

УЧРЕЖДЕНИЕ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН  
(ИЯФ СО РАН)

Ю.А. Цидулко, И.С. Черноштанов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ  
СО СПИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

ИЯФ 2009-3

НОВОСИБИРСК  
2009

# Нелинейные волны со спиральной симметрией

*Ю.А. Цидулко, И.С. Черноштанов*

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера  
630090, Новосибирск, Россия

## Аннотация

В работе представлен класс точных нелинейных решений системы уравнений Максвелла-Власова для бесстолкновительной плазмы, обладающих спиральной симметрией. В пределе линейной теории примерами таких решений являются циркулярно поляризованные электромагнитные волны, геликоны и альфвеновские волны с волновым вектором, параллельным стационарному магнитному полю, и с параметрами, заставляющими затухание Ландау. Рассмотрены случаи нерелятивистского и релятивистского уравнения Власова, а также система уравнений Прока-Власова. Представленные решения могут быть полезным инструментом для задач, в которых волна и плазма находятся в состоянии близком к некоторому нелинейному равновесию.

## Non-linear spirally symmetric waves

*Yu. A. Tsidulko, I. S. Chernoshtanov*

Budker Institute for Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, Russia

A class of precise non-linear spirally symmetric solutions of Maxwell-Vlasov equations for collisionless neutral plasmas is presented. In the linear theory limit, the examples of such solutions are the circular polarized electromagnetic waves, helicons and Alfvén waves with the wave vector parallel to a steady state uniform magnetic field and with parameters providing zero Landau damping. The both sets of the non-relativistic and relativistic Vlasov equations with the Maxwell's equations as well as Proca-Vlasov set are considered. The presented solutions can be useful instrument for study of the processes, where the wave and plasma are in a state close to some non-linear equilibrium.

---

# 1 Введение

Предположение о высоком уровне симметрии часто помогает находить точные нелинейные решения даже для таких сложных систем уравнений, как уравнения Максвелла-Власова. Например, предположение о полной трансляционной симметрии (в пространстве и времени) для функции распределения и для электромагнитного поля позволяет получить общее решение. Такое решение содержит произвольные функции двух параметров: скорости вдоль однородного магнитного поля и модуля поперечной скорости. Выбор функций ограничен только требованием нейтральности и отсутствием продольного тока. Конечно, никаких волн в таком тривиальном примере не содержится.

Более содержательные результаты могут быть получены, если трансляционную симметрию во времени и в одном из пространственных направлений заменить спиральной симметрией. Такая симметрия предполагает, что смещение на любой 4-вектор  $\{c\Delta t, \Delta \mathbf{r}\}$  приводит к повороту векторных и тензорных величин (таких, как электрическое и магнитное поле, моменты функции распределения<sup>1</sup>) на угол  $\Delta\psi = \omega\Delta t - \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r}$  вокруг направления  $\mathbf{k}$ , где  $\{\omega/c, \mathbf{k}\}$  есть некоторый фиксированный 4-вектор. В линейной теории хорошо известными примерами таких решений являются циркулярно поляризованные электромагнитные волны, геликоны и альфвеновские волны с волновым вектором, параллельным стационарному магнитному полю.

В настоящей работе представлен класс точных нелинейных решений системы уравнений Максвелла-Власова, обладающих такой симметрией. Эти решения могут служить исходным базисом при изучении существенно нелинейных процессов, например, нелинейной стадии альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости.

Известно, что движение заряженных частиц является точно интегрируемым, когда электрическое и магнитное поле обладают указанной выше симметрией. Есть ряд работ (например [1, 2, 3]), где такое движение подробно описано. Среди них наиболее полное гамильтоново описание дано в работе [3]. В настоящей работе мы приводим полный набор

---

<sup>1</sup>При этом не должны меняться скалярные величины, такие, как плотность и скаляры, образованные путем свертки указанных векторов и тензоров.

интегралов движения в рамках гамильтонова формализма в расширенном фазовом пространстве [4] для нерелятивистского и релятивистского случаев. Любые функции однозначных интегралов движения являются точными решениями уравнения Власова. Таким образом, наша задача заключается в том, чтобы отобрать среди них функции распределения, порождающие именно те электромагнитные поля, которые использовались при вычислении интегралов движения. Результат заключается в том, что функция распределения для каждой компоненты плазмы есть произвольная функция двух интегралов движения, а система из трех замыкающих скалярных уравнений связывает некоторые интегралы от выбранных функций и параметры волны.

Рассматриваемые решения равномерно заполняют инвариантные то-ры, соответствующие интегралам движения. Поэтому в пределе линейной теории эти решения соответствуют таким параметрам плазмы и волны, при которых затухание Ландау точно обращается в ноль. Можно надеяться, что представленные решения могут служить хорошим приближением для практически интересных задач, в которых волна и плазма близки к некоторому нелинейному равновесию, а фазовое размешивание происходит достаточно быстро.

Дальнейший порядок изложения следующий. В разделе 2 рассмотрен случай с нерелятивистским уравнением Власова, а в подразделе 2.3 приведено несколько конкретных примеров. В разделе 3 рассмотрен случай с релятивистским уравнением Власова и приведен простейший пример. Одной из задач этого раздела мы считаем определение искомым решений в терминах релятивистски-инвариантных величин (хотя простой физический смысл этих величин становится очевидным лишь в специальной системе отсчета, где либо  $\omega$ , либо  $\mathbf{k}$  обращаются в ноль). В разделе 4 результаты распространены на систему уравнений Прока-Власова [7, 8] для гипотетического случая конечной массы фотона. В заключении обсуждаются возможные пути применения результатов настоящей работы.

## 2 Нерелятивистское уравнение Власова

Векторный потенциал для полей, обладающих предполагаемой симметрией, может быть выбран в следующей форме

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{\Lambda} + \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{\Lambda}(\mathbf{r}) \equiv \frac{B}{2k} \mathbf{k} \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{r}) \equiv \mathcal{A} \left( \tilde{\mathbf{a}} \cos \psi + \tilde{\tilde{\mathbf{a}}} \sin \psi \right), \quad (1)$$

где  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{A}$  – константы,  $\tilde{\mathbf{a}}$  и  $\tilde{\tilde{\mathbf{a}}} \equiv \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{a}}/k$  – постоянные единичные вектора, ортогональные волновому вектору<sup>2</sup>  $\mathbf{k}$ ,  $k \equiv |\mathbf{k}|$  и  $\psi(t, \mathbf{r}) \equiv \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  – фаза волны. Для краткости записи мы будем использовать комплексный вектор поляризации  $\mathbf{a} \equiv \tilde{\mathbf{a}} + i\tilde{\tilde{\mathbf{a}}}$ , для которого справедливы равенства  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$  и  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* = 2$ . В этих терминах  $\lambda = \mathcal{A}\mathcal{R}e(\mathbf{a}e^{-i\psi})$ . Скалярный потенциал  $\varphi$  предполагается равным нулю<sup>3</sup>. Векторному потенциалу  $\mathbf{A}$  соответствует однородное стационарное магнитное поле амплитуды  $\mathcal{B}$ , направленное вдоль  $\mathbf{k}$ . Векторному потенциалу  $\lambda$  соответствуют ортогональные к вектору  $\mathbf{k}$  вращающиеся электрическое и магнитное поля с однородным широм вдоль  $\mathbf{k}$ .

Подстановка (1) в уравнение Максвелла  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \partial_t^2 \mathbf{A}/c^2 = 4\pi\mathbf{j}/c$  дает следующее уравнение

$$(k^2 - \omega^2/c^2)\mathcal{A}\mathcal{R}e(\mathbf{a}e^{-i\psi}) = 4\pi\mathbf{j}/c. \quad (2)$$

Плотность тока должна быть записана как  $\mathbf{j} = \sum_s q_s \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_s f_s d^3p$ , где  $\mathbf{v}_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv (\mathbf{p} - q_s \mathbf{A}/c)/m_s$  есть скорость частицы,  $\mathbf{p}$  – вектор обобщенного импульса,  $m_s$  и  $q_s$  – масса и заряд частицы,  $c$  – скорость света. Сумма выполняется по всем сортам частиц плазмы  $s = e, i, \dots$ . Функция распределения<sup>4</sup>  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  должна удовлетворять уравнению Власова  $df/dt \equiv \partial_t f + \{f, H\}\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = 0$ , где гамильтониан есть  $H(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = m\mathbf{v}^2(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})/2$  а скобки  $\{a, b\}\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \equiv \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial b}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial a}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial b}{\partial \mathbf{r}}$  есть скобки Пуассона. Кроме того, функции распределения должны удовлетворять условию нейтральности  $\sum_s q_s \int_{-\infty}^{\infty} f_s d^3p = 0$ , поскольку электрическое поле  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A}/c$  в нашем случае является бездивергентным.

