

УЧРЕЖДЕНИЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН
(ИЯФ СО РАН)

Э.А. Бибердорф, Н.И. Попова

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ЗАДАЧИ ГЕМОДИНАМИКИ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ
И МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ

ИЯФ 2009-2

НОВОСИБИРСК
2009

**Численное решение задачи гемодинамики
методом прямых и методом ортогональной прогонки**

Э.А. Бибердорф

Институт математики им. С.Л. Соболева
630090, Новосибирск, Россия

Н.И. Попова

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

Данная работа связана с участием авторов в интеграционном Проекте № 91-2009 СО РАН "Актуальные проблемы механики сплошных сред, физики полупроводников и математической биологии. Корректность краевых задач, устойчивость решений и вычислительный эксперимент". Впервые предпринята попытка компьютерного моделирования сердечно-сосудистой системы человека как численного решения системы гемодинамики методом прямых и методом ортогональной прогонки. Гарантированная оценка возникающих погрешностей подробно описана в [2].

Создана новая версия **GALA-2.1** пакета программ **GALA-2.0** (Guaranteed Accuracy in Linear Algebra), описанного в монографии [1]. В новую версию входят программы реализующие такие вычислительные методы, как ортогональная прогонка, регуляризация, QR-разложение матриц с контролем оценки точности результата. Приведены примеры.

**Numerical solution of the gemodynamic system
by the method of straight lines
and the orthogonal sweep method**

E.A. Biberdorf

Sobolev Institute of Mathematics
630090, Novosibirsk, Russia

N.I. Popova

Budker Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, Russia

Abstract

The paper is connected with the participation of authors in Integrated project № 91-2009 SB RAS "Actual problems of continuum mechanics, semi-conductor physics and mathematical biology. Correctness of boundary-value problems, solution stability and numerical experiment". The attempt is first made to simulate the cardiovascular human system on a computer as the numerical solution of the gemodynamic system by the method of straight lines and the orthogonal sweep method. The guaranteed estimation of errors arised is considered in detail in [2].

The new version **GALA-2.1** of the program package **GALA-2.0** (Guaranteed Accuracy in Linear Algebra) described in the monograph [1] is created. The programs realizing such numerical methods as the orthogonal sweep method, regularization, QR-decomposition of matrixes with the guaranteed estimation of the result accuracy enter into new version. The numerical examples are given.

1 Введение

В настоящее время численное моделирование кровотока в артериальной системе человека привлекает большое внимание многих исследователей. Это связано не только с тем, что заболевания сердечно-сосудистой системы (ССС) вышли на первое место в мире, но и с тем что возможности экспериментальных исследований процессов гемодинамики часто ограничены. Успех вычислительных экспериментов зависит от соответствия математической и вычислительной моделей реальным физическим процессам, протекающим в системе кровообращения человека. В общем случае процессы описываются трехмерными нестационарными уравнениями Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости совместно с уравнениями динамики эластичных оболочек сосудов. На практике решение таких задач связано с огромными вычислительными затратами, поэтому часто рассматриваются упрощенные модели, которые позволяют получать качественные характеристики артериальной системы и являются важным инструментом изучения и диагностики ССС.

В данной работе рассматривается численное решение одномерной модели гемодинамики (дифференциального уравнения с граничными условиями) методом прямых и методом ортогональной прогонки, который обладает устойчивостью к погрешностям округлений при реализации на компьютере и допускает контроль за вычислительными погрешностями [2, 3].

Второй раздел посвящен краткому описанию одномерной математической модели кровотока. В третьем разделе показано приведение системы гемодинамики к обыкновенному дифференциальному уравнению, постановка краевой задачи и граничных условий. В четвертом разделе дано краткое описание метода ортогональной прогонки. В пятом разделе приведены факты из теории возмущений, на которых базируются итоговые оценки погрешности. В шестом разделе мы последовательно разбираем шаги ортогональной прогонки. И наконец, седьмой раздел посвящен численным примерам.

