G}T^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}]\int_0^1 dx_1\Bigg\{r_1\leftrightarrow r_2\Bigg\}. \tag{5.7}$$

Заметим, что при получении выражения (5.7), форма которого наиболее удобна для дальнейшей проверки условия бутстрапа, к некоторым слагаемым применялась замена переменных $x_1 \leftrightarrow x_2$ и использовалась антисимметрия всего вклада по замене $r_1 \leftrightarrow r_2$. Дальнейшее интегрирование по x_1 выражения (5.7) приводит, помимо первого слагаемого в фигурных скобках, к дилогарифмическим функциям комплексного аргумента.

6 Заключение

Нами был вычислен импакт-фактор рождения глюона в мультиреджевской кинематике в следующем за борновским приближении. Вычисления проводились в размерностной регуляризации с использованием светоконусной калибровки с фиксирующим калибровку вектором p_2 для эффективных вершин, входящих в определение (2.2) импакт-фактора. Импакт-фактор состоит из двух частей: кварковой и глюонной. Вычисления импакт-фактора для вкладов фермионного сектора представлены в работе [5]. Результаты вычисления вкладов глюонного сектора для различных цветовых представлений в t-канале представлены формулами (4.14) и (5.7).

Следует заметить, что импакт-фактор является калибровочно инвариантной величиной, поскольку выражается через калибровочно инвариантные эффективные вершины взаимодействия реджезованных глюонов с частицами. Определенная калибровка была взята только для упрощения вычислений. В любой другой калибровке импакт-фактор может быть получен из наших результатов (4.14) и (5.7) соответствующим преобразованием вектора поляризации глюона $G(k)$.

Импакт-фактор наряду с матричным элементом оператора рождения глюона, вычисленным в работе [14], является необходимой составляющей в доказательстве условия бутстрапа на неупругую амплитуду рождения одного глюона. Удачный выбор цветового базиса (2.23) оказался важным элементом, упрощающим вычисления обеих составляющих. Кроме того, применение оператора $\widehat{\mathcal{U}}_k$ (3.20), преобразующего импакт-фактор по формуле (3.19), позволило устранить в нем наиболее сложные вклады и упростить дальнейший анализ условия бутстрапа [14]. Приведенные выше результаты (4.14) и (5.7) даны в наиболее удобной форме для проверки данного условия. Явное ее осуществление [14] явилось важным и заключительным шагом в схеме доказательства мультиреджевской формы амплитуд КХД с глюонным обменом в СГЛП, сформулированной в работе [7].

7 Приложение. Интегралы по импульсам в поперечном пространстве

В этом разделе мы приводим ответы для всех встречающихся в наших вычислениях интегралов по импульсам в поперечном пространстве. Результаты интегрирования приведены в разложении по ϵ, а также точно по ϵ, где это возможно. Некоторые ответы ввиду дальнейшего интегрирования по параметру x_1 приведены в форме, в которой потенциально сингулярные члены приведены с коэффициентами, разложенными до членов порядка ϵ включительно.

$$\int \bar{d}l \frac{1}{(l-Q)_\perp^2 - m^2} = \frac{(m^2)^\epsilon}{\epsilon}, \quad \int \bar{d}l \frac{1}{l_\perp^2 [l_\perp^2 - m^2]} = \frac{(m^2)^\epsilon}{\epsilon m^2}, \tag{7.1}$$

где, напомним, для краткости меру интегрирования по импульсам в поперечном пространстве мы обозначаем как $\bar{d}l = \dfrac{d^{D-2}l}{\pi^{1+\epsilon}\Gamma(1-\epsilon)}$.

$$\int \bar{d}l \frac{1}{l_\perp^2[(l-Q)_\perp^2 - m^2]} = \frac{1}{[m^2 - Q_\perp^2]^{1-\epsilon}} \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\epsilon}} \Big[1 - \frac{Q_\perp^2}{Q_\perp^2 - m^2} x\Big]^{\epsilon-1} =$$
$$\frac{1}{[m^2 - Q_\perp^2]^{1-\epsilon}} \Big[\frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon}\Big(\frac{m^2}{m^2 - Q_\perp^2}\Big)^{\epsilon} - 2\epsilon \mathrm{Li}_2\Big(\frac{Q_\perp^2}{Q_\perp^2 - m^2}\Big) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\Big]. \tag{7.2}$$

Для случая $m = 0$ приведем точный по D ответ:

$$\int \frac{\bar{d}l}{l_\perp^2 (l-Q)_\perp^2} = \frac{2}{\epsilon} \frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\Gamma(1+2\epsilon)} \frac{1}{[-Q_\perp^2]^{1-\epsilon}}. \tag{7.3}$$