Для того чтобы все моменты  $\int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\beta \dots \mathbf{v}_\gamma) f d^3p$  удовлетворяли предполагаемой симметрии, функция распределения должна быть представима в виде  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \tilde{f}(\mathbf{V})$ , где

$$\mathbf{V}(\mathbf{v}, \psi) \equiv \mathbf{k}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})/k^2 + \mathcal{R}e(\mathbf{a}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^*)e^{i\psi}) \quad (3)$$

есть “спиральная” комбинация векторов  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{r}$  и времени. Вектор импульса в терминах скорости  $\mathbf{V}$  принимает вид

$$\mathbf{p} = m\mathbf{k}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})/k^2 + m\mathcal{R}e(\mathbf{a}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^*)e^{-i\psi}) + q\mathbf{A}/c,$$

<sup>2</sup>Здесь для простоты мы предполагаем  $\mathbf{k} \neq 0$ . Случай с  $\mathbf{k} = 0$  может быть получен из релятивистской версии.

<sup>3</sup>Важным дополнением предполагаемой симметрии (использованным и в работах [1, 2, 3]) является отсутствие электрического поля параллельного вектору  $\mathbf{k}$ . В противном случае движение частиц перестает быть точно интегрируемым (если  $\mathcal{B} \neq 0$ ). Случай с  $\mathcal{B} = 0$  и  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} \neq 0$  будет рассмотрен в отдельной работе.

<sup>4</sup>Мы опускаем индекс сорта частиц  $s$  там, где это не мешает пониманию.

и уравнение (2) может быть переписано в форме, не содержащей фазу волны:

$$(k^2 - \omega^2/c^2)\mathcal{A}\tilde{\mathbf{a}} = \sum_s \frac{4\pi q_s m_s^3}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{V} \tilde{f}_s d^3V. \quad (4)$$

## 2.1 Интегралы движения

Мы используем расширенное фазовое пространство [4], с координатами  $\{r^\alpha\} = \{ct, \mathbf{r}\}$  и импульсами  $\{P_\alpha\} = \{-\mathcal{E}/c, \mathbf{p}\}$ , где энергия  $\mathcal{E}$  есть значение (переменное, в общем случае) гамильтониана  $H$  вдоль траектории и  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ . В таком гамильтоновом формализме роль “времени” играет дополнительный параметр  $\tau$ , который явно не участвует в гамильтониане расширенного фазового пространства  $\mathcal{H} = H - E$ .

Для того чтобы выбрать функции распределения, удовлетворяющие уравнению Власова, мы используем каноническое преобразование к новому набору обобщенных импульсов  $\{\mathcal{P}_\alpha\} \equiv \{J, K, L, M\}$  и координат  $\{Q^\alpha\} \equiv \{\mathcal{T}, \Psi, \Phi, \Theta\}$ , компоненты которых определены следующим образом

$$\begin{aligned} J &\equiv (\mathcal{E} - \omega K) \frac{1}{kc}, & \mathcal{T} &\equiv -kct, \\ K &\equiv \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^2}, & \Psi &\equiv \arg(p_-) - \psi, \\ L &\equiv \left( \frac{|p_-|^2}{2m} + \Omega K \right) \frac{1}{kc}, & \Phi &\equiv \arg\left(\frac{p_+}{p_-}\right) \frac{kc}{\Omega}, \\ M &\equiv \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - K, & \Theta &\equiv \arg(p_+), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Omega \equiv q\mathcal{B}/(mc)$  – циклотронная частота и  $p_\pm$  – обозначение для комплексных выражений  $p_\pm \equiv (\mathbf{p} \pm q\mathbf{\Lambda}/c) \cdot \mathbf{a}$ . Эти переменные удовлетворяют условиям каноничности  $\{Q^\alpha, Q^\beta\}_{r,P} = \{\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{P}_\beta\}_{r,P} = 0$  и  $\{Q^\alpha, \mathcal{P}_\beta\}_{r,P} = \delta_\beta^\alpha$ , где  $\{a, b\}_{r,P} \equiv \frac{\partial a}{\partial r^\alpha} \frac{\partial b}{\partial P_\alpha} - \frac{\partial a}{\partial P_\alpha} \frac{\partial b}{\partial r^\alpha}$  есть 4-мерные скобки Пуассона. В новых переменных гамильтониан расширенного фазового пространства есть

$$\mathcal{H} = \frac{k^2 K^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left| \sqrt{2m(kcL - \Omega K)} e^{i\Psi} - q\mathcal{A}/c \right|^2 - kcJ - \omega K. \quad (6)$$

Он зависит только от следующего набора переменных  $\{J, K, L, \Psi\}$ . Сле-

довательно, обобщенные импульсы  $J$ ,  $L$ ,  $M$  и координата<sup>5</sup>  $\Theta$  есть интегралы движения (помимо тривиального  $\mathcal{H} = 0$ ). Заметим, что  $|p_+|^2 = 2m(kcL + \Omega M)$ , поэтому выражения  $\mathcal{R}e(p_+) = |p_+| \cos \Theta$  и  $\mathcal{I}m(p_+) = |p_+| \sin \Theta$  являются однозначными интегралами движения.

В терминах теоремы Нетер интеграл  $J$  соответствует вращению с трансляцией во времени, а интеграл  $M$  соответствует вращению с трансляцией вдоль  $\mathbf{k}$ . Интегралы  $\mathcal{R}e(p_+)$  и  $\mathcal{I}m(p_+)$  соответствуют трансляциям поперек  $\mathbf{k}$ .

Поскольку гамильтониан (6) фактически является одномерным гамильтонианом для пары  $\{K, \Psi\}$ , три оставшиеся интеграла движения могут быть получены стандартным путем перехода к переменным действие-угол. Нужно выразить гамильтониан в терминах адиабатического инварианта  $I_K(\mathcal{H}, J, L) \equiv \oint K d\Psi/(2\pi)$ , то есть  $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}(I_K, J, L)$ . Затем, используя каноническое преобразование перехода к переменным действие-угол, найти остальные интегралы движения:  $i_K \equiv \Psi_K + \mathcal{T}\Omega_K/(kc)$ ,  $i_L \equiv \Psi_L + \mathcal{T}\Omega_L/(kc)$  и  $i_J \equiv \mathcal{T} + kc\tau$  (явные выражения для этих интегралов нам не понадобятся). Здесь частоты равны  $\Omega_J = -kc$ ,  $\Omega_K \equiv \partial\tilde{\mathcal{H}}/\partial I_K$ ,  $\Omega_L \equiv \partial\tilde{\mathcal{H}}/\partial L$ , а углы  $\Psi_{K,L}$  являются переменными, канонически сопряженными с  $I_K$  и  $L$ . Однозначная переменная  $\mathcal{T}$  остается сопряженной с  $J$ , поскольку  $J$  участвует в  $\mathcal{H}$  линейно с постоянным коэффициентом  $-kc$ .

Теперь любая функция переменных расширенного формализма может быть представлена, как функция восьми интегралов движения и параметра  $\tau$ . В переменных (5) “спиральная” скорость (3) равна

$$\mathbf{V} = \frac{1}{m} \left\{ \mathbf{k}K + \mathcal{R}e(ae^{-i\Psi})\sqrt{2m(kcL - \Omega K)} - \tilde{a}q\mathcal{A}/c \right\} \quad (7)$$

и зависит только от набора  $\xi \equiv \{K, L, \Psi\}$ . А будучи выраженной в терминах интегралов движения, скорость  $\mathbf{V}$  содержит  $J$ ,  $L$ ,  $\mathcal{H}$  и зависящую от  $\tau$  комбинацию  $\Psi_K(\tau) = i_K - i_J\Omega_K/(kc) + \Omega_K\tau$ .

## 2.2 Замыкающие уравнения

Уравнение Власова для расширенного пространства есть<sup>6</sup>  $\{f, \mathcal{H}\}_{\tau, P} = 0$  при  $\mathcal{H} = 0$ . Его общее решение есть произвольная функция шести однозначных  $\tau$ -независимых интегралов движения  $J$ ,  $L$ ,  $\mathcal{R}e(p_+)$ ,  $\mathcal{I}m(p_+)$

<sup>5</sup>Факт, что угол  $\Theta$  является интегралом движения, означает вырождение, аналогичное тому, которое имеет место в задачах движения заряженной частицы в однородном магнитном поле или в кулоновском электрическом поле [5].

<sup>6</sup>Другими словами, функция  $f$  должна удовлетворять уравнениям  $df/d\tau = 0$  и  $\partial f/\partial\tau = 0$  на “поверхности”  $\mathcal{H} = 0$ .

и, например,  $\cos i_K$ ,  $\cos i_L$ . Но два и только два из них могут быть выражены на “поверхности”  $\mathcal{H} = 0$  через компоненты скорости  $\mathbf{V}$ , а именно,  $J = \frac{m\mathbf{V}}{kc} \cdot \left( \frac{\mathbf{V}}{2} - \frac{\omega\mathbf{k}}{k^2} \right)$  и  $L = \frac{|m\mathbf{V} \cdot \mathbf{a} + qA/c|^2}{2mkc} + \frac{m\Omega\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}}{k^3c}$ . Следовательно, любая функция вида  $f = F(J, L)$  удовлетворяет одновременно уравнению Власова и условиям предполагаемой симметрии. Требование, чтобы функция распределения была функцией только от  $J$  и  $L$  в окрестностях точек “поверхности”  $\mathcal{H} = 0$ , является не только достаточным, но и необходимым. Действительно, функция  $\tilde{f}(\mathbf{V}(J, L, \mathcal{H}, \Psi_K))$  должна содержать только такие комбинации компонент скорости  $\mathbf{V}$ , которые исключают  $\Psi_K(\tau)$  в некоей окрестности любой точки, принадлежащей “поверхности”  $\mathcal{H} = 0$ .