После реализации модели в виде программ был проведен ряд численных экспериментов как для нескольких артерий, так и для всего сосу-

дистого дерева. Для всех 55 артерий человека были получены графики зависимости давления в них от времени и подтверждены их соответствия диапазону реальных значений физиологических параметров в норме и при патологии. Используемый математический и программный аппарат фактически позволяет отслеживать давление в любой артерии в любой его точке в любой момент времени и моделировать различные состояния системы. В частности, с использованием созданных программ были проведены численные эксперименты по моделированию физической нагрузки и тахикардии [5]. Полученные результаты полностью совпадают с данными из медицинской литературы.

Данная работа связана с участием авторов в интеграционном Проекте № 91-2009 СО РАН “Актуальные проблемы механики сплошных сред, физики полупроводников и математической биологии. Корректность краевых задач, устойчивость решений и вычислительный эксперимент”, в аналитической ведомственной целевой программе “Развитие научного потенциала высшей школы” 2009-10 г (Министерство образования и науки РФ) и в Научной школе НШ-4299.2008.1. Впервые предпринята попытка компьютерного моделирования сердечно-сосудистой системы человека как численного решения системы гемодинамики методом прямых и методом прогонки. Работа завершена изданием монографии [3] совместно с биологами, медиками, физиками и математиками.

2 Одномерная математическая модель кровотока

В общем случае физические процессы в артериальной системе человека описываются трехмерными нестационарными уравнениями Навье-Стокса, представляющими собой систему дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных совместно с уравнениями динамики эластичных оболочек сосудов, предложенными физиком и врачом Пуазейлем [6]. Так как на практике решение таких задач связано с огромными вычислительными затратами, то часто рассматриваются упрощенные модели. Одномерные модели (1D), которые являются гидравлическим приближением исходной математической трехмерной модели (3D), получаются усреднением по “поперечному” направлению.

В настоящей работе мы рассматриваем одномерную модель гемодинамики. Подробный вывод модели описан в [9] и [3]. Здесь мы приведем лишь короткие замечания.

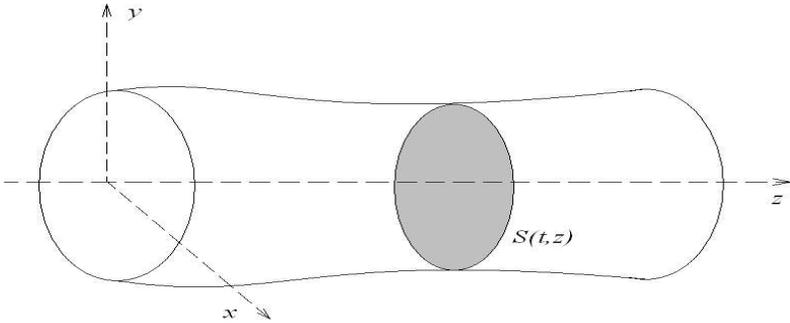


Рис. 1. Упрощенная геометрия кровеносного сосуда.

Одномерная модель описывает течение крови в артериях и ее взаимодействие с подвижными стенками. Пусть t – время, а (x, y, z) – декартовы координаты. Будем считать, что идеализацией артерии является эластичная трубка в виде прямого кругового цилиндра. Рассмотрим кусок этой трубки длины $L = \text{const}$ от $z = 0$ до $z = L$ (см. Рис. 1). Через $D(t)$ мы будем обозначать пространственную область, которая является указанной трубкой, заполненной кровью. Эта область меняется со временем под воздействием пульсирующей жидкости (крови). Осевое сечение $\{z = \text{const}\}$ цилиндра $D(t)$ будем обозначать через $S = S(t, z)$. Описанная упрощенная геометрия артерии естественным образом приводит нас к использованию цилиндрических координат (r, θ, z) . Основные уравнения выводятся при следующих упрощающих предположениях:

