

УЧРЕЖДЕНИЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН
(ИЯФ СО РАН)

Е.Ю. Колесников, Ю.А. Цидулко

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПЕРЕНОС
ПЛЕЩУЩИХСЯ ИОНОВ

ИЯФ 2010-15

НОВОСИБИРСК
2010

Стохастический перенос плещущихся ионов

Е.Ю. Колесников, Ю.А. Цидулко

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера,
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

В работе рассмотрен механизм стохастического радиального переноса популяции быстрых плещущихся ионов в почти осесимметричной открытой ловушке. Предполагается, что малые отклонения от аксиальной симметрии вызваны асимметрией инжекции быстрых нейтралов. Рассматриваются такие параметры задачи, при которых ларморовский радиус быстрых ионов сравним с радиусом плазмы и давление быстрых ионов сравнимо с давлением магнитного поля. В таких условиях существуют резонансы между баунс-колебаниями быстрых ионов и азимутальным вращением ведущих центров ионов, обусловленным радиальным градиентом магнитного поля. В результате аналитических оценок и численного моделирования определен уровень неосесимметричных возмущений необходимый для перекрытий резонансов приводящих к существенному переносу.

Stochastic transport of sloshing ions

E.Yu. Kolesnikov, Yu.A. Tsidulko

Budker Institute for Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, Russia

The mechanism of stochastic radial transport of fast sloshing ion population in an almost axisymmetric open trap is considered. The small deviations from the axial symmetry are assumed to be caused by a fast ion injection asymmetry. The assumed parameters are such that the fast ion Larmor radius is comparable with the plasma radius and the fast ion pressure is comparable with the magnetic field pressure. At these conditions, there exist resonances between the fast ion bounce oscillations and the ion guiding center azimuthal rotation caused by the magnetic field radial gradient. The both analytical estimations and numerical simulations were used to define the asymmetry level which is necessary for resonance overlapping causing the significant transport.

1 Введение

Стохастическая бесстолкновительная динамика частиц в открытых магнитных ловушках рассматривалась во многих работах, и в качестве приложения теории динамического хаоса (см. в [1, 2]), и как раздел теории плазмы в открытых ловушках (см. в [3]). Возможность радиального стохастического переноса обычно рассматривается для ловушек в которых магнитная система исходно является существенно неосесимметричной [3].

В настоящей работе рассматривается бесстолкновительный стохастический радиальный транспорт быстрых “плещущихся” ионов в открытой магнитной ловушке с аксиально симметричной магнитной системой. Популяция плещущихся ионов создается в результате наклонной инжекции быстрых нейтралов. Параметры популяции плещущихся ионов предполагаются такими, что ларморовский радиус быстрых ионов ρ сравним с радиусом плазмы и давление быстрых ионов сравнимо с давлением магнитного поля (конечное β). Такие параметры являются типичными для современных экспериментов на газодинамической ловушке (ГДЛ)[4, 5]. В этих условиях радиальный градиент магнитного поля приводит к довольно быстрому дрейфу ведущих центров быстрых ионов вокруг оси ловушки, так что частота дрейфового вращения вокруг оси Ω_ϕ становится порядка или больше частоты баунс колебаний ионов Ω_z . Если какие-либо неосесимметричные возмущения достаточны для перекрытия резонансов, соответствующих рациональным отношениям Ω_ϕ/Ω_z , то быстрые ионы могут стохастическим образом перемещаться по радиусу на размер области перекрытия.

В настоящей работе рассматриваются малые отклонения от аксиальной симметрии магнитного поля, вызываемые асимметрией инжекции быстрых нейтралов. В случае отсутствия существенных резонансов фазовое размешивание быстро нивелирует влияние такой асимметрии. Однако в присутствии резонансов происходит накопление и поддержание соответствующих Фурье гармоник распределения плотности быстрых ионов. А в силу конечности β поддерживается определенный уровень асимметрии магнитного поля.

Исследование упомянутых резонансов интересно еще с другой точки зрения. В окрестности резонансов не сохраняется продольный адиабатический инвариант I_z . Это позволяет популяции быстрых ионов без нарушения сохранения фазового объема переходить к энергетически более выгодному компактному поперечному радиальному распределению [6], наблюдаемому экспериментально [5]. Для изучения этого процесса необходимо рассматривать самосогласованную трехмерную задачу, в которой быстрые ионы создают возмущение магнитного поля, приводящее к эволюции распределения этих же ионов.

Однако в настоящей работе мы рассматриваем несамосогласованную задачу: популяция “полевых” неосесимметрично инжектированных ионов создает возмущение магнитного поля, а влияние этого возмущения учитывается только при анализе движения других, “тестовых” ионов. Такой подход позволяет определить уровень внешних факторов (таких, как асимметрия инжекции), приводящих к стохастическому радиальному переносу, но не позволяет исследовать формирование “естественного” радиального профиля. Изучению самосогласованной задачи будет посвящена следующая работа.

Дальнейший план изложения настоящей работы следующий. В разделе 2 приведены предварительные оценки условий при которых возникает стохастический перенос. В разделе 3 описана используемая аналитическая модель. В разделе 4 приведены результаты численного моделирования и в Заключение суммируются основные результаты. Некоторые громоздкие детали аналитических вычислений вынесены в Приложения.

2 Предварительные оценки

2.1 Размеры резонансов и расстояния между ними

Радиальный градиент магнитного поля можно оценить как $\nabla B \sim B\beta/a$, где a – характерный радиус плазмы, $\beta = 8\pi p_p/B^2$ и p_p – давление плазмы создаваемое преимущественно популяцией быстрых ионов. Такой градиент поля приводит к скорости азимутального дрейфа $V_{dr} \sim V_i \rho \nabla B/B$ (здесь V_i – скорость иона, $\rho = V_i/\omega_{ci}$ – ларморовский радиус быстрого иона, $\omega_{ci} = eB/m_i c$ – ионная циклотронная частота) и соответствующей частоте азимутального вращения $\Omega_\phi = V_{dr}/r \sim V_i \beta \rho/a^2$. Сравнивая эту частоту с баунс частотой осцилляций вдоль магнитного поля $\Omega_z \sim V_i/L$, где L – длина ловушки, находим, что существенные резонансы имеют

место, когда отношение частот

$$q(r) \equiv \frac{\Omega_\phi(r)}{\Omega_z} \sim \beta \frac{\rho L}{a^2} \quad (1)$$

является отношением целых чисел l и m порядка единицы. Заметим, что обычно в открытых ловушках правая часть (1) мала, либо в силу малости β , либо в силу малости ρ/a ¹. В экспериментах на ГДП [4, 5] величина q порядка 10 вблизи оси ловушки и становится малой на радиусах больше $a + \rho$.

Расстояние между соседними резонансами Δr можно оценить, учитывая радиальную зависимость давления ионов: $\beta' \sim \beta/a$, где штрих означает производную по радиусу. Величина l или m в отношении $q = l/m$ меняется на единицу на размере

$$\Delta r \sim \frac{1}{q'} \sim \frac{a^3}{\beta \rho L}. \quad (2)$$

Ширина резонанса δr определяется стандартной оценкой [1]: $\delta r \sim \sqrt{\delta H/H_0'}$, где в качестве невозмущенного гамильтониана используем $H_0 = p_z^2/2m_i + \mu B$, а возмущением является член $\delta H = \mu \delta B$. Здесь p_z – импульс иона вдоль магнитного поля, $\mu \sim \mathcal{E}_\perp/B$ – поперечный адиабатический инвариант, \mathcal{E}_\perp – поперечная часть кинетической энергии \mathcal{E} , B – аксиально симметричная часть магнитного поля и δB – амплитуда l, m -ой гармоники возмущения магнитного поля (здесь l соответствует Фурье разложению по баунс фазе, а m – по азимуту). Оценивая вторую радиальную производную магнитного поля как $B'' \sim \beta B/a^2$, получаем,

$$\delta r \sim a \sqrt{\frac{\delta B}{\beta B}}. \quad (3)$$

Таким образом, условие перекрытия резонансов Чирикова [1] $\delta r > \Delta r$ выполняется, когда

$$\frac{\delta B}{B} > \frac{1}{\beta} \left(\frac{a^2}{\rho L} \right)^2. \quad (4)$$

¹При малых q для возникновения стохастического переноса требуются возмущения с большими азимутальными номерами m . Но их амплитуды типично экспоненциально малы и недостаточны для перекрытия резонансов. Напомним, что в традиционно рассматриваемых задачах о стохастической диффузии в открытых ловушках [3] азимутальный дрейф связан не с конечностью β и ρ/a , а возникает из за неосесимметричности магнитной системы.