Здесь нужно сделать важное замечание. Пересечение “поверхностей”  $\mathcal{H} = 0$ ,  $J = const$  и  $L = const$  не всегда является односвязным. А именно, когда обобщенный импульс  $L$  достаточно большой,  $L > L_c$ , существует диапазон  $J_-(L) < J < J_+(L)$ , где кривая  $K(\Psi)|_{J, L=const, \mathcal{H}=0}$  состоит из двух несвязных частей. Нижнее значение  $J_-$  соответствует сепаратрице, которая отделяет частицы, захваченные волной, от частиц, отстающих и опережающих волну [3]. В этом диапазоне, вместо общей функции  $F(J, L)$  может быть использована функция с двумя ветвями на  $\mathcal{H} = 0$ :

$$F(J, K, L) = \begin{cases} F_1(J, L) & \text{для } K < K_d(L), \\ F_2(J, L) & \text{для } K > K_d(L). \end{cases} \quad (8)$$

Разрыв этой функции по  $K$  лежит вне “поверхности”  $\mathcal{H} = 0$ , поэтому (8) также есть решение уравнения Власова в указанной области. В примере 3 раздела 2.3 приведены формулы (23–26), определяющие края области  $L_c$ ,  $J_{\pm}(L)$  и  $K_d(L)$ .

Теперь уравнение (4) может быть переписано в терминах набора  $\xi = \{K, L, \Psi\}$ :

$$(k^2 - \omega^2/c^2)\mathcal{A}\tilde{\mathbf{a}} = \sum_s 4\pi q_s m_s^3 c^2 \hat{I}_s(\mathbf{V}(\xi)), \quad (9)$$

где использован следующий интегральный оператор

$$\hat{I}_s(G) \equiv \frac{k^2}{m^2 c^2} \int d^3\xi G F_s(J, L) \Big|_{\mathcal{H}=0}. \quad (10)$$

Область интегрирования здесь определяется соотношениями (5). Более удобная форма этого оператора приведена в разделе 2.3. Кроме того, мы

определяем процедуру усреднения  $\langle G \rangle_s \equiv \hat{I}_s(G) / \hat{I}_s(1)$ . Теперь, проекции уравнения (9) и условие нейтральности дают искомые замыкающие уравнения:

$$\sum_s q_s n_s = 0, \quad \sum_s q_s n_s \langle v_{\parallel s} \rangle_s = 0, \quad (11)$$

$$(k^2 - \omega^2/c^2)\mathcal{A} = \frac{4\pi}{c} \sum_s q_s n_s \langle v_{\lambda s} \rangle_s, \quad (12)$$

где  $n_s \equiv m_s^3 c^3 \hat{I}_s(1)$  – плотность частиц сорта  $s$ , а

$$v_{\parallel s} \equiv \frac{k}{m_s} K, \quad v_{\lambda s} \equiv \sqrt{\frac{2}{m_s}(kcL - \Omega_s K)} \cos \Psi - \frac{q_s \mathcal{A}}{m_s c} \quad (13)$$

– проекции скорости частиц на вектора  $\mathbf{k}$  и  $\boldsymbol{\lambda}$ , соответственно. Физический смысл замыкающих уравнений (11,12) совершенно очевиден. Они могли быть записаны сразу без всяких вычислений. Весь фокус, в этом смысле, заключается в том, чтобы правильно определить процедуру усреднения в них.

В общем случае, получаемые решения соответствуют ненулевому среднему импульсу плазмы в выбранной системе отсчета. Часто удобно предполагать, что выбранная система отсчета является системой покоя плазмы. Приравнивая плотность импульса плазмы, усредненную по фазе волны, к нулю, получаем очевидное условие этого соответствия:

$$\sum_s m_s n_s \langle v_{\parallel s} \rangle_s = 0. \quad (14)$$

Наконец заметим, что наш выбор переменных (5), конечно, не является единственным. Любая производящая функция вида  $\phi_J(J, L) \tilde{T} + \phi_K(J, K, L) \tilde{\Psi} + \phi_L(J, L) \tilde{\Phi} + \phi_M(J, L, M) \tilde{\Theta}$  дает подходящий набор переменных. В частности, производящая функция  $(Lkc/\Omega - K) \tilde{\Psi} + L\tilde{\Phi}$  дает преобразование к переменным, в которых гамильтониан имеет вид работы [3], а именно,  $\mathcal{H} = C_1 \mu^2 + I_1 \mu + C_2 \sqrt{\mu} \cos \tilde{\Psi} + I_2$ , где  $\mu \equiv Lkc/\Omega - K$ , величины  $C_{1,2}$  – константы, и  $I_{1,2}$  – интегралы движения. Наш выбор был продиктован простотой рассмотрения пределов  $\mathcal{A} \rightarrow 0$  и  $\mathcal{B} \rightarrow 0$ .

### 2.3 Конкретные примеры

Для практического использования удобно в процедуре усреднения вернуться к переменным, связанным с компонентами скорости частиц. Под-

становка

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{mc}{2k}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) - \frac{m\omega}{k^2}\tilde{z}, \quad K = \frac{mc}{k}\tilde{z}, \\
 L &= \frac{mc}{2k}\left\{\left(\tilde{x} + \tilde{A}\right)^2 + \tilde{y}^2\right\} + \frac{m\Omega}{k^2}\tilde{z}, \\
 \Psi &= \arg\left(\tilde{x} + \tilde{A} + i\tilde{y}\right), \quad \tilde{A} \equiv \frac{q\mathcal{A}}{mc^2}
 \end{aligned} \tag{15}$$

приводит к следующей форме оператора (10),

$$\hat{I}(G) = \int_{-\infty}^{\infty} GF d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}, \tag{16}$$

где аргументы функций  $G(\boldsymbol{\xi})$  и  $F(J, L)$  выражены согласно (15). В этих переменных  $v_{\parallel} = c\tilde{z}$  и  $v_{\perp} = c\tilde{x}$ .

В приведенных ниже примерах предполагается, что плазма состоит из электронов с зарядом  $q_e = -e < 0$  и однозарядных ионов с  $q_i = e$ . Тогда уравнения (11,12,14) сводятся к следующим

$$n_i = n_e = n, \quad \langle \tilde{z}_i \rangle_i = \langle \tilde{z}_e \rangle_e = 0, \tag{17}$$

$$(k^2 - \omega^2/c^2)\mathcal{A} = 4\pi ne (\langle \tilde{x}_i \rangle_i - \langle \tilde{x}_e \rangle_e). \tag{18}$$

Кроме того, для упрощения записи неравенств будем полагать  $\mathcal{B} \geq 0$ .

**Пример 1.**  $\mathcal{B} > 0$ . Выбираем функции распределения в виде функций от линейной комбинации  $J$  и  $L$ , то есть  $F_s(J, L) = \check{F}_s(\alpha_s J + \beta_s L)$ , где  $\check{F}_s(x)$  – любая неотрицательная функция, интегрируемая в смысле (16) с  $G = 1, \tilde{x}, \tilde{z}$ . Уравнение  $\langle \tilde{z}_s \rangle_s = 0$  дает связь параметров с частотой

$$\beta_s/\alpha_s = \omega/\Omega_s \tag{19}$$

и определяет среднее  $\langle \tilde{x}_s \rangle_s = -\tilde{A}_s/(1 + \Omega_s/\omega)$ . Уравнение (18) дает соотношение

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \Omega_i/\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{1 + \Omega_e/\omega}, \tag{20}$$

где  $\omega_{ps} \equiv \sqrt{4\pi n e^2/m_s}$  – плазменные частоты. Это соотношение совпадает с дисперсионным соотношением<sup>7</sup> линейной теории для холодной плазмы

<sup>7</sup>Это дисперсионное соотношение содержит две альфвеновские ветви и две электромагнитные. Диапазон частот  $-\Omega_i < \omega < 0$  соответствует альфвеновской волне с вращением поля в сторону циклотронного вращения ионов. Диапазон  $0 < \omega < -\Omega_e$  соответствует альфвеновской волне (геликону) с вращением поля в электронную сторону. Диапазоны  $\omega < \omega_- < -\Omega_i$  и  $\omega > \omega_+ > -\Omega_e$  соответствуют электромагнитным волнам с левым и правым вращением.

в случае  $\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = 0$ . В нашем примере “дисперсионное соотношение” остается справедливым для любой функции  $\check{F}_s(x)$  и сколь угодно большой амплитуды  $\mathcal{A}$ , но теперь частота связана с параметрами функции распределения соотношением (19). Соотношение (19) совпадает с условием зануления затухания Ландау в линейной теории для “нехолодной” плазмы.

Для интегрируемости  $\check{F}_s$  в смысле (16) необходимо выполнение неравенства  $1 + \beta_s/\alpha_s > 0$ . Следовательно, в настоящем примере частота  $\omega = \Omega_s\beta_s/\alpha_s$  с необходимостью ограничена диапазоном альфвеновских ветвей  $-\Omega_i < \omega < -\Omega_e$ .