- 1) *Осевая симметрия.* Все величины не зависят от угловой координаты θ . Как следствие, каждое осевое сечение S остается круговым в течении всего времени движения стенок сосуда. Радиус трубки R является функцией времени t и осевой координаты z .
- 2) *Радиальные смещения.* Стенка сосуда перемещается только вдоль радиального направления \mathbf{e}_r , т. е. в каждой точке поверхности трубки вектор смещения $\boldsymbol{\eta} = \eta \mathbf{e}_r$, где $\eta = R - R_0$ – смещение относительно исходного радиуса R_0 .
- 3) *Фиксированная ось цилиндра.* Сосуд растягивается и сжимается вдоль оси цилиндра, которая фиксирована во времени. (Эта гипотеза согласуется с гипотезой об осевой симметрии. Однако, она исключает возможность учета эффектов смещения оси артерии, имеющих, например, место в коронарных артериях и вызванных движением сердца.)

- 4) *Постоянство давления на каждом осевом сечении.* Предполагается, что давление p постоянно на каждом сечении, т. е. оно зависит только от z и t .
- 5) *Отсутствие массовых сил.* Мы пренебрегаем массовыми силами. (Хотя, например, учет силы гравитации не создает больших трудностей и связан только лишь с добавкой к давлению слагаемого вида gh . Немного сложнее учесть изменение гравитационных сил, возникающего при вставании человека из горизонтального положения.)
- 6) *Преобладание осевой компоненты скорости.* Считается, что компоненты скорости, ортогональные оси z , являются пренебрежимо малыми по сравнению с осевой компонентой скорости u_z . Предполагается, что

$$u_z(t, r, z) = \bar{u}(t, z)v(r/R(t, z)), \quad (1)$$

где \bar{u} – средняя скорость на каждом осевом сечении, а $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – профиль скорости.

Одномерная модель выводится с помощью интегрирования уравнений Навье-Стокса по произвольному осевому сечению S (усреднением этих уравнений по поперечному направлению) и представляет собой систему из двух дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + K_r \left(\frac{Q}{A} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где A, Q – неизвестные. Здесь $A = A(t, z)$ – площадь поперечного сечения сосуда, $Q = Q(t, z)$ – поток массы, $p = p(t, z)$ – давление, $\alpha = \text{const}$ – коэффициент Кориолиса, $\rho = \text{const}$ – плотность, $K_r = \text{const}$ – коэффициент трения, t – время, z – осевая координата.

Для того, чтобы замкнуть эту систему задают закон давления. Для задания закона давления необходимо учесть движение стенки кровеносного сосуда (артерий). При определенных предположениях закон давления для системы (2) имеет вид

$$p = \beta_0 \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_0}}{A_0} \quad (3)$$

и система (2) является системой уравнений в частных производных первого порядка.

Для простоты полагаем, что $A_0 = \text{const}$ и $\beta_0 = Eh_0\sqrt{\pi} = \text{const}$ (т. е. $R_0 = \text{const}$, $h_0 = \text{const}$, модуль Юнга $E = \text{const}$). С учетом (3) система уравнений (2) записывается в квазилинейном виде [9]

$$\partial_t U + B(U)\partial_x U = S(U), \quad (4)$$

для вектора неизвестных $U = (A, Q)^T$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \frac{Q^2}{A^2} + \frac{\beta_0}{2\rho A_0} \sqrt{A} & 2\alpha \frac{Q}{A} \end{pmatrix}, \quad \text{а вектор } S = \begin{pmatrix} 0 \\ -K_r \frac{Q}{A} \end{pmatrix}.$$

При естественном требовании $A > 0$ система (4) является одномерной *строго гиперболической* системой уравнений и требует по одному граничному условию на каждой границе.

В этой работе численные эксперименты мы проводим для модели (2) в предположении $\beta_0 = \text{const}$, $\alpha = 1$, $K_r = 8\pi\nu$ (для параболического профиля), ν – постоянный коэффициент вязкости.