Далее

$$\int \bar{d}l \frac{l_\perp^\mu}{(l-K)_\perp^2[(l-Q)_\perp^2 - m^2]} = \frac{1}{[m^2 - (K-Q)_\perp^2]^{1-\epsilon}} \Bigg\{$$
$$\Big(Q_\perp^\mu (1 - \frac{m^2}{(K-Q)_\perp^2}) + K_\perp^\mu \frac{m^2}{(K-Q)_\perp^2}\Big)\Big(\frac{1}{\epsilon}\Big[1 - \Big(\frac{m^2}{m^2 - (K-Q)_\perp^2}\Big)^{\epsilon}\Big] +$$
$$- \epsilon \mathrm{Li}_2\Big(\frac{(K-Q)_\perp^2}{(K-Q)_\perp^2 - m^2}\Big)\Big) + K_\perp^\mu \Big[\frac{1}{\epsilon} - \epsilon \mathrm{Li}_2\Big(\frac{(K-Q)_\perp^2}{(K-Q)_\perp^2 - m^2}\Big)\Big]\Bigg\} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{7.4}$$

При $m = 0$ можно найти точный по ϵ ответ (он необходим для выделения сингулярных членов):

$$\int \bar{d}l \frac{l_\perp^\mu}{(l-K)_\perp^2 (l-Q)_\perp^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\Gamma(1+2\epsilon)} \frac{K_\perp^\mu + Q_\perp^\mu}{[-(K-Q)_\perp^2]^{1-\epsilon}}. \tag{7.5}$$

Также для вычислений коэффициентов при древесных цветовых структурах нам необходим тензорный интеграл

$$\int \bar{d}l \frac{l_\perp^\mu l_\perp^\nu}{(l-K)_\perp^2[(l-Q)_\perp^2 - m^2]} = \frac{g_\perp^{\mu\,\nu}}{2}\Big(\frac{1}{\epsilon} + \ln[m^2] - 2 - \frac{m^2-(Q-K)_\perp^2}{(Q-K)_\perp^2}\times$$
$$\times \ln\Big[\frac{m^2-(Q-K)_\perp^2}{m^2}\Big]\Big) + \frac{(Q-K)_\perp^\mu(Q-K)_\perp^\nu}{(Q-K)_\perp^2}\Big(1 + \frac{m^2-(Q-K)_\perp^2}{(Q-K)_\perp^2}\times$$
$$\times \ln\Big[\frac{m^2-(Q-K)_\perp^2}{m^2}\Big]\Big) + \frac{K_\perp^\mu K_\perp^\nu}{m^2-(Q-K)_\perp^2}\Big(\frac{1}{\epsilon} + \ln[m^2-(Q-K)_\perp^2]+$$
$$+ \ln\Big[\frac{m^2-(Q-K)_\perp^2}{m^2}\Big]\Big) + \frac{K_\perp^\mu(Q-K)_\perp^\nu + K_\perp^\nu(Q-K)_\perp^\mu}{(Q-K)_\perp^2}\times$$
$$\times \ln\Big[\frac{m^2}{m^2-(Q-K)_\perp^2}\Big] + \mathcal{O}(\epsilon), \tag{7.6}$$

а также два его частных случая:

$$\int \bar{d}l \frac{l_\perp^\mu l_\perp^\nu}{l_\perp^2[(l-Q)_\perp^2 - m^2]} = \frac{g_\perp^{\mu\,\nu}}{2}\Big(\frac{1}{\epsilon} + \ln[m^2] - 2 - \frac{m^2-Q_\perp^2}{Q_\perp^2}\ln\Big[\frac{m^2-Q_\perp^2}{m^2}\Big]\Big)+$$
$$+ \frac{Q_\perp^\mu Q_\perp^\nu}{Q_\perp^2}\Big(1 + \frac{m^2-Q_\perp^2}{Q_\perp^2}\ln\Big[\frac{m^2-Q_\perp^2}{m^2}\Big]\Big) + \mathcal{O}(\epsilon), \tag{7.7}$$

и точный по ϵ результат:

$$\int \bar{d}l \frac{l_\perp^\mu l_\perp^\nu}{(l-K)_\perp^2(l-Q)_\perp^2} = \frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\epsilon\Gamma(1+2\epsilon)}\frac{1}{[-(Q-K)_\perp^2]^{1-\epsilon}}\Big\{Q_\perp^\mu K_\perp^\nu + K_\perp^\mu Q_\perp^\nu +$$
$$+ \frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}(K-Q)_\perp^\mu(K-Q)_\perp^\nu - g_\perp^{\mu\,\nu}\frac{(K-Q)_\perp^2}{2(1+2\epsilon)}\Big\}. \tag{7.8}$$