Если для численной оценки использовать значения параметров, характерные для ГДЛ[4, 5]: $\beta \sim 0.3$, $a \sim 10$ см, $\rho \sim 7$ см, $L \sim 500$ см, то значение правой части выражения (4) – есть $3 \cdot 10^{-3}$.

2.2 Оценка неосесимметричной части возмущения магнитного поля

На резонансной поверхности, где $\Omega_\phi/\Omega_z = l/m$ – есть отношение двух целых взаимно простых чисел, траектория ведущего центра является замкнутой (см. рис. 1 а). Если построить сечение Пуанкаре для такой траектории в центральном сечении ловушки $Z = 0$ при $p_z > 0$ (здесь Z – координата вдоль силовой линии невозмущенного магнитного поля), то оно будет содержать ровно m точек пересечения. Если инжекция частиц содержит азимутальные гармоники с номерами M кратными m , то такие возмущения накапливаются на траекториях резонансной поверхности. Остальные гармоники интегрально дают нулевой вклад в изменение числа частиц на любой траектории такой поверхности.²

На нерезонансной поверхности точка пересечения после каждого баунс колебания смещается на угол $\delta\phi = 2\pi(\frac{\Omega_\phi}{l\Omega_z} - \frac{k}{m})$ относительно точки на выбранной резонансной поверхности, и этот угол смещения не равен $2\pi/k$, где k –любое целое. Поэтому в итоге траектория ведущего центра постепенно покрывает нерезонансную дрейфовую поверхность (см. рис. 1 б,с). За характерное “время жизни” τ (то есть время, пока ион остается “быстрым” и дает вклад в возмущение магнитного поля) полный угол смещения оценивается как $\Delta\phi = \delta\phi\Omega_z\tau = 2\pi(\frac{\Omega_\phi}{l} - \frac{\Omega_z}{m})\tau$. Если нерезонансная поверхность далека от резонансной, так что $\Delta\phi \gg 2\pi/m$, то происходит фазовое размешивание и избыточная плотность ведущих центров на некоторой траектории этой поверхности в итоге не дает вклада в возмущение плотности. И наоборот, если нерезонансная поверхность настолько близка к резонансной, что $\Delta\phi < 2\pi/m$, то избыточная плотность ведущих центров на некоторой траектории даст вклад в соответствующую гармонику фурье разложения плотности. Таким образом, вклад в осесимметричную часть плотности дают ионы, чей ведущий центр был захвачен на расстоянии меньше, чем $\Delta r_\tau \sim 1/(\Omega'_\phi\tau)$ от резонансной поверхности. Число ведущих центров в этом слое, участвующих в создании l, m -ой гармоники поля, есть $\delta N \sim j_m\tau\Delta r_\tau a\Delta Z \sim j_m a\Delta Z L/(q'V_i)$, где $j_m(r)$ есть m -ая гармоника плотности ведущих центров, захватываемых в единице объема в единицу времени, и ΔZ – длина области по Z , где

² Действительно, $\sum_{k=1}^m e^{2\pi i M k/m} = 0$, если M не кратно m .

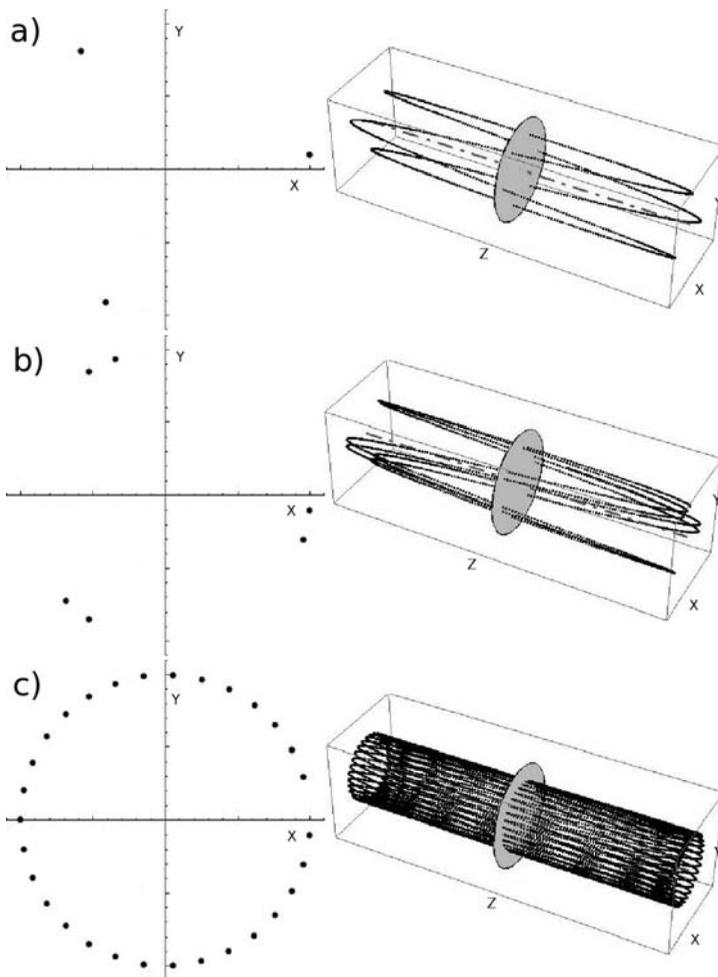


Рис. 1. **а)** Схематичное изображение траектории ведущего центра на резонансной поверхности (справа) и центральное сечение с точками пересечения его траекторией при $p_z > 0$ (слева). Резонансная траектория замкнута, число точек пересечений равно $m = 3$. **б)** Траектория на нерезонансной поверхности после двух оборотов вокруг оси. Точки пересечения смещаются с каждым оборотом. **в)** Нерезонансная траектория после десяти оборотов вокруг оси. Точки пересечения постепенно заполняют все окружность.

сосредоточена инжекция (предполагается, что $\Delta Z \ll L$). Диамагнитные токи этих частиц создают возмущение магнитного поля

$$\delta B = -4\pi\mu\bar{n} \sim \frac{\mu}{La\rho} \delta N \sim \frac{\mu j_m a \Delta Z}{\rho^2 q' V_i}, \quad (5)$$

которое простирается на размер ларморовского радиуса ρ от резонансной поверхности (здесь черта над плотностью ведущих центров \bar{n} означает усреднение по площади ларморовской орбиты). Заметим, что при заданных параметрах инжекции возмущение δB не зависит от времени жизни частиц τ . С ростом τ размер слоя Δr уменьшается, но полное число частиц, участвующих в создании выбранной гармоники δB не меняется. При последовательном вычислении возмущения поля (см. разделы 3.2,3.3) этот результат получается как вклад резонансной особенности после ее обхода в соответствии с правилом Ландау, что формально соответствует пределу $\tau \rightarrow \infty$. Заметим, что при отходе от резонансной поверхности нерезонансные гармоники, вообще говоря, тоже дают вклад в возмущение магнитного поля и, следовательно, в возмущение движения “тестового” иона. Однако, интегрально этот вклад мал (см. Приложение IV). Далее для оценки относительного возмущения $\delta B/B$ удобно использовать отношение j_m/j_0 , где $j_0 \sim \beta B^2 L / (\mathcal{E} \Delta Z \tau)$ – плотность захвата частиц, необходимая для поддержания заданного среднего β во всей ловушке. В этих терминах относительное возмущение есть

$$\frac{\delta B}{B} \sim \frac{j_m a^3}{j_0 \rho^2 V_i \tau}. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в (4), получаем грубую оценку условия возникновения стохастической диффузии

$$\frac{j_m}{j_0} > \frac{a \Omega_z \tau}{\beta L}. \quad (7)$$

Кроме того, расстояние между резонансными поверхностями (6) должно быть меньше ларморовского радиуса, что выполняется если $\beta \rho^2 / a^2 > a/L$.

Если для примера использовать параметры, соответствующие реальным экспериментам на ГДЛ: среднее $\beta \sim 0.3$, $a \sim 10$, $L \sim 500$ и $\Omega_z \tau \sim 100$, то правая часть неравенства (7) оказывается порядка 5. С другой стороны, вычисление гармоник инжекции для ГДЛ (см. Приложение III) дает оценку: j_m меньше или порядка $0.2j_0$. Из этих оценок

следует, что в экспериментах с указанными параметрами стохастического переноса нет. Однако, рассматривая ловушку, например, в 5 и более раз длиннее, и учитывая, что $\Omega_z \sim 1/L$, находим, что для избежания стохастического переноса в длинной ловушке требуется более симметричная инжекция.