Граничные условия для одиночной артерии. Для одной артерии длины L на левой (при $z = 0$) и на правой (при $z = L$) границах необходимо поставить по одному граничному условию. В силу математических свойств системы (4) необходимо, чтобы граничные условия приводились к виду

$$\mathcal{S}_1(t)R_{2|z=0} + g_1(t), \quad \mathcal{S}_2(t)R_{1|z=L} + g_2(t), \quad (5)$$

где $\mathcal{S}_{1,2}(t)$ и $g_{1,2}(t)$ – некоторые функции, а $R_{1,2}$ – инварианты Римана (см. [9]).

С другой стороны, граничные условия должны быть разумными с физической точки зрения. На левой границе таким разумным граничным условием является задание давления:

$$p|_{z=0} = q_p(t), \quad (6)$$

где $q_p(t)$ – некоторая известная функция времени – входной профиль давления (в случае без патологии мы рассматривали кусок синусоиды). Граничное условие (6) является хорошим и с математической точки зрения, поскольку оно может быть приведено к виду первого условия из (5).

Что касается правой границы, то мы используем условие постоянства давления

$$p|_{z=L} = q_L(t) = \text{const}, \quad (7)$$

которое также является хорошим с математической точки зрения.

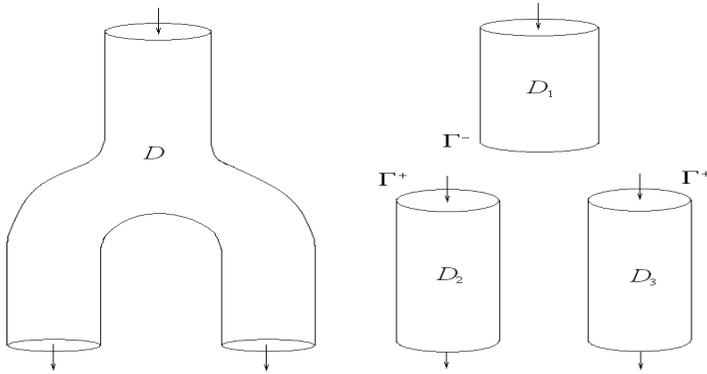


Рис. 2. Одномерная модель бифуркации артерии (метод разбиения области).

Сначала мы хотели задавать на правой границе условие постоянства площади осевого сечения A на концах последних артерий

$$A|_{z=L} = A_0(L).$$

В самом деле, в периферийной области (вдали от сердца) артерии более тонкие и изменение со временем площади их осевого сечения мало по сравнению с характерными изменениями вблизи сердца. Величина же $A_0(L)$ на практике может быть взята из известных таблиц параметров артериальной системы. Но такое граничное условие является некорректным с математической точки зрения, поскольку оно не может приведено ни к одному из видов (5).

Также мы рассматривали вариант задания в качестве левого граничного условия

$$Q|_{z=0} = Q_0(t),$$

что также оказалось некорректным с математической точки зрения.

Граничные условия для бифуркации артерий. Артериальная система характеризуется наличием ветвлений, течение крови в которых является трехмерным. Однако, в рамках одномерной модели можно описать ветвление, следуя методу разбиения области, разделив мысленно сосуд D на два (см. Рис. 2). Полагая, что ветвление происходит в одной точке, для первого уравнения (2) можно записать условие непрерывности объемного кровотока (условие сохранения массы крови при переходе через точку бифуркации)

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \text{при } z = \Gamma. \quad (8)$$

На Рис. 2 стрелками показано направление движения крови из основной ветви D_1 в две другие (D_2 и D_3).

Для уравнения движения (второго в системе (2)) используют обычно условие непрерывности давления. В работе [8] показано, что для случая $\alpha = 1$ интерфейсным условием, которое для задачи в областях D_1 , D_2 и D_3 гарантирует те же условия численной устойчивости, что и для исходной задачи в области D , является условие непрерывности на разрыве полного давления

$$P = p + \frac{1}{2}\rho\bar{u}^2 = p + \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{A} \right)^2. \quad (9)$$

Отсюда, второе условие – непрерывность полного давления в точке ветвления

$$P_1 = P_2 = P_3 \quad \text{при } z = \Gamma. \quad (10)$$

Аналогичным образом можно получить одномерную модель гемодинамики для всей артериальной системы человека, состоящей из 55 артерий (см. Рис. 3).