Если выбрать  $\check{F}_s(x) \propto \exp(-kcx)$ , тогда распределения являются двухтемпературными сдвинутыми распределениями Максвелла со спирально распределенным сдвигом вдоль  $\boldsymbol{\lambda}$  и с температурами  $T_{\parallel s} = 1/\alpha_s$  и  $T_{\perp s} = 1/(\alpha_s + \beta_s)$ . Соотношение (19) требует наличия анизотропии  $T_{\perp s}/T_{\parallel s} = 1/(1 + \omega/\Omega_s)$  для отсутствия затухания Ландау.

**Пример 2.** Все также, как в предыдущем примере 1, но  $\mathcal{B} = 0$ . Уравнение  $\langle \check{z}_s \rangle_s = 0$  дает  $\omega = 0$ , но теперь нет соотношения между  $\alpha_s$  и  $\beta_s$ . Квадрат волнового вектора равен

$$k^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \left( \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left( \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} - 1 \right), \quad (21)$$

где опять использованы обозначения  $T_{\parallel s} = 1/\alpha_s$  и  $T_{\perp s} = 1/(\alpha_s + \beta_s)$ . Поле такой “волны” есть постоянное магнитное поле с прямыми силовыми линиями и однородным широм. Для наличия тока, создающего шир, необходим сдвиг функций распределения вдоль  $\boldsymbol{\lambda}$ , а фазовое размешивание по поверхностям постоянных интегралов движения приводит к связи этого сдвига  $\propto \mathcal{A}(T_{\perp}/T_{\parallel} - 1)$  с анизотропией.

**Пример 3.**  $\mathcal{B} > 0$ . Ионная функция распределения выбрана в виде линейной комбинации “двухтемпературного” распределения  $\check{F}_i(\alpha_i J + \beta_i L)$  и распределения пучка  $F_b \propto \delta(L - L_0)\delta(J - J_0)$ , где  $\delta(x)$  есть  $\delta$ -функция Дирака. Электронная функция распределения предполагается “двухтемпературной”:  $\check{F}_e(\alpha_e J + \beta_e L)$ .

Согласно выражениям (15), пучковое распределение локализовано на эквипотенциальной линии потенциала

$$\mathcal{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left\{ (\tilde{x} + \tilde{A})^2 + \tilde{y}^2 - \mathcal{L}_0 \right\}^2 + 4\tilde{\Omega}^2(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2), \quad (22)$$

где  $\mathcal{L}_0 \equiv 2L_0k/(mc) - 2\tilde{\omega}\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{\Omega} \equiv \Omega_i/(kc)$  и  $\tilde{\omega} \equiv \omega/(kc)$ . Этот потенциал имеет один глобальный минимум в точке  $\{\tilde{x}, \tilde{y}\} = \{0, \tilde{x}_b\}$ , которую будем называть дном. Единственный параметр, который определяет

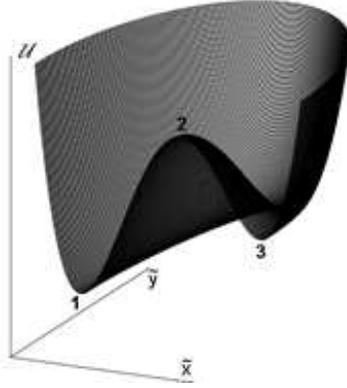


Рис. 1. Типичная форма потенциала  $\mathcal{U}(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Точки экстремумов: **1** – дно, **2** – локальный максимум, **3** – седловая точка. Значение параметра  $\Pi$ , определяющего форму потенциал, здесь равно  $\Pi = 5^{2/3}$ .

форму потенциала  $\mathcal{U}$  есть  $\Pi \equiv \frac{\mathcal{L}_0/\tilde{\Omega}^2 - 2}{3(\tilde{A}^2/\tilde{\Omega}^2)^{1/3}}$ . Если выполнено неравенство  $\Pi < 1$ , то потенциал монотонно растет во всех направлениях от точки дна. В противном случае потенциал имеет два дополнительных экстремума: локальный максимум и седловую точку (см. Рис.1). Эквипотенциаль, проходящая через седловую точку, является сепаратрисой, отделяющей захваченные (или “резонансные”) траектории (ниже седловой точки на Рис.1) от отстающих (вокруг максимума выше седловой точки) и опережающих волну (эквипотенциали выше седловой точки на “внешней стенке” Рис.1). Детали поведения отдельных частиц хорошо описаны в [2, 3].

Далее для удобства параметризации мы будем использовать величины  $\chi \equiv \tilde{x}/\tilde{A} + 1$  и  $\chi_b \equiv \tilde{x}_b/\tilde{A} + 1$ , где  $\tilde{x}_b$  есть действительный корень уравнения  $\partial_{\tilde{x}}\mathcal{U}(\tilde{x}, 0) = 0$ . Неравенство  $\chi_b > 0$  есть условие того, что  $\tilde{x}_b$  соответствует именно дну (а не другим экстремумам). В этих обозначениях величина  $L_0$  есть

$$L_0 = \frac{m c \tilde{\Omega}^2}{k} \left( 1 + \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\Omega}} - \frac{1}{\chi_b} + \frac{w^2 \chi_b^2}{2} \right), \quad (23)$$

где  $w \equiv kA/B$  – нормализованная амплитуда волны. Седловая точка возникает, когда  $\chi_b > 2/(w^2)^{1/3}$ . Следовательно,

$$L_c = \frac{m c \tilde{\Omega}^2}{k} \left( 1 + \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\Omega}} + \frac{3}{2}(w^2)^{1/3} \right). \quad (24)$$

есть упомянутое в разделе 2.2 критическое значение  $L$ . Величина  $K$  в седловой точке

$$K_d = \frac{mc\tilde{\Omega}}{k} \left\{ 1 + \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\Omega}} + \frac{w^2\chi_b^2}{4} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{8}{w^2\chi_b^3}} \right) \right\} \quad (25)$$

вместе с (23) и неравенством  $\chi_b > 2/(w^2)^{1/3}$  однозначно определяют функцию позиции разрыва  $K_d(L_0)$  для формулы (8). Аналогично, края области  $J$ , где существуют "отстающие" траектории,

$$J_{\pm} = \frac{mc\tilde{\Omega}^2}{2k} \left\{ 1 - \frac{2}{\chi_b} - \frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\Omega}^2} + w^2 \left( 1 + \frac{\chi_b}{2} + \chi_b^2 \right) + \frac{w^4\chi_b^4}{8} \left( 1 \pm \left( 1 - \frac{8}{w^2\chi_b^3} \right)^{3/2} \right) \right\} \quad (26)$$

определяют упомянутые выше функции  $J_{\pm}(L_0)$ .

Случай с произвольными  $J_0, L_0$  довольно громоздкий, и мы рассматриваем только два частных случая, когда пучок заселяет либо точку дна, либо локальный максимум. В последнем случае вместо однозначной функции  $F(J, L)$  для пучка используется двузначная функция (8) с  $F_1(J, L) = 0$ , что означает отсутствие "опережающих" ионов в пучке.

Уравнение  $\langle \dot{z} \rangle_i = 0$  фиксирует значение  $\chi_b$ , а именно,  $\chi_b = 1/Z$  для случая заселенного дна, и

$$\chi_b = -\frac{1}{2Z} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{8Z^3}{w^2}} \right) \quad (27)$$

для случая заселенного максимума. Здесь использовано обозначение

$$Z \equiv \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} + \frac{n}{n_b} \left( 1 + \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\Omega}} - \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} \right), \quad (28)$$

где  $T_{\parallel s} \equiv 1/\alpha_s$ ,  $T_{\perp s} \equiv 1/(\alpha_s + \beta_s)$  – "температуры" и  $n_b$  – плотность пучка. Параметры должны быть такими, чтобы выполнялось неравенство  $Z > 0$  для случая заселенного дна и  $Z < -(w^2)^{1/3}$  для случая заселенного максимума. Полученное значение  $\chi_b$  фиксирует точку пучка  $\{J_0, L_0\}$ , а именно,

$$L_0 = \frac{m_i c \tilde{\Omega}^2}{k} \left( 1 + \tilde{\omega}/\tilde{\Omega} - 1/\chi_b + w^2\chi_b^2/2 \right) \quad (29)$$

и

$$J_0 = \frac{m_i c \tilde{\Omega}^2}{2k} \left\{ \left( 1 - 1/\chi_b + w^2(\chi_b^2 - \chi^2)/2 \right)^2 + w^2(\chi - 1)^2 - \tilde{\omega}^2/\tilde{\Omega}^2 \right\}, \quad (30)$$

где величина  $\chi$  должна быть заменена на  $\chi_b$  в случае заселенного дна и на  $\chi_m = (\chi_b/2) \left( \sqrt{1 - 8/(w^2 \chi_b^3)} - 1 \right)$  в случае заселенного максимума.