3 Аналитическое описание модели

3.1 Кинетическое уравнение для “полевых” частиц

Гамильтониан для описания движения ведущего центра иона в параксиальном осесимметричном магнитном поле (см. [2, 6]) в дрейфовом приближении есть

$$H_0[p_z, Z, \mathcal{P}] = \frac{p_z^2}{2m_i} + \mu \overline{B}[P, Z], \quad (8)$$

где p_z – импульс иона вдоль магнитного поля, Z – координата вдоль силовой линии магнитного поля, $\mu = m_i V_{i\perp}^2 / 2B$ – магнитный момент, $\mathcal{P} = \frac{e}{c} \int_0^{r_c} Br dr$ – обобщенный импульс сопряженный с азимутальным углом ϕ , r_c – радиальное положение ведущего центра и $\overline{B}[P, Z]$ – магнитное поле, усредненное по площади ларморовской окружности (см. Приложение I). Кроме движения вдоль силовой линии, гамильтониан описывает азимутальный дрейф обусловленный радиальной неоднородностью магнитного поля³: $d\phi/dt = \partial_{\mathcal{P}} H_0 \sim \beta V^2 / (\omega_{ci} a^2)$.

В безразмерных переменных $p_{\parallel} = p_z / \sqrt{2m_i \mu_0 B_0}$, $z = Z / \rho_0$, $p = e\mathcal{P} / (2m_i c \mu_0)$ и $\mathcal{B} = B\mu / (2\mu_0 B_0)$ гамильтониан $\mathcal{H}_0 \equiv H_0 / (2\mu_0 B_0)$ есть

$$\mathcal{H}_0[p_{\parallel}, z, p] = \frac{p_{\parallel}^2}{2} + \overline{\mathcal{B}}[p, z], \quad (9)$$

где B_0 – невозмущенное значение магнитного поля в центре ловушки, $\mu_0 \equiv \epsilon_{\perp 0} / B_0$, $\epsilon_{\perp 0}$ – поперечная энергия инжектируемых ионов и $\rho_0 = \sqrt{2m_i \epsilon_{\perp 0} c / (eB_0)}$ – ларморовский радиус в центральном сечении. Соответствующее кинетическое уравнение для функции распределения ведущих центров

$$\partial_t f + \partial_p \overline{\mathcal{B}} \partial_{\phi} f - \partial_z \overline{\mathcal{B}} \partial_{p_{\parallel}} f + p_{\parallel} \partial_z f = S_c[\phi, p, z, p_{\parallel}] - f / \tau, \quad (10)$$

³При этом пренебрегается дрейфом, связанным с кривизной силовых линий $d\phi/dt \sim V^2 / (\omega_{ci} L^2)$, то есть предполагается, что $1 \gg \beta \gg a^2 / L^2$.

где S_c – источник и τ – время жизни, описывает рождение ионов, беспыльковительное движение их ведущих центров и гибель (например, из-за перезарядки). Функция распределения нормирована так, что количество ионов равно $N_i = \frac{B_{\perp}^2 \rho_{\perp}^3}{4\pi \epsilon_{\perp 0}} \int n d\phi dp dz$, где $n = \int f dp_{\parallel}$ – безразмерная плотность ведущих центров.

3.2 Стационарное решение кинетического уравнения

Представим функцию распределения f и источник ионов S_c в виде Фурье рядов по азимутальному углу ϕ и канонической угловой переменной Φ (см. Приложение II):

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \sum_{m>0} (f_m e^{im\phi} + c.c) = f_0 + \sum_{m>0} (\check{f}_m e^{im\Phi} + c.c), \\ S_c &= S_0 + \sum_{m>0} (S_m e^{im\phi} + c.c) = S_0 + \sum_{m>0} (\check{S}_m e^{im\Phi} + c.c). \end{aligned} \quad (11)$$

Тем самым мы определяем связь между коэффициентами $\check{f}_m = f_m e^{-im(\Psi_{z,p} + q\theta)}$. В канонических переменных кинетическое уравнение для амплитуд \check{f}_m , как функций от баунс угла θ , имеет простой вид:

$$\partial_{\theta} \check{f}_m + im\check{q}\check{f}_m = \frac{\check{S}_m}{\Omega_{\theta}}, \quad (12)$$

где $\check{q} = q - i/(m\Omega_{\theta}\tau)$ (азимутальное число m не равно нулю). Периодическое по θ решение равно

$$\check{f}_m[\theta] = \frac{1}{2\Omega_{\theta}} \int_0^{2\pi} \left(\text{sign}[\theta - \tilde{\theta}] - i \cot[\pi m \tilde{q}] \right) \check{S}_m[\tilde{\theta}] e^{im\check{q}(\tilde{\theta} - \theta)} d\tilde{\theta}, \quad (13)$$

где $0 \leq \theta \leq 2\pi$, и для краткости опущены зависимости от сохраняющихся обобщенных импульсов p и J , сопряженных с углами Φ и θ (см. Приложение II). Возвращаясь к функциям f_m и S_m , получаем:

$$\begin{aligned} f_m[\theta] &= \frac{1}{2\Omega_{\theta}} \int_0^{2\pi} \left(\text{sign}[\theta - \tilde{\theta}] - i \cot[\pi m \check{q}] \right) S_m[\tilde{\theta}] \times \\ &\times \exp \left[im(\Psi_{z,p}[\theta] - \Psi_{z,p}[\tilde{\theta}]) + im(\check{q} - q)(\tilde{\theta} - \theta) \right] d\tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае $p_{\parallel} \geq 0$ (т.е. $0 \leq \theta \leq \pi$) переход к переменным $\{z, E, p\}$ (здесь $E = \mathcal{H}_0$ есть безразмерная энергия) дает

$$f_{m+}[z, E, p] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\text{sign}[z - \tilde{z}] - i \cot[\pi m \tilde{q}]) \mathcal{S}_{m+}[\tilde{z}, E, p] \times \\ \times e^{im(\tilde{\zeta}[z, \cdot] - \tilde{\zeta}[\tilde{z}, \cdot])} \Lambda[\tilde{z}, E, p] d\tilde{z} + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (-1 - i \cot[\pi m \tilde{q}]) \mathcal{S}_{m-}[\tilde{z}, E, p] e^{im(\tilde{\zeta}[z, \cdot] + \tilde{\zeta}[\tilde{z}, \cdot] + 2\pi \tilde{q})} \Lambda[\tilde{z}, E, p] d\tilde{z}, \quad (15)$$

где

$$\tilde{\zeta}[z, E, p] = \int_{-\infty}^z \Lambda[z', E, p] (-\omega_{\phi}[z'] + i/\tau) dz', \quad \tilde{q}[E, p] \equiv \frac{-\tilde{\zeta}[\infty, E, p]}{\pi}, \\ \Lambda[z, E, p] \equiv \frac{1}{\sqrt{2(E - \bar{\mathcal{B}}[p, z])}}, \text{ если } E > \bar{\mathcal{B}}[p, z], \text{ иначе } \Lambda = 0,$$

а \mathcal{S}_{m+} и \mathcal{S}_{m-} гармоники источника фиксированной энергии для положительного и отрицательного продольного импульса, соответственно. Аналогично, в случае $p_{\parallel} < 0$ (т.е. $\pi < \theta_z \leq 2\pi$) переход в уравнении (14) к переменным $\{z, E, p\}$ дает

$$f_{m-}[z, E, p] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - i \cot[\pi m \tilde{q}]) \mathcal{S}_{m+}[\tilde{z}, E, p] e^{im(-\tilde{\zeta}[z, \cdot] - \tilde{\zeta}[\tilde{z}, \cdot] - 2\pi \tilde{q})} \times \\ \times \Lambda[\tilde{z}, E, p] d\tilde{z} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (-\text{sign}[z - \tilde{z}] - i \cot[\pi m \tilde{q}]) \mathcal{S}_{m-}[\tilde{z}, E, p] \times \\ \times e^{im(-\tilde{\zeta}[z, \cdot] + \tilde{\zeta}[\tilde{z}, \cdot])} \Lambda[\tilde{z}, E, p] d\tilde{z}. \quad (16)$$

Используя сумму выражений (15) и (16), находим амплитуды азимутальных мод плотности в виде интегралов от источников $\mathcal{S}_{m\pm}$:

$$n_m[z, p] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{z} \int_{-\infty}^{\infty} dE \times \\ \times (\mathcal{S}_{m+}[\tilde{z}, E, p] \mathcal{D}_m[z, \tilde{z}, E, p] - \mathcal{S}_{m-}[\tilde{z}, E, p] \mathcal{D}_{-m}[z, \tilde{z}, E, p]), \quad (17)$$

с ядром

$$\mathcal{D}_m[z, \tilde{z}, E, p] = \frac{1}{2} \Lambda[z, E, p] \Lambda[\tilde{z}, E, p] \times \\ \times \left(\text{sign}[z - \tilde{z}] e^{im\tilde{\zeta}[z, \cdot]} - e^{-im\tilde{\zeta}[z, \cdot]} - 2i \frac{\cos[m\tilde{\zeta}[z, \cdot]]}{\tan[\pi m\tilde{q}]} \right) e^{-im\tilde{\zeta}[\tilde{z}, \cdot]}. \quad (18)$$

Отметим, что при $\tau \rightarrow \infty$ ядро D_m обладает симметрией $\mathcal{D}_m[z, \tilde{z}] - \mathcal{D}_{-m}[\tilde{z}, z] = \mathcal{D}_{-m}^*[\tilde{z}, z] - \mathcal{D}_m^*[z, \tilde{z}]$ и имеет особенности в точках, где $m\tilde{q}$ – целое число.