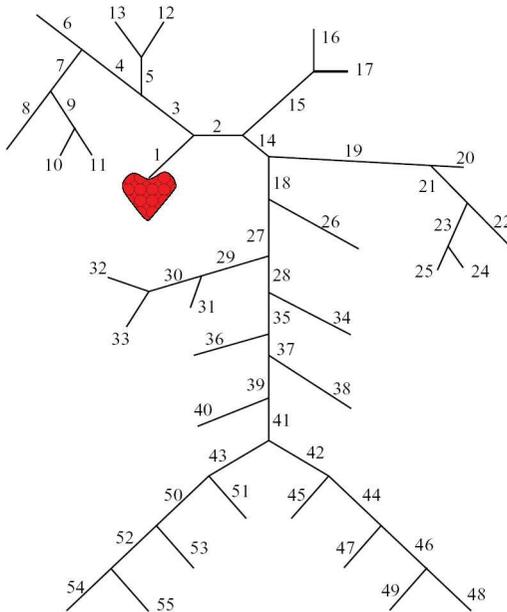


Рис. 3. Артериальная система человека.

Для этого на входе первой артерии (аорты) ставится граничное условие вида (6) (моделирующее работу сердца), на выходе конечных артерий – граничные условия вида (7) (для сосудистой системы человека это 70 мм рт.ст. – экспериментальный факт), а в точках ветвления артерий – интерфейсные условия (8) и (10). При этом в каждой отдельной артерии течение крови описывается системой гемодинамики (2). Считаем, что начальные площади осевого сечения A для каждой артерии постоянные:

$$A_i|_{t=0} = A_{0,i} \quad \text{для } D_i, \quad i = \overline{1, 55},$$

где $A_{0,i}$ – площади сечений отдельных артерий, которые могут быть взяты из известных таблиц параметров артериальной системы человека (см. таблицу 1). Что касается начального условия для объемного кровотока Q , то на практике в численных расчетах артериальной системы обычно используют условие $Q|_{t=0} = 0$.

Таблица 1.

Номер	Название артерии	Длина L (см)	Площадь сечения A_0 (см ²)	β_0 (кг/сек ²)
1	Ascending Aorta	4.0	5.983	388
2	Aortic Arch I	2.0	5.147	348
3	Brachiocephalic	3.4	1.219	932
4	R. Subclavian I	3.4	0.562	1692
5	R. Carotid	17.7	0.432	2064
6	R. Vertebral	14.8	0.123	10360
7	R. Subclavian II	42.2	0.510	1864
8	R. radial	23.5	0.106	11464
9	R. Ulnar I	6.7	0.145	8984
10	R. Interosseous	7.9	0.031	51576
11	R. Ulnar II	17.1	0.133	9784
12	R. internal Carotid	17.6	0.121	10576
13	R. external Carotid	17.7	0.121	9868
14	Aortic Arch II	3.9	3.142	520
15	L. Carotid	20.8	0.430	2076
16	L. internal Carotid	17.6	0.121	10576
17	L. external Carotid	17.7	0.121	9868
18	Thoracic Aorta I	5.2	3.142	496
19	L. Subclavian I	3.4	0.562	1664
20	Vertebral	14.8	0.123	10360
21	L. Subclavian II	42.2	0.510	1864
22	I. Radial	23.5	0.106	11464
23	L. Ulnar I	6.7	0.145	8984
24	L. Interosseous	7.9	0.031	51576