Уравнение  $\langle \tilde{z} \rangle_e = 0$  дает связь  $\omega = \Omega_e (T_{\parallel e}/T_{\perp e} - 1)$ . Наконец, уравнение (18) дает “дисперсионное соотношение”

$$k^2 c^2 = \omega^2 + \omega_{pi}^2 \left( \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) + \omega_{pi}^2 \frac{n_b}{n} \left( \frac{1}{Z} - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} \right) + \omega_{pe}^2 \left( \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} - 1 \right), \quad (31)$$

справедливое для обоих случаев заселенного дна и максимума. В отличие от примера **1**, благодаря “пучковой” добавке, ионные и электронные “температуры” не связаны между собой. (Предел  $n_b \rightarrow 0$  соответствует  $J_0 \rightarrow \infty$  и  $|L_0| \rightarrow \infty$ , если эта связь не наложена.) Поэтому “дисперсионное соотношение” может соответствовать либо альфвеновским, либо электромагнитным ветвям. Например в случае  $T_{\perp i} = T_{\parallel i}$ , если выполнено неравенство  $\frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} < 1 + \frac{m_e n_b}{m_i n}$ , то пучок заселяет дно и фазовая скорость волны  $|\omega|/k < c$ , что соответствует альфвеновским ветвям. И наоборот, если выполнено неравенство  $\frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} > 1 + \frac{m_e n_b}{m_i n} (1 + (w^2)^{1/3})$  то пучок заселяет максимум и фазовая скорость волны  $|\omega|/k > c$ , что соответствует электромагнитным ветвям.

**Пример 4.**  $\mathcal{B} > 0$ . Функцию распределения ионов выбираем в виде  $F_i \propto \left\{ 1 + (kcL/T_L)^2 \right\} \exp(-kcJ/T_i)$ . Электронная функция распределения – “двухтемпературная”:  $\check{F}_e (J/T_{\parallel e} + (1/T_{\perp e} - 1/T_{\parallel e})L)$ .

Уравнение  $\langle \tilde{z} \rangle_i = 0$  определяет параметр  $T_L$ :

$$T_L^2 = -T_i^2 \left\{ 2 + 4W + W^2 + 2(1+W)(1+\tau)/\check{\omega} + \tau(3+\tau)/\check{\omega}^2 \right\}, \quad (32)$$

где  $\check{\omega} \equiv \omega/\Omega_i$ ,  $\tau \equiv m_i \omega^2/(T_i k^2)$  и  $W \equiv e^2 \mathcal{A}^2/(2m_i c^2 T_i)$ . Уравнение  $\langle \tilde{z} \rangle_e = 0$  требует  $T_{\parallel e}/T_{\perp e} = 1 - \check{\omega} m_e/m_i$ . Уравнение (18) дает “дисперсионное соотношение”

$$k^2 c^2 = \Omega_i^2 \check{\omega}^2 - \frac{\omega_{pi}^2 \check{\omega}^2}{\tau + (1+W)\check{\omega}} + \frac{\omega_{pi}^2 \check{\omega}^2}{m_i/m_e - \check{\omega}}. \quad (33)$$

Правые части уравнений (32,33) положительны, если параметры  $\check{\omega}$  и  $\tau$  находятся в областях

$$\begin{aligned} -\frac{1+W}{1+2W+W^2/2} < \check{\omega} < 0 \quad \& \quad 0 < \tau < \tau_+ \quad \text{для } 0 < W < 2 + \sqrt{6}, \\ \frac{1+W - \sqrt{10+20W+W^2}}{2(1+2W)} < \check{\omega} < 0 \quad \& \quad \max(0, \tau_-) < \tau < \tau_+ \quad \text{для } W > 2 + \sqrt{6}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\tau_{\pm} \equiv -3/2 - \check{\omega}(1+W) \pm \sqrt{9/4 + \check{\omega}(1+W) - \check{\omega}^2(1+2W)}$ .

Этот и следующий примеры демонстрируют “дисперсионное соотношение”, которое зависит от амплитуды волны явно.

**Пример 5.** Все также, как в предыдущем примере 4, но  $\mathcal{B} = 0$ . Уравнение  $\langle \check{z} \rangle_s = 0$  дает  $\omega = 0$ , и квадрат вектора “шира” равен

$$k^2 = \frac{2(2+W)\omega_{pi}^2/c^2}{2 + (T_L/T_i)^2 + 4W + W^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left( \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} - 1 \right). \quad (35)$$

### 3 Релятивистское уравнение Власова

Релятивистское уравнение Власова можно записать в виде  $\{\mathcal{F}, \check{\mathcal{H}}\}_{r, \check{P}} = 0$ , где функция распределения  $\mathcal{F}$  и гамильтониан  $\check{\mathcal{H}}$  являются функциями четырех координат  $\{r^\alpha\} \equiv \{ct, x, y, z\}$  и четырех обобщенных импульсов  $\{\check{P}_\alpha\} \equiv \{-\check{\mathcal{E}}/c, \mathbf{p}\}$ . Здесь  $\check{\mathcal{E}}$  есть значение традиционного релятивистского гамильтониана [6]  $\check{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\mathbf{p} - q\mathbf{A}/c)^2} + q\varphi$ . Скобки Пуассона означают  $\{a, b\}_{r, \check{P}} \equiv \frac{\partial a}{\partial r^\alpha} \frac{\partial b}{\partial \check{P}_\alpha} - \frac{\partial a}{\partial \check{P}_\alpha} \frac{\partial b}{\partial r^\alpha}$ . В общем случае, в качестве гамильтониана для расширенного фазового пространства может быть использована любая функция  $\check{\mathcal{H}}(r, \check{P})$ , которая обращается в ноль на “поверхности”  $\check{H} = \check{\mathcal{E}}$  и имеет ненулевую производную  $\partial \check{\mathcal{H}}/\partial \check{P}_0$ . Мы используем гамильтониан, который может быть записан в релятивистски инвариантной форме:

$$\check{\mathcal{H}}(r, \check{P}) = \frac{mc^2}{2} (1 - u_\alpha u^\alpha), \quad (36)$$

$$u^\alpha(r, \check{P}) \equiv \frac{1}{mc} \left( p^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha(r) \right), \quad p^\alpha(\check{P}) \equiv -g^{\alpha\beta} \check{P}_\beta,$$

где  $\{A^\alpha\} = \{\varphi, \mathbf{A}\}$  есть 4-мерный векторный потенциал. Предполагается, что метрический тензор имеет следующие ненулевые компоненты  $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$ . Гамильтониану (36) соответствуют уравнения движения  $dr^\alpha/d\tau = \partial \check{\mathcal{H}}/\partial \check{P}_\alpha = u^\alpha$  и  $d\check{P}_\alpha/d\tau = -\partial \check{\mathcal{H}}/\partial r^\alpha$ , где  $\tau = s/c$  играет роль параметра “времени”, а  $s$  есть интервал ( $ds^2 = dr_\alpha dr^\alpha$ ). Эти уравнения должны решаться на ветви 7-мерной двухлистной “поверхности”  $\check{\mathcal{H}} = 0$ , на которой выполняется условие  $u^0 > 0$ . (Величина  $\text{sign}(u^0)$  является релятивистским инвариантом, поскольку 4-вектор безразмерной скорости  $u^\alpha$  имеет положительный квадрат  $u^\alpha u_\alpha = 1$ .) Разделив эти уравнения на первое из них  $dr^0/d\tau = \partial \check{\mathcal{H}}/\partial \check{P}_0$ , легко убедиться, что они эквивалентны уравнениям движения, следующим из традиционного релятивистского гамильтониана. Заметим, что

укороченное уравнение Гамильтона-Якоби  $(\partial_\alpha S + qA_\alpha/c)(\partial^\alpha S + qA^\alpha/c) = m^2c^2$ , соответствующее гамильтониану (36), на поверхности  $\check{\mathcal{H}} = 0$  совпадает с традиционным полным уравнением Гамильтона-Якоби. Использование расширенного фазового пространства и гамильтониана в форме (36) позволяет делать необходимые канонические преобразования, “перепутывающие” все восемь переменных  $t, \mathbf{r}, \check{\mathcal{E}}, \mathbf{p}$  и сохраняющие релятивистски инвариантную форму уравнений.