3.3 Возмущение гамильтониана для тестовых частиц

В безразмерных обозначениях диамагнитное возмущение магнитного поля (см. [6]) равно $\delta\mathcal{B} = -\overline{n\mathcal{B}}$. Оно определяет возмущение гамильтониана для тестовых частиц

$$\delta\mathcal{H} \equiv \sum_{m>0} \mathcal{H}_m e^{im\phi} + c.c. = - \sum_{m>0} \overline{\mathcal{B}n_m} e^{im\phi} + c.c., \quad (19)$$

где

$$\mathcal{H}_m[p, z] = - \int_0^\infty dp' K_{2,m} [\sqrt{2p}, \sqrt{2p'}] \mathcal{B}[z, p'] \int_{-\infty}^\infty d\tilde{z} \times \\ \times \int_{-\infty}^\infty dE (\mathcal{S}_{m+}[\tilde{z}, E, p'] \mathcal{D}_m[z, \tilde{z}, E, p'] - \mathcal{S}_{m-}[\tilde{z}, E, p'] \mathcal{D}_{-m}[z, \tilde{z}, E, p']) . \quad (20)$$

и $K_{2,m} [\sqrt{2p}, \sqrt{2p'}]$ – ядро оператора двукратного усреднения по площади ларморовской орбиты (см. Приложение I). При $\tau \rightarrow \infty$ основной вклад в возмущение движения тестовых частиц дают резонансные полюса ядра D_m , а положительность τ задает правило Ландау для обхода полюсов. Сравнение вклада резонансных и нерезонансных членов приведено в Приложении IV. В таком приближении гармоники гамильтониана равны

$$\mathcal{H}_m[p, z] \simeq - \int_{-\infty}^\infty dE \sum_l K_{2,m} [\sqrt{2p}, \sqrt{2p_{m,l}}] \int_{-\infty}^\infty d\tilde{z} \mathcal{B}[z, p_{m,l}] \times \\ \times (\mathcal{S}_{m+}[\tilde{z}, E, p_{m,l}] \mathcal{R}_m[z, \tilde{z}, E, p_{m,l}] - \mathcal{S}_{m-}[\tilde{z}, E, p_{m,l}] \mathcal{R}_{-m}[z, \tilde{z}, E, p_{m,l}]) , \quad (21)$$

где

$$\mathcal{R}_m[z, \tilde{z}, E, p] = \Lambda[z, E, p] \Lambda[\tilde{z}, E, p] \frac{\cos [m\tilde{\zeta}[z, E, p]]}{|mq'_E|} e^{-im\tilde{\zeta}[\tilde{z},]},$$

$p_{m,l}[E]$ есть решение уравнения $mq[p_{m,l}, E] = l$ и производная q'_E означает производную q по p при постоянной E .

3.4 Модель для численного анализа

Для численного моделирования мы полагаем, что локализованный в короткой окрестности центрального сечения источник ионов создает узкое распределение по продольным скоростям, направленным в положительном направлении по z :

$$S_c \simeq \left\{ S_0[p] + \sum_{m>0} S_m[p] \cos [m(\phi + \chi_m[p])] \right\} \delta[z] F [p_{\parallel}, p], \quad (22)$$

где $F [p_{\parallel}, p]$ функция локализованная в узкой окрестности ($\sim \delta p_{\parallel}$) вблизи $p_{\parallel 0} \gg \delta p_{\parallel}$ и удовлетворяет нормировке $\int F [p_{\parallel}, p] dp_{\parallel} = 1$. Поэтому, $S_{m-} = 0$ и $S_{m+} \simeq S_m[p] e^{im\chi_m[p]} \delta[z] F [p_{\parallel}, p] / 2$. Ширина δp_{\parallel} предполагается достаточно малой, чтобы в этой окрестности можно было пренебречь изменением $p_{m,l}$. В результате получаем возмущение гамильтониана в виде

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}[\phi, p, z] = & - \sum_{l,m>0} K_{2,m} \left[\sqrt{2p}, \sqrt{2p_{m,l}} \right] S_m[p_{m,l}] \mathcal{B}[\tilde{p}, z] \times \\ & \times \cos [m\phi + m\chi_m[p_{m,l}] + \pi l/2] I_{m,l}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$I_{m,l} = \int_{-\infty}^{\infty} dE F [p_{\parallel}[E, \tilde{p}, z=0], \tilde{p}] \Lambda[z, E, \tilde{p}] \Lambda[0, E, \tilde{p}] \frac{\cos [m\tilde{\zeta}[z,]]}{|mq'_E|} \Bigg|_{\tilde{p}=p_{m,l}}$$

и использовано равенство $\tilde{\zeta}[0,] = -\pi q/2$, следующее из симметричности ловушки по z .

Далее для вычисления интегралов $I_{m,l}$ мы предполагаем параболическую продольную зависимость невозмущенного магнитного поля:

$\mathcal{B}[p, z] = \mathcal{B}_0[p](1 + a_z z^2/2)$, где $a_z \sim \rho_0^2/L^2$. Это дает $E = \mathcal{B}_0 + \Omega_\theta J$, $\Omega_\theta = \sqrt{a_z} \mathcal{B}_0$, $z = \sin \theta \sqrt{2J/\Omega_\theta}$, $\Lambda = 1/|\cos \theta \sqrt{2J\Omega_\theta}|$, $\omega_\phi = \mathcal{B}'_0(1 + a_z \sin^2 \theta J/\Omega_\theta)$, $\Omega_\phi = \mathcal{B}'_0(1 + a_z J/(2\Omega_\theta))$,

$$\tilde{\zeta}[z, E, p] \simeq -\frac{m}{l}(\theta + \pi/2) + \frac{\mathcal{B}'_0 a_z J}{2\Omega_\theta^2} \sin[\theta] \cos[\theta] \Big|_{\theta=\theta[z, J[E, p]]} \quad (24)$$

и, используя замену $J = \delta J (\xi^2 + X^2)$, где $X = z\sqrt{\Omega_\theta/(2\delta J)}$, находим

$$I_{m,l} \simeq \frac{1}{m\sqrt{Y} (\mathcal{B}'_0/\Omega_\theta)'} \int_0^\infty \frac{d\xi \sqrt{J_0/J} F \left[\sqrt{2\delta J(\xi^2 + X^2)\Omega_\theta}, \tilde{p} \right]}{1 + V(\xi^2 + X^2)/Y} \times \\ \times \cos [W\xi X/Y - l \arctan [X/\xi] - l\pi/2], \quad (25)$$

где штрих означает производную по p , $Y = J_0/\delta J$, $V = \{\mathcal{B}'_0 a_z J_0/(2\Omega_\theta^2)\}'/(\mathcal{B}'_0/\Omega_\theta)'$, и $W = m\mathcal{B}'_0 a_z J_0/(2\Omega_\theta^2)$.