25	L. Ulnar II	17.1	0.133	9784
26	Intercostals	8.0	0.196	3540
27	Thoracic Aorta II	10.4	3.017	468
28	Abdominal I	5.3	1.911	668
29	Celiaca I	2.0	0.478	1900
30	Celiaca II	1.0	0.126	7220
31	Hepatica	6.6	0.152	4568
32	Gastrica	7.1	0.102	6268
33	Splenica	6.3	0.238	3224
34	Superior Mesenterica	5.9	0.430	2276
35	Abdominal II	1.0	1.247	908
36	L. Renal	3.2	0.332	2264
37	Abdominal III	1.0	1.021	1112
38	R. Renal	3.2	0.159	4724
39	Abdominal IV	10.6	0.697	1524
40	Inferior Mesenterica	5.0	0.080	7580
41	Abdominal V	1.0	0.578	1596
42	R. common Iliaca	5.9	0.328	2596
43	L. common Iliaca	5.8	0.328	2596
44	L. external Iliaca	14.4	0.252	5972
45	L. internal Iliaca	5.0	0.181	12536
46	L. Femoralis	44.3	0.139	10236
47	L. deep Femoralis	12.6	0.126	10608
48	L. posterior Tibial	32.1	0.110	23232
49	L. anterior Tibial	34.3	0.060	36972
50	R. external Iliac	14.5	0.252	5972
51	R. internal Iliac	5.1	0.181	112536
52	R. Femoral	44.4	0.139	10236
53	R. deep Femoral	12.7	0.126	10608
54	L. posterior Tibial	32.3	0.110	23232
55	R. anterior Tibial	34.4	0.060	36972

3 Сведение к обыкновенному дифференциальному уравнению

Система гемодинамики (2), описывающая течение крови в каждой отдельной артерии, сводится к решению дифференциального уравнения с соответствующими граничными условиями.

Постановка задачи. Для простоты полагаем, что $A_0 = \text{const}$ и $\beta_0 = Eh_0\sqrt{\pi} = \text{const}$ (т. е. $R_0 = \text{const}$, $h_0 = \text{const}$, модуль Юнга $E = \text{const}$). С учетом (3) система уравнений (2) записывается в квазилинейном виде

$$\partial_t U + B(U)\partial_x U = S(U), \quad (11)$$

где вектор неизвестных $U = (A, Q)^T$ и при $\alpha = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Q^2}{A^2} + \frac{\beta_0}{2\rho A_0} \sqrt{A} & 2\frac{Q}{A} \end{pmatrix}, \quad \text{а вектор } S = \begin{pmatrix} 0 \\ -K_r \frac{Q}{A} \end{pmatrix}.$$

При естественном требовании $A > 0$ система (11) является гиперболической.

Будем считать, что длина сосуда d . Сформулируем краевые условия в следующем виде

$$p|_{x=0} = q_l(t), \quad p|_{x=d} = q_r(t). \quad (12)$$

В качестве начальных условий возьмем

$$A|_{t=0} = A_0, \quad Q|_{t=0} = 0. \quad (13)$$

Таким образом, для решения задачи требуется найти распределение $U = U(t, x)$ на отрезке $[0, d]$ оси x в любой момент времени t , т. е. найти решение уравнения (11) при заданных граничных и начальных условиях.

Дискретизация по времени. Рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{t, x\}$. Разделим область $t \geq 0, 0 \leq x \leq d$ на полосы с шагом τ по времени (по оси t)

$$t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, \dots$$

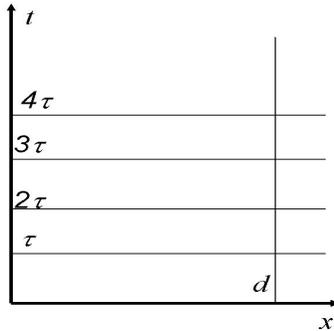


Рис. 4. Разделение расчетной области на полосы по времени.