Функция распределения  $\mathcal{F}$  определяет 4-вектор плотности электрического тока  $\{j^\alpha\} = \{c\rho, \mathbf{j}\}$ :

$$j^\alpha = \sum_s q_s \int_{u^0 > 0} cu^\alpha \mathcal{F}_s \delta(\check{\mathcal{H}}_s/c) d^4P. \quad (37)$$

### 3.1 Векторный потенциал

Для построения векторного потенциала в произвольной системе Минковского определяем набор из четырех постоянных, взаимно ортогональных 4-векторов:  $k^\alpha$ ,  $\tilde{a}^\alpha$ ,  $\tilde{\tilde{a}}^\alpha$  и  $b^\alpha$ . Здесь  $\{k^\alpha\} = \{\omega/c, \mathbf{k}\}$  есть волновой 4-вектор с  $k_\alpha k^\alpha \neq 0$ . Четырех-векторы  $\{\tilde{a}^\alpha\} = \{\tilde{a}^0, \tilde{\mathbf{a}}\}$  и  $\{\tilde{\tilde{a}}^\alpha\} = \{\tilde{\tilde{a}}^0, \tilde{\tilde{\mathbf{a}}}\}$  определяют поляризацию волны. Их квадраты предполагаются равными  $\tilde{a}_\alpha \tilde{a}^\alpha = \tilde{\tilde{a}}_\alpha \tilde{\tilde{a}}^\alpha = -1$ . Последний 4-вектор  $\{b^\alpha\} = \{b^0, \mathbf{b}\}$  определяется как  $b^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \tilde{a}_\beta \tilde{\tilde{a}}_\gamma k_\mu \kappa / (k_\nu k^\nu)$ , где  $\kappa \equiv \sqrt{|k^\alpha k_\alpha|} = \sqrt{|\omega^2/c^2 - k^2|}$  и  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}$  – полностью антисимметричный псевдотензор с  $\epsilon^{0123} = 1$ . Взаимная ортогональность векторов означает  $k_\alpha \tilde{a}^\alpha = k_\alpha \tilde{\tilde{a}}^\alpha = k_\alpha b^\alpha = \tilde{a}_\alpha \tilde{\tilde{a}}^\alpha = \tilde{a}_\alpha b^\alpha = \tilde{\tilde{a}}_\alpha b^\alpha = 0$ . Заметим, что среди любых четырех 4-векторов с ненулевыми квадратами один и только один из них имеет положительный квадрат. Мы рассматриваем только два случая<sup>8</sup>,  $\sigma \equiv \text{sign}(k_\alpha k^\alpha) = -b_\alpha b^\alpha = \pm 1$ . Случай с  $\sigma = -1$  соответствует альфвеновским волнам и геликонам в линейной теории, а случай с  $\sigma = 1$  – электромагнитным волнам. В обоих случаях существует “специальная” система отсчета. В случае с  $\sigma = -1$  “специальной” системой будем считать систему волны, где  $\mathbf{b} = 0$  и  $k^0 = \omega/c = 0$ , то есть в этой системе ничего не зависит от времени. В случае с  $\sigma = 1$  “специальной” системой будем называть систему отсчета, где  $b^0 = 0$  и  $\mathbf{k} = 0$ , то есть в ней ничего не зависит от пространственных координат. Для краткости записи мы будем использовать комплексный 4-вектор поляризации  $a^\alpha \equiv \tilde{a}^\alpha + i\tilde{\tilde{a}}^\alpha$  удовлетворяющий равенствам  $a^\alpha a_\alpha = 0$  и  $a^\alpha a_\alpha^* = -2$ .

<sup>8</sup>В двух других случаях,  $\tilde{a}_\alpha \tilde{a}^\alpha = 1$  и  $\tilde{\tilde{a}}_\alpha \tilde{\tilde{a}}^\alpha = 1$ , не существует системы отсчета, где поля обладают спиральной симметрией.

Теперь мы записываем векторный потенциал в следующем виде

$$A^\alpha(r) = \Lambda^\alpha + \lambda^\alpha, \quad \Lambda^\alpha(r) \equiv \frac{\mathcal{B}}{2\kappa} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} r_\beta k_\gamma b_\mu, \quad \lambda^\alpha(r) \equiv \mathcal{A} \operatorname{Re}(a^\alpha e^{-i\psi}), \quad (38)$$

где  $\psi(r) \equiv k_\alpha r^\alpha$  – фаза волны, а  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{A}$  – константы. Подстановка такого векторного потенциала в уравнение Максвелла  $c\partial_\beta(\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta) = 4\pi j^\alpha$  дает

$$-k_\beta k^\beta c \mathcal{A} \operatorname{Re}(a^\alpha e^{-i\psi}) = 4\pi j^\alpha. \quad (39)$$

Далее мы ищем функцию распределения в виде  $\mathcal{F}(r, \check{P}) = \check{\mathcal{F}}(U)$ , где 4-вектор  $U$  имеет следующие компоненты

$$U^\alpha(r, \check{P}) \equiv \chi^\alpha_\beta u^\beta, \quad \chi^\alpha_\beta \equiv \frac{b^\alpha b_\beta}{b_\gamma b^\gamma} + \frac{k^\alpha k_\beta}{k_\gamma k^\gamma} - \operatorname{Re}(a^\alpha a_\beta^* e^{i\psi}). \quad (40)$$

Матрица  $\chi^\alpha_\beta$  является ортогональной в смысле  $\chi_{\alpha\gamma} \chi^\alpha_\beta = \chi_{\beta\alpha} \chi^\alpha_\gamma = \delta_{\beta\alpha}$ . Она имеет собственные векторы:  $k^\alpha$ ,  $b^\alpha$ ,  $a^\alpha$ ,  $a^{*\alpha}$ , соответствующие собственным значениям: 1, 1,  $e^{i\psi}$  и  $e^{-i\psi}$ . Якобиан преобразования от  $u$  к  $U$  равен единице и  $u_\alpha u^\alpha = U_\alpha U^\alpha$ . Используя (37,39,40), переписываем (39) в форме, не содержащей  $\psi$ :

$$-k_\beta k^\beta \mathcal{A} \check{a}^\alpha = 4\pi c \sum_s (m_s c)^4 q_s \int U^\alpha \check{\mathcal{F}}_s(U) \delta(\check{\mathcal{H}}_s) d^4 U. \quad (41)$$

## 3.2 Интегралы движения

Мы производим каноническое преобразование к набору обобщенных импульсов  $\{\check{P}_\zeta\} \equiv \{\check{J}, \check{K}, \check{L}, \check{M}\}$  и координат  $\{\check{Q}^\zeta\} \equiv \{\check{T}, \check{\Psi}, \check{\Phi}, \check{\Theta}\}$ , компоненты которых определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \check{J} &\equiv -\frac{\check{P}_\alpha b^\alpha}{b_\beta b^\beta \kappa}, & \check{T} &\equiv -b_\alpha r^\alpha \kappa, \\ \check{K} &\equiv -\frac{k^\alpha \check{P}_\alpha}{k^\beta k_\beta}, & \check{\Psi} &\equiv \arg(\check{P}_-) - \psi, \\ \check{L} &\equiv \frac{|\check{P}_-|^2}{2m\kappa c} + \frac{\Omega}{\kappa c} \check{K}, & \check{\Phi} &\equiv \frac{\kappa c}{\Omega} \arg\left(\frac{\check{P}_+}{\check{P}_-}\right), \\ \check{M} &\equiv -\frac{1}{\kappa} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} r_\alpha \check{P}_\beta k_\gamma b_\mu - \check{K}, & \check{\Theta} &\equiv \arg(\check{P}_+), \end{aligned} \quad (42)$$

где  $\check{P}_\pm \equiv -(-\check{P}_\alpha \pm q\Lambda_\alpha/c)a^\alpha$  (выбор знаков здесь продиктован соответствием с обозначениями раздела 2.1).

Гамильтониан (36) в новых переменных равен

$$\check{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \left\{ m^2 c^2 + \left| \sqrt{2m(\kappa c \check{L} - \Omega \check{K})} e^{i\check{\Psi}} - qA/c \right|^2 + \sigma \kappa^2 (\check{J}^2 - \check{K}^2) \right\}. \quad (43)$$

Он зависит только от набора<sup>9</sup>  $\{\xi^\zeta\} = \{\check{J}, \check{K}, \check{L}, \check{\Psi}\}$ . Следовательно, 4-скаляры  $\check{J}, \check{L}, \check{M}$  и  $\check{\Theta}$  – интегралы движения. Остальные интегралы могут быть найдены также, как описано в разделе 2.1.

Для того чтобы сравнить нерелятивистский и релятивистский формализм, нужно предположить следующее соответствие:  $\{\check{P}_0, \check{P}_1, \check{P}_2, \check{P}_3\} = \{P_0 - mc, P_1, P_2, P_3\}$ . Тогда производящая функция

$$\check{J} \left\{ \mathcal{T} \frac{\kappa^2}{k^2} - \frac{\sigma \omega}{kc} \left( \Psi + \Phi \frac{\Omega}{kc} - \Theta \right) \right\} - \mathcal{T} \frac{mc}{k} + \check{K} \Psi + \check{L} \Phi \frac{\kappa}{k} + \check{M} \Theta \quad (44)$$

дает связь между переменными (5) и (42) в системе отсчета, где  $a^0 = 0$  и  $(\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{a}}) \cdot \mathbf{k} > 0$ . Разница между нерелятивистским и релятивистским гамильтонианами, записанными в одинаковых переменных, равна  $\mathcal{H} - \check{\mathcal{H}} = \frac{(\mathcal{E} - q\varphi)^2}{2mc^2} = \frac{(\kappa c J + \omega K)^2}{2mc^2} = \frac{(\omega K - \sigma \kappa c J - mc^2)^2}{2mc^2}$ . Именно она определяет различие в динамике частиц. Кроме того, отметим, что релятивистский гамильтониан тоже можно привести к виду работы [3], если использовать производящую функцию  $(\check{L}\kappa c/\Omega - \check{K})\check{\Psi} + \check{L}\check{\Phi}$ .

Четырех-скорость (40) в новых переменных

$$U^\alpha = \frac{1}{mc} \left\{ b^\alpha \check{J} \kappa + k^\alpha \check{K} + \mathcal{R}e(a^\alpha e^{-i\check{\Psi}}) \sqrt{2m(\kappa c \check{L} - \Omega \check{K})} - \tilde{a}^\alpha qA/c \right\}, \quad (45)$$

также зависит только от набора  $\{\xi^\zeta\}$ . Якобиан преобразования от  $d^4U$  к  $d^4\xi$  равен  $\frac{\partial(U^0, U^1, U^2, U^3)}{\partial(\check{J}, \check{K}, \check{L}, \check{\Psi})} = \frac{\kappa^3}{m^3 c^3}$ .