Наконец, используя $F[\sqrt{2J\Omega_\theta}, p] = e^{-\{(J-J_0)/\delta J\}^2 \sqrt{2J/(\pi\Omega_\theta)}/\delta J}$, получаем

$$\delta\mathcal{H}[\phi, p, z] \simeq - \sum_{l,m>0} h_{m,l} \tilde{K}_{m,l}[p] \tilde{D}_{m,l}[z] \cos [m\phi + \chi_{m,l}], \quad (26)$$

где

$$h_{m,l} = \frac{S_m[p]\mathcal{B}_0[p]}{mQ'[p]\sqrt{J_0\Omega_\theta[p]}/2} \Big|_{p=p_{m,l}}, \quad \tilde{K}_{m,l}[p] = K_{2,m} \left[\sqrt{2p}, \sqrt{2p_{m,l}} \right], \\ \tilde{D}_{m,l}[z] = D_l [X[z, p_{m,l}], Y, V_{m,l}, W_{m,l}] (1 + a_z z^2/2), \\ \chi_{m,l} \equiv m\chi_m[p_{m,l}] - \frac{\pi l}{2}, \quad V_{m,l} = \frac{w'[p, J_0]}{Q'[p]} \Big|_{p=p_{m,l}}, \\ W_{m,l} = mw[p_{m,l}, J_0], \quad Q[p] = \frac{\mathcal{B}'_0[p]}{\Omega_\theta[p]}, \\ w[p, J] = \frac{a_z J}{2\Omega_\theta[p]} Q[p], \quad X[z, p] = z\sqrt{\Omega_\theta[p]Y/(2J_0)}, \\ D_l [X, Y, V, W] \equiv \sqrt{\frac{Y}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp [-(\xi^2 + X^2 - Y)^2]}{1 + V(\xi^2 + X^2)/Y} \times \\ \times \cos \left[W \frac{\xi X}{Y} - l \arctan \left[\frac{X}{\xi} \right] + \frac{\pi}{2} l \right] d\xi. \quad (27)$$

Для аппроксимации осесимметричного поля используем функцию $\mathcal{B}_0[p] = 1 - (\beta/2) / \{p/p_0 + 1\}^2$ а для аппроксимации источника возмущений используем

$$S_m[p] = s_m(\beta/2) / \left\{ p/p_m + (p_m/p)^{m/4} \right\}^2. \quad (28)$$

Процедура вычисления амплитуд s_m и фаз χ_m приведена в Приложении III.

4 Численное моделирование

В ходе моделирования выполнялось численное решение уравнений движения для тестовых частиц движущихся в возмущенном поле. Для визуализации результатов строилось сечение Пуанкаре – карта пересечений траекторий тестовых частиц с центральной плоскостью ловушки. Задавая разброс тестовых частиц по исходным параметрам, была набрана статистика радиального смещения тестовых частиц в зависимости от величины неосесимметричного возмущения магнитного поля.

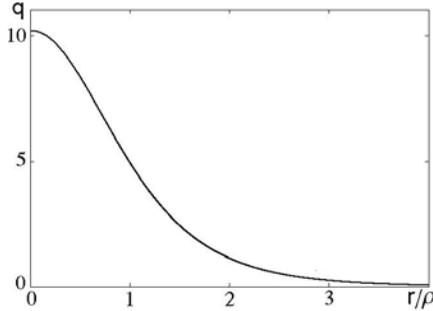


Рис. 2. Зависимость отношения частот $q = \Omega_\phi/\Omega_z$ от радиуса, нормированного на ларморовский радиус.

Для численного моделирования использовались следующие значения параметров, определяющих невозмущенные траектории: $a_z = 10^{-3}$, $\beta = 0.4$, $J_0 = 25$, $\delta J = J_0/16$, $p_0 = 2$ (зависимость $q[r]$ для этих параметров приведена на рис. 2). Характер движения частиц менялся в зависимости от выбранного величины возмущения. На рисунках 3–5 построены карты центрального сечения, соответствующие различным наибольшим значениям возмущения поля δB_m вдоль траектории иона. При малом

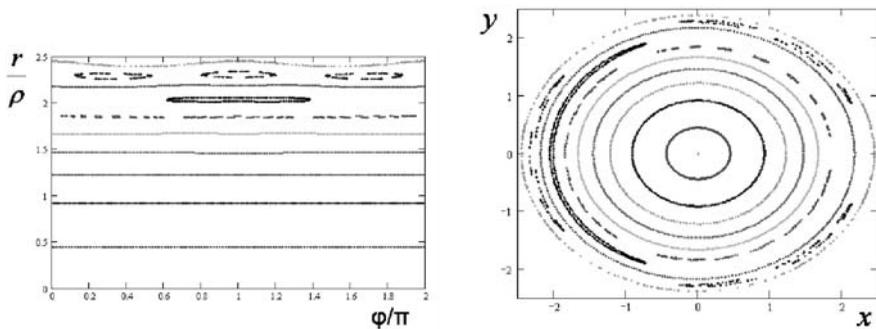


Рис. 3. Карта центрального сечения при $\mu\delta B_m = 2 \cdot 10^{-3}\mathcal{E}$.

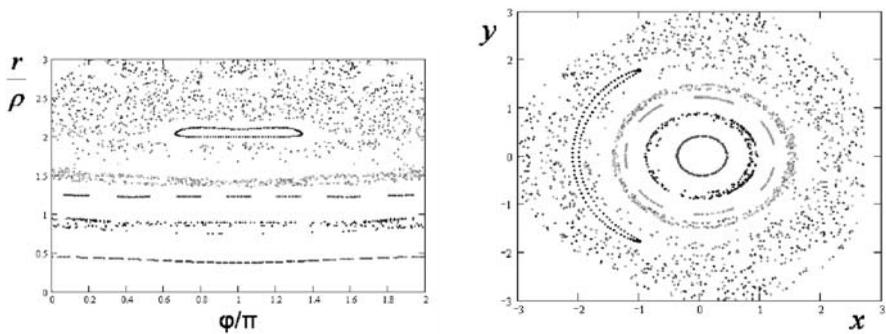


Рис. 4. Карта центрального сечения при $\mu\delta B_m = 7 \cdot 10^{-3}\mathcal{E}$.

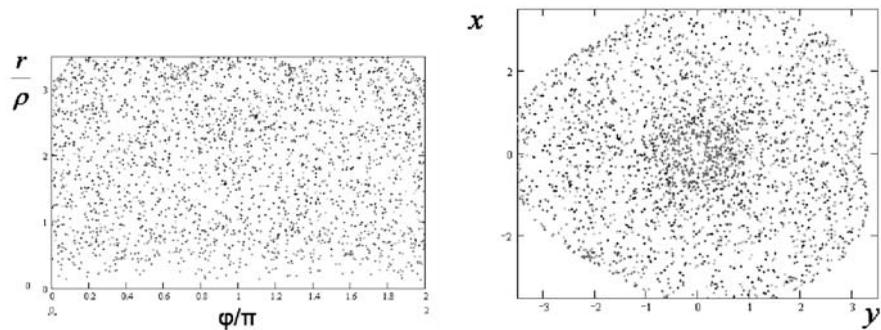


Рис. 5. Карта центрального сечения при $\mu\delta B_m = 0.2\mathcal{E}$.

возмущении (рис. 3) ясно видны нерезонансные траектории и траектории, окружающие “острова” резонансов с $q = 1/1$ и $q = 2/3$. Радиальный перенос отсутствует. По мере увеличения возмущения (рис. 4), происходит перекрытие резонансных островов, появление зон стохастического движения и радиального переноса. При дальнейшем увеличении возмущения (рис. 5) почти всю доступная область становится стохастической и наблюдается значительный перенос.

На рис. 6 приведены зависимости среднеквадратичного смещения ведущих центров от времени. Существенный перенос возникает при возмущении δB_m больше или порядка $10^{-2}\mathcal{E}/\mu$. Соответствующий коэффициент диффузии для таких возмущений по порядку величины есть $10^{-3}\rho^2/\tau_b$, где $\tau_b = 2\pi/\Omega_z$ – период баунс колебаний. Для существенно больших возмущений диффузионная зависимость транспорта быстро насыщается, и частица за короткое время может перемещаться почти в любую точку области, занятой горячей плазмой.

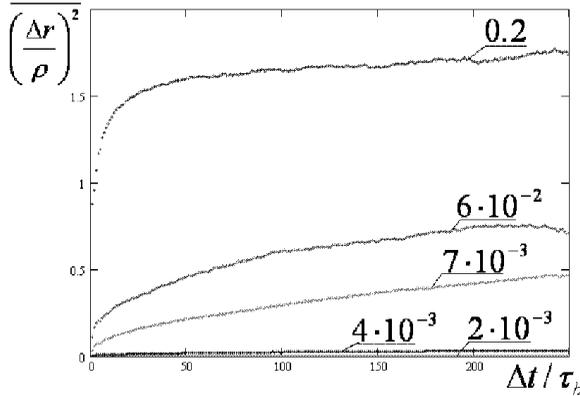


Рис. 6. Зависимость среднеквадратичного радиального смещения быстрых ионов от времени для различных значений $\mu\delta B_m/\mathcal{E}$ (от $2 \cdot 10^{-3}$ – нижняя кривая до 0.2 – верхняя кривая). Смещение нормировано на ларморовский радиус, а время – на период баунс колебаний τ_b .