Пусть $U_k = U(t_k, x)$. Аппроксимируем дифференциальное уравнение (11) разностным выражением

$$\frac{U_{k+1} - U_k}{\tau} + B(U_k) \frac{dU_{k+1}}{dx} = S(U_k).$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$\frac{dU_{k+1}}{dz} = -\frac{1}{\tau} B^{-1}(U_k) U_{k+1} + \frac{1}{\tau} B^{-1}(U_k) U_k + B^{-1}(U_k) S(U_k).$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение

$$\frac{dU_{k+1}}{dz} = H U_{k+1} + f, \quad (14)$$

где матрица H имеет вид

$$H = -\frac{1}{\tau} B^{-1}(U_k) = -\frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \frac{2}{\frac{Q_k}{A_k} - \frac{\beta_0}{2\rho A_0} \frac{A_k \sqrt{A_k}}{Q_k}} & \frac{1}{-\frac{Q_k^2}{A_k^2} + \frac{\beta_0}{2\rho A_0} \sqrt{A_k}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

а вектор f есть

$$f = \frac{1}{\tau} B^{-1}(U_k) U_k + B^{-1}(U_k) S(U_k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} + \frac{K_r}{A_k} \\ \frac{Q_k}{A_k^2} - \frac{\beta_0}{2\rho A_0} \frac{\sqrt{A_k}}{Q_k} \\ \frac{A_k}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Для того, чтобы система была линейной, элементы H и f формируются из величин U_k с предыдущего временного слоя.

Линеаризация граничных условий. Рассмотрим сначала случай одной артерии. Граничные условия (12) так же не являются линейными. Для линеаризации произведем следующее преобразование

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \beta_0 \frac{\sqrt{A_{k+1}} - \sqrt{A_0}}{A_0} = \beta_0 \frac{A_{k+1} - A_0}{A_0(\sqrt{A_{k+1}} + \sqrt{A_0})} \approx \beta_0 \frac{A_{k+1} - A_0}{A_0(\sqrt{A_k} + \sqrt{A_0})} = \\ &= \frac{\beta_0}{A_0(\sqrt{A_k} + \sqrt{A_0})} A_{k+1} - \frac{\beta_0}{(\sqrt{A_k} + \sqrt{A_0})} A_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим

$$a_k = \frac{\beta_0}{A_0(\sqrt{A_k} + \sqrt{A_0})}, \quad b_k = \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q_k}{A_k^2} \right), \quad c_k = \frac{\beta_0}{(\sqrt{A_k} + \sqrt{A_0})}.$$

Тогда граничные условия (6), (7) для дифференциального уравнения (14) имеют вид

$$\begin{aligned} a_k A_{k+1} \Big|_{x=0} &= q_p(t_k) + c_k, \\ a_k A_{k+1} \Big|_{x=d} &= q_d(t_k) + c_k. \end{aligned} \quad (18)$$

Для линеаризации условия (9) также используем A_k, Q_k с предыдущего временного шага:

$$P_{k+1} = p_{k+1} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q_{k+1}}{A_{k+1}} \right)^2 \approx a_k A_{k+1} + b_k Q_{k+1} - c_k. \quad (19)$$

Решение. Таким образом, для одной артерии длины d и заданного временного слоя t_{k+1} мы имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{dU_{k+1}(x)}{dx} &= H(x)U_{k+1}(x) + f(x), \quad 0 \leq x \leq d, \\ LU_{k+1}(0) &= \varphi, \quad RU_{k+1}(d) = \psi, \end{aligned} \quad (20)$$

где $H(x), f(x)$ определяются по формулам (15), (16) и, учитывая (18),

$$\begin{aligned} LU_{k+1}(0) &= (a_k, 0) \begin{pmatrix} A_{k+1} \\ Q_{k+1} \end{pmatrix} \Big|_{x=0} = q_p(t_k) + c_k = \varphi, \\ RU_{k+1}(d) &= (a_k, 0) \begin{pmatrix} A_{k+1} \\ Q_{k+1} \end{pmatrix} \Big|_{x=d} = q_d(t_k) + c_k = \psi. \end{aligned}$$

Для численного решения используем метод ортогональной прогонки. Применяя метод ортогональной прогонки к краевой задаче (20), мы получим вычисленное решение – вектор-функцию $U_{k+1}^{[c]}(x_s)$ в каждой точке x_s ($s = 0, 1, \dots, m$) отрезка $[0, d]$ и на заданном временном слое t_{k+1} , т.е. мы получим численное решение системы гемодинамики (11) – вектор-функцию $U_{k+1}^{[c]}(x_s) = (A_{k+1}^{[c]}(x_s), Q_{k+1}^{[c]}(x_s))^T$ для одиночной артерии длины d и можем вычислить по формуле (19) давление $P_{k+1}^{[c]}(x_s)$ в любой точке артерии $0 \leq x_s \leq d$ и в любой момент времени $0 \leq t_{k+1} \leq T$. Оценить погрешность результата можно по формулам, полученным в работе [2].