### 3.3 Замыкающие уравнения

Аналогично нерелятивистскому случаю, мы берем функцию распределения в виде  $\tilde{\mathcal{F}}_s(U) = F_s(\check{J}, \check{L})$ . (Если величина  $\check{L}$  больше некоторой, то также, как и в нерелятивистском случае, существует область  $\check{J}_- < \check{J} < \check{J}_+$ ,

<sup>9</sup>Все компоненты списков  $\{\check{Q}^\zeta\}$ ,  $\{\check{P}_\zeta\}$  и  $\{\xi^\zeta\}$  являются 4-скалярами и не преобразуются при смене системы отсчета. Индексная запись используется исключительно для краткости.

где пересечение “поверхностей”  $\check{\mathcal{H}} = 0$ ,  $\check{J} = const$  и  $\check{L} = const$  состоит из двух несвязных частей, и  $F_s$  может быть выбрана в форме (8).) Теперь уравнение (39) дает замыкающее уравнение в векторной форме

$$-\sigma \mathcal{A} \tilde{a}^\alpha = 4\pi\kappa \sum_s q_s m_s c^2 \int U^\alpha F_s(\check{J}, \check{L}) \delta(\check{\mathcal{H}}_s) d^4\xi, \quad (46)$$

где  $U$  и  $\check{\mathcal{H}}_s$  заданы выражениями (43,45). Для того чтобы была использована правильная ветвь “поверхности”  $\check{\mathcal{H}} = 0$ , интегрирование в (46) должно быть ограничено по-разному в случаях  $\sigma = -1$  и  $\sigma = 1$ . В случае  $\sigma = -1$  существует релятивистский инвариант  $\sigma_{\check{J}} \equiv \text{sign}(b^0)$ , и условие  $u_0 > 0$  выполняется, когда  $\sigma_{\check{J}} \check{J} > 0$ . Аналогично, в случае  $\sigma = 1$  существует инвариант  $\sigma_{\check{K}} \equiv \text{sign}(k^0)$ , и интегрирование ограничено областью, где  $\sigma_{\check{K}} \check{K} > 0$ .

Используя проекции на векторы  $b^\alpha$ ,  $k^\alpha$  и  $\tilde{a}^\alpha$ , уравнение (46) можно разделить на три скалярных уравнения<sup>10</sup>. Для того чтобы записать их в компактной форме, определяем фактор

$$\eta(\xi) = \begin{cases} \sigma_{\check{J}} \check{J} & \text{для } \sigma = -1, \\ \sigma_{\check{K}} \check{K} & \text{для } \sigma = 1, \end{cases} \quad (47)$$

оператор интегрирования<sup>11</sup>

$$\hat{\mathcal{I}}_s(G) \equiv \frac{\kappa^4}{m_s^3 c^2} \int_{\eta>0} G(\xi) \eta(\xi) F_s(\check{J}, \check{L}) \delta(\check{\mathcal{H}}_s) d^4\xi \quad (48)$$

и процедуру усреднения  $\langle G \rangle_s \equiv \hat{\mathcal{I}}_s(G) / \hat{\mathcal{I}}_s(1)$ . Тогда проекции уравнения (46) дают искомые замыкающие уравнения

$$\sum_s q_s N_s = 0, \quad \sum_s q_s N_s \langle V_{\parallel} \rangle_s = 0, \quad (49)$$

$$-k_\alpha k^\alpha \mathcal{A} = \frac{4\pi}{c} \sum_s q_s N_s \langle V_{\lambda_s} \rangle_s, \quad (50)$$

где  $N_s \equiv m_s^3 c^3 \hat{\mathcal{I}}_s(1)$ ,

$$V_{\parallel}(\xi) \equiv c \begin{cases} \check{K} / \check{J} & \text{для } \sigma = -1, \\ -\check{J} / \check{K} & \text{для } \sigma = 1, \end{cases} \quad (51)$$

$$V_{\lambda_s}(\xi) \equiv \frac{c}{\eta\kappa} \left( \sqrt{2m_s(\kappa c \check{L} - \Omega_s \check{K})} \cos \check{\Psi} - q_s \mathcal{A} / c \right).$$

<sup>10</sup>Четвертая проекция на  $\tilde{a}^\alpha$  дает тождественный ноль в обеих частях уравнения.

<sup>11</sup>Более удобная форма оператора приведена в разделе 3.5.

Эти 4-скаляры имеют простой физический смысл в “специальной” системе отсчета, где  $N_s$  является плотностью частиц сорта  $s$ , а  $V_{\parallel}$  и  $V_{\lambda s}$  – проекциями скорости частиц на вектора  $\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\tilde{\mathbf{a}}}$  и  $\boldsymbol{\lambda}$ , соответственно.

### 3.4 Система покоя плазмы

Часто удобно знать параметры решения в системе покоя плазмы, однако выделение этой системы в релятивистском случае есть более громоздкая процедура. Для того, чтобы выполнить предположение о том, что выбранная система есть система покоя плазмы, нужно вычислить тензор энергии-импульса плазмы  $T^{\alpha\beta}(r) \equiv \sum_s m_s c^2 \int u^\alpha u^\beta \mathcal{F}_s \delta(\check{\mathcal{H}}_s/c) d^4P$ , усреднить его по фазе волны  $\overline{T^{\alpha\beta}} \equiv \int_0^{2\pi} T^{\alpha\beta} d\psi / (2\pi)$  и приравнять пространственные компоненты выражения  $\overline{T^{0\beta}}$  к нулю. Такие вычисления дают

$$\begin{aligned} \overline{T^{\alpha\beta}} = \sum_s N_s \kappa c \left\langle \frac{1}{\eta} \left( \check{J} b^\alpha - \check{K} \frac{k^\alpha}{\kappa} \right) \left( \check{J} b^\beta - \check{K} \frac{k^\beta}{\kappa} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\eta}{2} \mathcal{R}e(a^\alpha a^{*\beta}) \left( 1 - \frac{V_{\parallel}^2}{c^2} - \frac{m^2 c^2}{\kappa^2 \eta^2} \right) \right\rangle_s. \end{aligned} \quad (52)$$

Теперь решение системы уравнений  $\overline{T^{01}} = \overline{T^{02}} = \overline{T^{03}} = 0$  совместно с условиями ортонормированности 4-векторов  $b^\alpha$ ,  $k^\alpha$ ,  $a^\alpha$  дают  $a^0 = 0$  и выражения для компоненты  $b^0$  и для частоты волны в системе покоя плазмы:

$$\begin{aligned} b^0 &= \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{1-\nu^2}} - \frac{\sigma}{2}} \begin{cases} \sigma \check{J} & \text{для } \sigma = -1, \\ -\sigma \check{K} \text{ sign}(\nu) & \text{для } \sigma = 1, \end{cases} \\ \omega &= \kappa c \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{1-\nu^2}} + \frac{\sigma}{2}} \begin{cases} \sigma \check{J} \text{ sign}(\nu) & \text{для } \sigma = -1, \\ \sigma \check{K} & \text{для } \sigma = 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$\nu \equiv \frac{2 \sum_s N_s \langle \eta V_{\parallel} / c \rangle_s}{\sum_s N_s \langle \eta (1 + V_{\parallel}^2 / c^2) \rangle_s}. \quad (54)$$

Также полезно определить плотности компонент плазмы в ее системе покоя:

$$n_s \equiv \int u_0 \mathcal{F}_s \delta(\check{\mathcal{H}}_s/c) d^4 P = N_s \begin{cases} |b^0| - \sigma_j \frac{\omega}{\kappa c} \left\langle \frac{V_{\parallel}}{c} \right\rangle_s & \text{для } \sigma = -1, \\ \frac{|\omega|}{\kappa c} + \sigma_{\check{K}} b^0 \left\langle \frac{V_{\parallel}}{c} \right\rangle_s & \text{для } \sigma = 1. \end{cases} \quad (55)$$

### 3.5 Частный пример

Формальное выражение (48) для оператора  $\hat{\mathcal{I}}$  неудобно для практического использования. Оно существенно упрощается в результате следующей подстановки

$$\begin{aligned} \check{J} &= \sigma_j \frac{mc}{\kappa} \zeta, \quad \check{L} = \frac{mc}{2\kappa} \left\{ (\tilde{x} + \tilde{A})^2 + \tilde{y}^2 \right\} + \sigma_j \frac{m\Omega}{\kappa^2} \tilde{z}, \quad \check{K} = \sigma_j \frac{mc}{\kappa} \tilde{z}, & \text{для } \sigma = -1, \\ \check{J} &= -\sigma_{\check{K}} \frac{mc}{\kappa} \tilde{z}, \quad \check{L} = \frac{mc}{2\kappa} \left\{ (\tilde{x} + \tilde{A})^2 + \tilde{y}^2 \right\} + \sigma_{\check{K}} \frac{m\Omega}{\kappa^2} \zeta, \quad \check{K} = \sigma_{\check{K}} \frac{mc}{\kappa} \zeta, & \text{для } \sigma = 1, \\ \check{\Psi} &= \arg(\tilde{x} + \tilde{A} + i\tilde{y}), \quad \tilde{A} \equiv q\mathcal{A}/(mc^2) & \text{для любых } \sigma. \end{aligned} \quad (56)$$

Теперь оператор есть

$$\hat{\mathcal{I}}(G) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} FG|_{\zeta=\sqrt{1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}}, \quad (57)$$

где аргументы функций  $G(\xi)$  и  $F(\check{J}, \check{L})$  выражены согласно (56). Переменные  $\{\zeta, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$  есть компоненты скорости  $U^\alpha$  в “специальной” системе отсчета с пространственными осями, ориентированными вдоль  $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\tilde{\mathbf{a}}}$  и  $\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\tilde{\mathbf{a}}}$ . В этих переменных  $V_{\parallel} = c\tilde{z}/\zeta$  и  $V_{\lambda} = c\tilde{x}/\zeta$ .