5 Заключение

Описанная модель бесстолкновительного стохастического переноса в аксиально симметричной открытой ловушке с малыми неосесимметричными возмущениями позволяют сделать выводы о параметрах ловушки и плазмы при которых может иметь место такой перенос.

Как следует из оценки (4), для этого необходимо высокое значение β , а так же малая величина отношения квадрата радиального размера a к ларморовскому радиусу ρ и длине установки L . В этом случае возмущение магнитного поля достаточно велико для перекрытия "резонансных островов" и развития стохастического переноса. Проведенное численное моделирование процесса переноса для параметров ГДЛ показало, что перекрытие резонансных траекторий и соответствующий ему перенос начинаются при возмущении магнитного поля порядка 10^{-2} от исходного магнитного поля.

Для ответа на вопрос о наличии или отсутствии переноса, необходимо так же рассматривать источник нарушения аксиальной симметрии. Рассматривая неосесимметричность инжекции в качестве такого источника, можно получить ограничения на параметры экспериментальной установки. Как следует из полученных результатов, несимметричность инжекции в существующих экспериментах на установке ГДЛ недостаточна для возникновения стохастического переноса. Однако, в проектах существенно более длинных ловушек (см. например [7]) для избежания стохастического переноса важно учитывать дополнительные требования к симметрии системы.

6 Приложение I. Усреднение по площади ларморовской орбиты

Усреднение по площади орбиты⁴ есть

$$\overline{f[\mathbf{r}]} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}|<1} f[\tilde{\mathbf{r}}] d^2\tilde{\mathbf{r}}. \quad (29)$$

Для m -ой гармоники Фурье разложения функции $f[\mathbf{r}]$ по азимутальному углу ϕ усреднение имеет вид

$$\overline{e^{im\phi} f_m[r]} = e^{im\phi} \int_0^\infty K_{1,m}[r, r'] f_m[r'] r' dr', \quad (30)$$

где симметричное ядро $K_{1,m}$ есть

$$K_{1,m}[r, r'] = \frac{2}{\pi m} \sin \left[m \arccos \left[\frac{r'^2 + r^2 - 1}{2rr'} \right] \right],$$

если $|r - 1| \leq r' \leq r + 1$, иначе 0 . (31)

Заметим, что $\int_0^\infty K_{1,m}[r, r'] r' dr' \rightarrow 1$ для $r \rightarrow \infty$.

Двойное усреднение для Фурье гармоники имеет вид

$$\overline{\overline{e^{im\phi} f_m[r]}} = e^{im\phi} \int_0^\infty K_{2,m}[r, r'] f_m[r'] r' dr', \quad (32)$$

где симметричное ядро $K_{2,m}$ есть

$$K_{2,m}[r, r'] = \int_0^\infty K_{1,m}[r, \tilde{r}] K_{1,m}[\tilde{r}, r'] \tilde{r} d\tilde{r}. \quad (33)$$

Это ядро также удовлетворяет условию $\int_0^\infty K_{2,m}[r, r'] r' dr' \rightarrow 1$ для $r \rightarrow \infty$.

⁴Под площадью ларморовской орбиты понимается площадь круга с радиусом равным ларморовскому. В этом приложении ларморовский радиус принят за единицу длины.

Двойное усреднение функции $f[\mathbf{r}]$ можно представить в форме

$$\overline{f[\mathbf{r}]} = \int \mathcal{K}[|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] f[\mathbf{r}'] d^2 r', \quad (34)$$

где

$$\mathcal{K}[\rho] = \frac{1}{\pi^2} \left(2 \arccos[\rho/2] - \rho \sqrt{1 - \rho^2/4} \right),$$

если $0 \leq \rho \leq 2$, иначе 0 . (35)

Отметим, что $d\mathcal{K}/d(\rho^2/4) = -(2/\pi^2)\sqrt{4/\rho^2 - 1}$. Подстановка в выражение (34) функции $f = e^{im\phi} f_m[r]$ дает

$$\overline{e^{im\phi} f_m[r]} = e^{im\phi} \int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^\pi \mathcal{K} \left[\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi} \right] e^{im\varphi} d\varphi \right) f_m[r'] r' dr'.$$

Таким образом, ядро оператора двойного усреднения для m -ой гармоники можно представить в виде:

$$K_{2,m}[r, r'] = \int_{-\pi}^\pi \mathcal{K} \left[\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi} \right] \cos[m\varphi] d\varphi. \quad (36)$$

7 Приложение II. Переход к каноническим переменным действие-угол

Для задачи с гамильтонианом $\mathcal{H}_0[p_\parallel, z, p] = p_\parallel^2/2 + \bar{\mathcal{B}}[p, z]$, согласно общей методике, определяем продольный адиабатический инвариант

$$J[E, p] = \frac{1}{\pi} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \sqrt{2(E - \bar{\mathcal{B}}[p, z])} dz, \quad (37)$$

как функцию энергии E и обобщенного импульса p . Выражая E через J , определяем обратную функцию $\tilde{\mathcal{H}}_0[J, p] = E[J, p]$ (которая играет роль гамильтониан в новых переменных).

Для перехода переменным действие-угол выписываем выражение для укороченного действия: $\Psi[z, \phi; E, p] = \Psi_z + p\phi$, где Ψ_z – функция с двумя

ветвями:

$$\begin{aligned}\Psi_z[z; E, p] &= \int_{z_{min}}^z \sqrt{2(E - \bar{\mathcal{B}}[p, z'])} dz' \quad (\text{для } p_{\parallel} \geq 0), \\ \Psi_z[z; E, p] &= \pi J[E, p] + \int_z^{z_{max}} \sqrt{2(E - \bar{\mathcal{B}}[p, z'])} dz' \quad (\text{для } p_{\parallel} < 0).\end{aligned}\quad (38)$$

Укороченное действие в виде $\psi[z, \phi; J, p] \equiv \Psi[z, \phi; E[J, p], p]$ есть производящая функция для перехода от исходного набора переменных $[p_{\parallel}, p; z, \phi]$ к каноническому $[J, p; \theta, \Phi]$:

$$p_{\parallel} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad p = \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad \theta = \frac{\partial \psi}{\partial J} = \frac{\Psi_{z,E}}{J_E}, \quad \Phi = \frac{\partial \psi}{\partial p} = \phi + \Psi_{z,p} - J_p \theta. \quad (39)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Psi_{z,E}[z; E, p] &\equiv \int_{-\infty}^z \Lambda[z', E, p] dz', \\ \Psi_{z,p}[z; E, p] &\equiv - \int_{-\infty}^z \omega_{\phi}[z', p] \Lambda[z', E, p] dz', \\ J_{,E}[E, p] &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda[z, E, p] dz, \\ J_{,p}[E, p] &\equiv \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\phi}[z, p] \Lambda[z, E, p] dz, \quad \omega_{\phi} \equiv \partial_p \bar{\mathcal{B}}, \\ \Lambda[z, E, p] &= \frac{1}{|v[z, E]|} = \frac{1}{\sqrt{2(E - \bar{\mathcal{B}}[p, z])}} \\ &\text{если } E > \bar{\mathcal{B}}[p, z], \quad \text{иначе } \Lambda = 0,\end{aligned}\quad (40)$$

а индекс после запятой означает частную производную ($f_{,x} \equiv \partial f / \partial x$).