Приведем одну из основных формул для вычислений вкладов древесных цветовых структур:

$$
\begin{aligned}
&\int \bar{d}l \frac{l_\perp^\mu}{l_\perp^2 (l-K)_\perp^2 [(l-Q)_\perp^2 - m^2]} = \frac{K_\perp^\mu}{K_\perp^2} \frac{1}{[m^2 - (Q-K)_\perp^2]^{1-\epsilon}} \times \\
&\times \left[\frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \Big(\frac{m^2}{m^2 - (Q-K)_\perp^2} \Big)^\epsilon - 2\epsilon \mathrm{Li}_2 \Big(\frac{(Q-K)_\perp^2}{(Q-K)_\perp^2 - m^2} \Big) \right] + \\
&+ \frac{Q_\perp^\mu + K_\perp^\mu \frac{m^2 - Q_\perp^2}{K_\perp^2}}{(m^2 - Q_\perp^2)[(Q-K)_\perp^2 - m^2] - m^2 K_\perp^2} \times \\
&\times \ln \Big[\frac{(m^2 - Q_\perp^2)[(Q-K)_\perp^2 - m^2]}{m^2 K_\perp^2} \Big] + \mathcal{O}(\epsilon),
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

В частном, но весьма часто используемом случае при $m = 0$ (7.9) переходит в

$$
\begin{aligned}
&\int \bar{d}l \frac{l_\perp^\mu}{l_\perp^2 (l-K)_\perp^2 (l-Q)_\perp^2} = \\
&= \frac{1}{[-(Q-K)_\perp^2]^{1-\epsilon}} \Big\{ \frac{1}{\epsilon} \Big(\frac{Q_\perp^\mu}{Q_\perp^2} + \frac{K_\perp^\mu}{K_\perp^2} \Big) + \ln \Big[\frac{Q_\perp^2}{K_\perp^2} \Big] \Big(\frac{Q_\perp^\mu}{Q_\perp^2} - \frac{K_\perp^\mu}{K_\perp^2} \Big) \Big\} + \mathcal{O}(\epsilon).
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Из этого результата, а также из точного ответа (7.5) легко выводятся формулы (5.4), (5.5), которые используются для интегрирования вкладов симметричной цветовой структуры.

Список литературы

[1] V. S. Fadin, E. A. Kuraev and L. N. Lipatov, Phys. Lett. B **60** (1975) 50.

[2] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **44** (1976) 443 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **71** (1976) 840].

[3] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **45** (1977) 199 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **72** (1977) 377].

[4] I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28** (1978) 822 [Yad. Fiz. **28** (1978) 1597].

[5] V. S. Fadin, M. G. Kozlov and A. V. Reznichenko, Yad. Fiz. 74 (2011) 784–796 pp.

[6] Ya.Ya. Balitskii, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, in *Materials of IV Winter School of LNPI* (Leningrad, 1979) 109.

[7] V. S. Fadin, R. Fiore, M. G. Kozlov and A. V. Reznichenko, Phys. Lett. B **639** (2006) 74 [arXiv:hep-ph/0602006].

[8] V. S. Fadin, Talk given at the NATO Advanced Research Workshop DIFFRACTION 2002, Diffraction 2002, NATO Science Series, **101** (2002) 235.

[9] M. Braun and G. P. Vacca, Phys. Lett. B **477** (2000) 156 [arXiv:hep-ph/9910432].

[10] V. S. Fadin, Phys. Atom. Nucl., **66** (2003) 2017.

[11] J. Bartels, V. S. Fadin and R. Fiore, Nucl. Phys. B **672** (2003) 329 [arXiv:hep-ph/0307076].

[12] V. S. Fadin and A. Papa, Nucl. Phys. B **640** (2002) 309 [arXiv:hep-ph/0206079].

[13] V. S. Fadin, M. G. Kozlov and A. V. Reznichenko, Phys. Atom. Nucl. **67** (2004) 359 [Yad. Fiz. **67** (2004) 377] [arXiv:hep-ph/0302224].

[14] V. S. Fadin, M. G. Kozlov and A. V. Reznichenko, To be published.

[15] V. S. Fadin, R. Fiore, M. I. Kotsky and A. Papa, Phys. Rev. D **61** (2000) 094005 [arXiv:hep-ph/9908264].

[16] V. S. Fadin and L. N. Lipatov, JETP Lett. **49** (1989) 352 [Yad. Fiz. **50** (1989 SJNCA,50,712.1989) 1141].

[17] V. S. Fadin and R. Fiore, Phys. Lett. B **440** (1998) 359 [arXiv:hep-ph/9807472].

М.Г. Козлов, А.В. Резниченко, В.С. Фадин

**Импакт-фактор для рождения глюона
в мультиреджевской кинематике
в следующем за борновским приближении**

M.G. Kozlov, A.V. Reznichenko, V.S. Fadin

**NLO Impact-factor for one gluon production
in the multi-Regge kinematics**

ИЯФ 2011-23

Ответственный за выпуск А.В. Васильев
Работа поступила 29.08.2011 г.
Сдано в набор 30.08.2011 г.
Подписано в печать 31.08.2011 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.2 печ.л., 1.8 уч.-изд.л.
Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 23
Обработано на PC и отпечатано на
ротапринте «ИЯФ им. Г.И. Будкера» СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.