Для плазмы с одним сортом однозарядных ионов уравнения (49,50) принимают вид

$$\begin{aligned} N_i &= N_e = N, \quad \langle \tilde{z}/\zeta \rangle_i = \langle \tilde{z}/\zeta \rangle_e, \\ (k^2 - \omega^2/c^2)\mathcal{A} &= 4\pi N e (\langle \tilde{x}/\zeta \rangle_i - \langle \tilde{x}/\zeta \rangle_e). \end{aligned} \quad (58)$$

**Пример 6.** Рассматриваем простейший пример с  $\mathcal{B} = 0$ ,  $\sigma = 1$  и функциями распределения  $F_s \propto \delta(\check{J}^2 - \check{J}_{0s}^2)\delta(\check{L} - \check{L}_{0s})$ . Уравнение  $\langle \tilde{z}/\zeta \rangle_i = \langle \tilde{z}/\zeta \rangle_e$  выполняется тождественно. Формула (54) дает значение параметра  $\nu = 0$ . Поэтому формулы (53) и (55) дают  $k = 0$  и  $n_s = N$ ,

то есть система покоя плазмы совпадает с системой, где все однородно. Поле такой “волны” есть однородное электрическое поле, вращающееся вокруг направления  $\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{a}}$  с частотой, определяемой уравнением

$$\omega^2 = \sum_s \omega_{ps}^2 \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\check{h}_s}{\tilde{A}_s \rho_s}} \left\{ \mathcal{K}(\check{h}_s) + \frac{\rho_s}{\tilde{A}_s \check{h}_s} \left( E(\check{h}_s) - \mathcal{K}(\check{h}_s) \right) \right\}, \quad (59)$$

где

$$\rho_s \equiv \sqrt{\frac{2|\omega| \check{L}_{0s}}{m_s c^2}}, \quad z_{0s} \equiv \frac{|\omega| \check{J}_{0s}}{m_s c^2}, \quad h_s \equiv \frac{2\tilde{A}_s \rho_s}{1 + \rho_s^2 + z_{0s}^2 + \tilde{A}_s^2},$$

$$\check{h}_s \equiv \frac{h_s}{1 + \sqrt{1 - h_s^2}}, \quad (60)$$

$\mathcal{K}(x)$  и  $E(x)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. В линейном пределе выражение (59) стремится к соотношению

$$\omega^2 = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\sqrt{1 + \rho_s^2 + z_{0s}^2}} \left( 1 - \frac{\rho_s^2}{2(1 + \rho_s^2 + z_{0s}^2)} \right) \quad (61)$$

– дисперсионному соотношению ленгмюровских колебаний с релятивистскими поправками, специфичными для выбранного двухпучкового распределения.

## 4 Система уравнений Прока-Власова

В гипотетическом случае, когда фотоны имеют конечную массу, вместо уравнения Максвелла нужно использовать уравнение Прока [7, 8],  $\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha + k_{ph}^2 A^\alpha = 4\pi j^\alpha / c$ , где  $k_{ph} = m_{ph} c / \hbar$  – обратная комптоновская длина, соответствующая гипотетической массе фотона  $m_{ph}$ . Векторный потенциал (38) удовлетворяет необходимой калибровке  $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ , но вместо (39) мы получаем уравнение  $(k_{ph}^2 - k_\beta k^\beta) \mathcal{A} \operatorname{Re}(a^\alpha e^{-i\psi}) + k_{ph}^2 \Lambda^\alpha = 4\pi j^\alpha / c$ . Поскольку  $\Lambda^\alpha$  линейно зависит от координат, это уравнение может обладать спиральной симметрией только при  $\mathcal{B} = 0$ . Таким образом, все общие предыдущие результаты с  $\mathcal{B} = 0$  остаются правильными, кроме уравнений (12,50), которые теперь имеют вид

$$(k_{ph}^2 + k^2 - \omega^2 / c^2) \mathcal{A} = \frac{4\pi}{c} \sum_s q_s n_s \langle v_{\lambda s} \rangle_s,$$

$$(k_{ph}^2 - k_\alpha k^\alpha) \mathcal{A} = \frac{4\pi}{c} \sum_s q_s N_s \langle V_{\lambda s} \rangle_s. \quad (62)$$

Простейший частный результат можно извлечь из примера **2** раздела 2.3, где рассмотрено равновесие в поле с широм. Величина шира определяется теперь выражением

$$k_{ph}^2 + k^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \left( \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left( \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} - 1 \right), \quad (63)$$

где  $T_{\perp}$  и  $T_{\parallel}$  – “температуры” вдоль и поперек направления шира  $\mathbf{k}$ . Заметим, что в случае нулевого шира ( $k = 0$ ) существует более общее решение, поскольку в этом случае нет ни электрического, ни магнитного поля. А именно, решением является любое распределение с постоянной однородной плотностью тока, компенсирующей член  $k_{ph}^2 \mathbf{A}$  (этот вырожденный случай не рассматривался ни в разделе 2, ни в разделе 3, поскольку в этом случае  $\omega = k = 0$ ). Но если изначально есть ненулевой шир, то либо он должен затухнуть за время фазового размешивания, либо анизотропная функция распределения должна установиться. И в случае  $k_{ph} \gg k > 0$ , анизотропия (главным образом электронная) определяется массой фотона.

## 5 Заключение

Описанные в работе решения содержат распределения частиц в фазовом пространстве однородные на поверхностях, определяемых постоянством двух интегралов движения, но с произвольным заселением этих поверхностей, ограниченным только интегральными соотношениями. Дополнительные малые члены кинетического уравнения, имеющие место в реальных задачах, такие как интеграл столкновений, источники, связанные с нейтральной инжекцией и др., могут определять вполне конкретное заселение этих поверхностей. Для того чтобы его получить, нужно выделить усредненную по поверхностям часть функции распределения и малую поправку. Тогда усредненное кинетическое уравнение совместно с замыкающими уравнениями описывает специфическую для конкретной задачи медленную эволюцию заселения и параметров волны. В частности, эволюция может заключаться в релаксации к некоторому конкретному состоянию. Кроме того, условие разрешимости уравнений для поправок функции распределения и поля может давать важные ограничения на параметры такого состояния.

В типичных задачах о волнах в ограниченной плазме кроме “изучаемой” волны присутствует и встречная волна, нарушающая спиральную симметрию. Однако, описанный подход, по-видимому, применим и в этом

случае, если резонансные области волн достаточно далеки друг от друга в фазовом пространстве.

Вместо традиционного разложения с амплитудой волны в качестве малого параметра, в некоторых случаях можно использовать представленные здесь решения, как начальное приближение с большой амплитудой. Малыми параметрами в этом случае являются факторы, отличающие реальную задачу от бесстолкновительной задачи, допускающей предполагаемую симметрию.

## Список литературы

- [1] P. Palmadesso, G. Schmidt Phys. Fluids. **14**, p.1411-1418 (1971).
- [2] В.С. Лазько, Физика плазмы, **20**, N5, с.523-525 (1994).
- [3] Д.А. Панов, А.В. Тимофеев, Физика плазмы, **21**, N12, с.1092-1098 (1995).
- [4] A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman, Regular and Stochastic Motion, Springer-Verlag, New York (1983);  
А. Лихтенберг, М. Либерман, Регулярная и стохастическая динамика, перевод под ред. Б.В. Чирикова, М.: Мир, (1984).
- [5] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Механика, М.: Наука (1973).
- [6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля, М.: Наука (1988).
- [7] A. Proca, Compt. Rend. **190**, p.1377 (1930).
- [8] D.D. Ryutov, Plasma Phys. Control. Fusion **39**, p.A73-A82 (1997).

*Ю.А. Цидулко, И.С. Черноштанов*

## **Нелинейные волны со спиральной симметрией**

*Yu.A. Tsidulko, I.S. Chernoshtanov*

## **Non-linear spirally symmetric waves**

ИЯФ 2009-3

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 25.02.2009 г.

---

Сдано в набор 26.02.2009 г.

Подписано в печать 27.02.2009 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,5 печ.л., 1.2 уч.-издл.

Тираж 105 экз. Бесплатно. Заказ № 3

---

Обработано на РС и отпечатано на  
роталпринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН  
*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*