Кроме самих канонических переменных, нам нужны выражения для соответствующих частот:

$$\Omega_{\theta} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_0}{\partial J} = \frac{1}{J_E}, \quad \Omega_{\phi} = q \Omega_{\theta}, \quad q \equiv \frac{1}{\Omega_{\theta}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_0}{\partial p} = -J_{,p}. \quad (41)$$

8 Приложение III. Модель захвата быстрых ионов

В рассматриваемой модели для простоты полагаем гауссовское распределение произведения плотности плазмы n_t на сечение захвата быстрых ионов σ :

$$n_t[x, y]\sigma[x, y] = n_{t0}\sigma_0 \exp[-r^2/a^2], \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (42)$$

δ -образное распределение инжектируемых атомов по скоростям и гауссовское распределение поперечной плотности пучка смещенное относительно центра плазмы:

$$n_b = n_{b0} \exp[-(y-s)^2/w^2] \Big|_{x \rightarrow -\infty}. \quad (43)$$

Плотность пучка удовлетворяет уравнению

$$\frac{dn_b}{dt} = -V_f n_b n_t \sigma, \quad \frac{dx}{dt} = V_f \sin \theta_{inj}, \quad (44)$$

где $V_f = \sqrt{2E_{inj}/M_f}$ – скорость инжектированных атомов, а θ_{inj} есть питч-угол инжекции (предполагается, что скорость лежит в плоскости $\{x, z\}$ и магнитное поле направлено вдоль оси z). Это дает выражения для плотности пучка атомов

$$n_b = n_{b0} \exp \left[-\frac{(y-s)^2}{w^2} - \frac{\sqrt{\pi} a n_{t0} \sigma_0}{2 \sin \theta_{inj}} \exp[-y^2/a^2] (1 + \operatorname{erf}[x/a]) \right], \quad (45)$$

и плотности источника быстрых ионов

$$S = n_b n_t \sigma V_f = n_{b0} n_{t0} \sigma_0 V_f \times \exp \left[-\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-s)^2}{w^2} - \frac{y^2}{a^2} - \frac{\sqrt{\pi} a n_{t0} \sigma_0}{2 \sin \theta_{inj}} \exp \left[-\frac{y^2}{a^2} \right] \left(1 + \operatorname{erf} \left[\frac{x}{a} \right] \right) \right]. \quad (46)$$

Определим следующие безразмерные переменные и параметры: $\tilde{\mathbf{r}} = \{\tilde{x}, \tilde{y}\} = \mathbf{r}/a$, $\tilde{w} = w/a$, $\tilde{s} = s/a$ и $\tilde{\sigma} = a n_{t0} \sigma_0 / \sin \theta_{inj}$. В этих переменных нормализованная плотность атомарного пучка $\tilde{n}_b \equiv n_b/n_{b0}$ и нормализованная плотность источника быстрых ионов (захват атомов пучка) $\tilde{S} \equiv S/(n_{b0} n_{t0} \sigma_0 V_f)$ имеют вид

$$\tilde{n}_b[\tilde{\mathbf{r}}; \tilde{w}, \tilde{s}, \tilde{\sigma}] = \exp \left[-(\tilde{y} - \tilde{s})^2 / \tilde{w}^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tilde{\sigma} \exp[-\tilde{y}^2] (1 + \operatorname{erf}[\tilde{x}]) \right],$$

$$\tilde{S}[\tilde{\mathbf{r}}; \tilde{w}, \tilde{s}, \tilde{\sigma}] = \exp[-\tilde{r}^2] \tilde{n}_b[\tilde{\mathbf{r}}; \tilde{w}, \tilde{s}, \tilde{\sigma}], \quad (47)$$

а нормализованная плотность источника ларморовских центров \tilde{S}_c в безразмерных переменных есть

$$\tilde{S}_c[\tilde{x}, \tilde{y}; \tilde{w}, \tilde{s}, \tilde{\sigma}, \tilde{\rho}] = \tilde{S}[\tilde{x}, \tilde{y} + \tilde{\rho}; \tilde{w}, \tilde{s}, \tilde{\sigma}], \quad (48)$$

где $\tilde{\rho} = \rho/a$, $\rho = V_f \sin[\theta_{inj}]/\Omega_{fc}$ – ларморовский радиус быстрых ионов и $\Omega_{fc} = eB/(m_f c)$ – циклотронная частота. Кроме того, напишем выражение для доли захваченных частиц

$$F_{trap}[\tilde{w}, \tilde{s}, \tilde{\sigma}] \equiv 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}_b[\tilde{x} = \infty] d\tilde{y} / \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}_b[\tilde{x} = -\infty] d\tilde{y}, \quad (49)$$

с помощью которого численно находилось эффективное сечение $\tilde{\sigma}$, используя экспериментально известную величину $F_{trap} \simeq 0.6$.

8.1 Фурье гармоника источника для набор инжекторов

Рассматриваем набор из N_{inj} инжекторов с параметрами $\{\mathcal{J}_k, \varphi_k, w_k, s_k\}$, где φ_k – азимутальные углы осей инжекторов ($x_k = x \cos \varphi_k + y \sin \varphi_k$, $y_k = -x \sin \varphi_k + y \cos \varphi_k$), $k = 1, \dots, N_{inj}$ и $\mathcal{J}_k = \Delta z \sin \theta_{inj} V_f \int_{-\infty}^{\infty} n_{b0,k} dx_k$ – атомарные токи инжектированные на длине Δz . Для пучка с гауссовским профилем эти токи равны $\mathcal{J}_k = \sqrt{\pi} \Delta z \sin \theta_{inj} V_f n_{b0,k} w_k$. Суммарный источник ведущих центров быстрых ионов в цилиндрических координатах есть

$$\begin{aligned} S_{c\Sigma}[r, \varphi] &= n_{t0} \sigma_0 V_f \sum_{k=1}^{N_{inj}} n_{b0,k} \times \\ &\times \tilde{S}\left[\frac{x \cos \varphi_k + y \sin \varphi_k}{a}, \frac{(y \cos \varphi_k - x \sin \varphi_k + \rho)}{a}; \frac{w_k}{a}, \frac{s_k}{a}, \frac{an_{t0}\sigma_0}{\sin \theta_{inj}}\right] = \\ &= \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{\pi} a^2 \Delta z} \sum_{k=1}^{N_{inj}} \frac{\mathcal{J}_k}{\tilde{w}_k} \times \\ &\times \tilde{S}[\cos[\varphi - \varphi_k]r/a, \sin[\varphi - \varphi_k]r/a + \tilde{\rho}; \tilde{w}_k, \tilde{s}_k, \tilde{\sigma}], \quad (50) \end{aligned}$$

а его Фурье гармоники равны

$$S_{c\Sigma,m}[r] = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{\pi}a^2\Delta z} \sum_{k=1}^{N_{inj}} \frac{\tilde{\mathcal{J}}_k}{\tilde{w}_k} \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}[\cos[\varphi - \varphi_k]r/a, \sin[\varphi - \varphi_k]r/a + \tilde{\rho}; \tilde{w}_k, \tilde{s}_k, \tilde{\sigma}] e^{-im\varphi} d\varphi. \quad (51)$$

Таким образом, используемые в выражении (22) амплитуды нормализованных гармоник источника имеют вид

$$S_m[p] \equiv \frac{2|S_{c\Sigma,m}|4\pi\epsilon_{\perp 0}\Delta z}{B_0^2\rho_0\omega_{ci0}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \tilde{\rho}\tilde{\sigma} \sum_{k=1}^{N_{inj}} \frac{\tilde{\mathcal{J}}_k}{\tilde{w}_k} \times \\ \times \left| \int_0^{2\pi} \tilde{S}[\cos[\varphi - \varphi_k]\tilde{\rho}\sqrt{2p}, \sin[\varphi - \varphi_k]\tilde{\rho}\sqrt{2p} + \tilde{\rho}; \tilde{w}_k, \tilde{s}_k, \tilde{\sigma}] e^{-im\varphi} d\varphi \right| \quad (52)$$

(здесь $\tilde{\mathcal{J}}_k = e\mathcal{J}_k/(cB_0a)$), а фазы гармоник равны $\chi_m[p] = \arg[S_{c\Sigma,m}[\tilde{\rho}\sqrt{2p}]$.

Аппроксимация радиального профиля функцией $S_{appr,m}[p] = (\beta/2) / \{p/p_m + (p_m/p)^{m/4}\}^2$ дает $S_m[p] \simeq s_m S_{appr,m}[p]$ с амплитудами $s_m = \int_0^\infty S_m[p] S_{appr,m}[p] dp / \int_0^\infty S_{appr,m}^2[p] dp$

9 Приложение IV. Сравнение влияния резонансных и нерезонансных возмущений на движение пробной частицы

Для оценки величины вклада нерезонансных членов в величину возмущения было выполнено их прямое вычисление. Степень возмущения движения пробной частицы, вызываемая поправкой к гамильтониану $\delta\mathcal{H}$ (см. (19,20)), определяется сдвигом по обобщенному импульсу p за пе-

риод невозмущенного движения:

$$\begin{aligned}
\delta p[p, \phi_0, E] &= - \int_0^T \frac{\partial \delta \mathcal{H}[p, z, \phi]}{\partial \phi} \Big|_{z=z[t], \phi=\phi[t]} dt = \\
&= \int_{-z_0}^{z_0} \Lambda[z, p, E] \left(\frac{\partial \delta \mathcal{H}[p, z, \phi]}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_0-2\pi q[p, E]-Re(\tilde{\zeta}[z, p, E])} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \delta \mathcal{H}[p, z, \phi]}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_0+Re(\tilde{\zeta}[z, p, E])} \right) dz. \quad (53)
\end{aligned}$$

Представим δp в виде

$$\delta p[p, z, E] = \int_{-z_0}^{z_0} (R_{+1}[z, p, \phi_0, E] + R_{-1}[z, p, \phi_0, E]) dz, \quad (54)$$

где величины

$$R_{+1} = -\Lambda[z, p, E] \sum_{m>0} im (\mathcal{H}_m e^{im\phi} - \mathcal{H}_m^* e^{-im\phi}) \Big|_{\phi=\phi_0+Re(\tilde{\zeta}[z, p, E])}$$

и

$$R_{-1} \equiv \Lambda[z, p, E] \sum_{m>0} im (\mathcal{H}_m e^{im\phi} - \mathcal{H}_m^* e^{-im\phi}) \Big|_{\phi=\phi_0-2\pi q[p, E]-Re(\tilde{\zeta}[z, p, E])}$$

соответствует движению в прямом (от $-z_0$ до z_0) и обратном направлении. Кроме того, представим выражение для величин \mathcal{D}_m из (20) в виде суммы $\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{m,1} + \mathcal{D}_{m,2} + \mathcal{D}_{m,3}$, где

$$\mathcal{D}_{m,1} = \frac{1}{2} \Lambda[z,] \Lambda[\tilde{z},] \left(\text{sign}[z - \tilde{z}] e^{im\tilde{\zeta}[z,]} - e^{-im\tilde{\zeta}[z,]} \right) e^{-im\tilde{\zeta}[\tilde{z},]},$$

$$\mathcal{D}_{m,2} = -i\Lambda[z,] \Lambda[\tilde{z},] \cos[m\tilde{\zeta}[z,] \cos[\pi m\tilde{q}] e^{-im\tilde{\zeta}[\tilde{z},]} Re \left[\frac{1}{\sin[\pi m\tilde{q}]} \right],$$

и

$$\mathcal{D}_{m,3} = \Lambda[z,] \Lambda[\tilde{z},] \cos[m\tilde{\zeta}[z,] \cos[\pi m\tilde{q}] e^{-im\tilde{\zeta}[\tilde{z},]} Im \left[\frac{1}{\sin[\pi m\tilde{q}]} \right].$$

Заметим, что только $\mathcal{D}_{m,3}$ давал вклад в резонансные члены, учтенные в (21,22). Теперь перепишем подынтегральные функции выражения (54) в

виде $R_{\pm 1} = R_{\pm 1, res} + R_{\pm 1, nonres}$, где “резонансные” члены $R_{\pm 1, res} \equiv R_{\pm 1, 3}$, и члены в “нерезонансной” сумме $R_{\pm 1, nonres} \equiv R_{\pm 1, 1} + R_{\pm 1, 2}$ содержат соответствующие $D_{m, k}$:

$$\begin{aligned}
 R_{-1, k} &= -\Lambda[z, p, E] \sum_{m>0} im \left\{ e^{im\phi} \int_0^{\infty} dp' K_{2, m} [\sqrt{2p}, \sqrt{2p'}] \times \right. \\
 &\times \mathcal{B}[z, p'] \int_0^{\infty} dE \mathcal{S}_{m+}[E, p'] \mathcal{D}_{m, k}[z, \tilde{z}, E, p'] - c.c. \left. \right\}_{\phi=\phi_0-2\pi q[p, E]-Re(\tilde{\zeta}[z, p, E])}, \\
 R_{+1, k} &= \Lambda[z, p, E] \sum_{m>0} im \left\{ e^{im\phi} \int_0^{\infty} dp' K_{2, m} [\sqrt{2p}, \sqrt{2p'}] \times \right. \\
 &\times \mathcal{B}[z, p'] \int_0^{\infty} dE \mathcal{S}_{m+}[E, p'] \mathcal{D}_{m, k}[z, \tilde{z}, E, p'] - c.c. \left. \right\}_{\phi=\phi_0+Re(\tilde{\zeta}[z, p, E])}. \quad (55)
 \end{aligned}$$

(здесь учтено, что источник быстрых ионов локализован в окрестности $\tilde{z} = 0$, и инжекция производится только в “положительном” направлении, то есть $S_{m-} = 0$).

Величины $R_{\pm 1, res}$ и $R_{\pm 1, nonres}$ находились численно вдоль невозмущенной траектории частицы. На рис. 7 приведен пример характерных зависимостей “резонансных” и “нерезонансных” частей подынтегрального выражения (54) для моды возмущения $m = 3$. Видно, что резонансные члены в сумме дают значительное смещение δp , в то время как нерезонансные вклады в смещение, полученные на разных участках траектории, в сумме компенсируют друг друга.

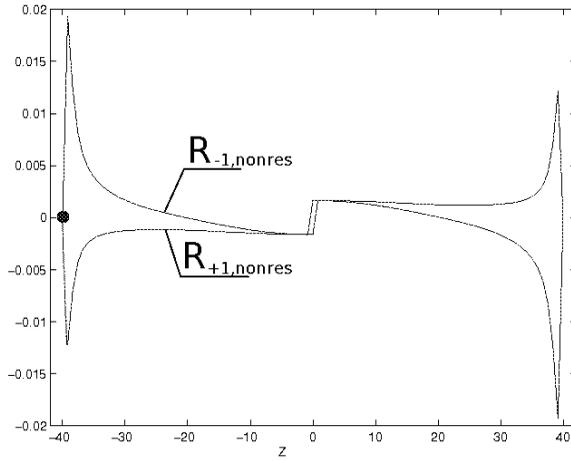
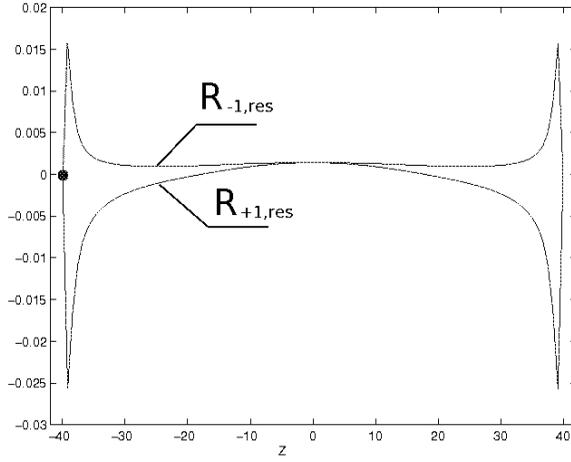


Рис. 7. Зависимости от z резонансных и нерезонансных частей подынтегрального выражения для смещения δp . Скачок в окрестности $z = 0$ соответствует области инжекции, а пики по краям – точкам остановки быстрых ионов. Среднее значение $R_{+1,res} + R_{-1,res}$ равно $6 \cdot 10^{-3}$. Среднее значение $R_{+1,nonres} + R_{-1,nonres}$ равно $4 \cdot 10^{-5}$.

Список литературы

- [1] А. Лихтенберг, М. Либерман, “Регулярная и стохастическая динамика”, М., Мир, 1984.
- [2] Б.В. Чириков, “Динамика частиц в магнитных ловушках”, сб. Вопросы теории плазмы, вып.13, с.3-73, М., Энергоатомиздат, 1984.
- [3] Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков, “Процессы переноса в аксиально-несимметричных открытых ловушках”, сб. Вопросы теории плазмы, вып.13, с.74-159, М. Энергоатомиздат, 1984.
- [4] P.A.Bagryansky, A.A.Ivanov, E.P.Kruglyakov, et. al., "Gas dynamic trap as high power 14 MeV neutron source Fusion Engineering and Design 70(2004) 13-33
- [5] В.В. Приходько, А.В. Аникеев, П.А. Багрянский и др., “Эффект формирования узкого радиального распределения плотности быстрых ионов в установке ГДЛ”, Физика плазмы, т.31, No.11, с. 969-977, (2005)
- [6] Yu.A. Tsidulko, “Two-dimensional dynamics of two-component plasma with finite beta”, Physics of Plasmas, Vol.11, N9 (2004).
- [7] Noack, K., Rogov, A., Anikeev, A.V., Ivanov, A.A., Kruglyakov, E.P., Tsidulko, Yu.A., “The GDT-based fusion neutron source as driver of a minor actinides burner”, Annals of Nuclear Energy, 35 (7), p.1216-1222, Jul 2008

Е.Ю. Колесников, Ю.А. Цидулко

Стохастический перенос плещущихся ионов

E. Yu. Kolesnikov, Yu. A. Tsidulko

Stochastic transport of sloshing ions

ИЯФ 2010-15

Ответственный за выпуск А.В. Васильев
Работа поступила 11.05.2010 г.

Сдано в набор 12.05.2010 г.

Подписано в печать 12.05.2010 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.7 печ.л., 1.4 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 15

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.