4 Метод ортогональной прогонки

4.1 Предварительные замечания.

Метод ортогональной прогонки предназначен для численного решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= A(x)u(x) + f(x), \quad x_0 \leq x \leq x_m, \quad d = x_m - x_0, \\ Lu(x_0) &= \varphi, \quad Ru(x_m) = \psi, \end{aligned} \quad (21)$$

где A – матрица размера $n \times n$, f – вектор-функция размера n , L, R – прямоугольные матрицы размера $k \times n$ и $p \times n$ соответственно:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ l_{k1} & l_{k2} & \dots & l_{kn} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & r_{pn} \end{pmatrix},$$

причем $k + p = n$ и ранги матриц L и R соответственно равны k и p . Элементы матрицы $A(x)$ и вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ предполагаются непрерывными на отрезке $[x_0, x_m]$. Метод основан на представлении решения задачи (21) через решения серий задач Коши (см. [4]).

Метод ортогональной прогонки зарекомендовал себя на практике как эффективное и надежное средство численного решения краевых задач типа (21). В данном случае он предпочтителен для решения задачи гомодинамики, так как он обладает повышенной устойчивостью к погрешностям округлений при реализации метода на компьютере. Решение краевой задачи (21) поводится по следующему алгоритму.

4.2 Алгоритм

Дано: краевая задача (21).

Разбивка отрезка $[x_0, x_m]$.

Разобьем отрезок $[x_0, x_m]$ на m участков точками

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{s-1} < x_s < \dots < x_m$$

так, что

$$|x_s - x_{s-1}| \leq \frac{C}{\max_{x \in [x_0, x_m]} \|A(x)\|}, \quad C \approx 1 \div 3. \quad (22)$$

Определение базиса решений однородного левого граничного условия.

Определяем $z_j(x_0)$, $j = 1, \dots, p$ – полную ортонормированную систему векторов

$$(z_j, z_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i, \end{cases}$$

удовлетворяющих условию

$$Lz_j(x_0) = 0.$$

Вычисление решения неоднородного левого граничного условия.

Находим вектор $z_f(x_0)$, ортогональный ко всем $z_j(x_0)$ (то есть $(z_f, z_j) = 0$), удовлетворяющий уравнению

$$Lz_f(x_0) = \varphi.$$

Прямая прогонка.

Цикл по $s = 1, \dots, m$, отрезок $[x_{s-1}, x_s]$.

Решение задач Коши.

Путем численного интегрирования следующей серии задач Коши находим векторы $y_f(x_s)$, $y_j(x_s)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy_f(x)}{dx} &= A(x)y_f(x) + f(x), & y_f(x_{s-1}) &= z_f(x_{s-1}), \\ \frac{dy_j(x)}{dx} &= A(x)y_j(x), & y_j(x_{s-1}) &= z_j(x_{s-1}), \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{23}$$

Ортогонализация.

В результате ортогонализации набора векторов

$$y_1(x_s), \dots, y_p(x_s), y_f(x_s),$$

используя, например, QR-разложение, получаем векторы

$$z_1(x_s), \dots, z_p(x_s), z_f(x_s)$$

и матрицу Ω_s размера $(p+1) \times (p+1)$ такую, что

$$Y_s = Z_s \Omega_s, \tag{24}$$

где

$$Y_s = [y_1(x_s), \dots, y_p(x_s), y_f(x_s)], \quad Z_s = [z_1(x_s), \dots, z_p(x_s), z_f(x_s)],$$

причем $Z_s^* Z_s = I_n$, а Ω_s – верхнетреугольная матрица вида

$$\Omega_s = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \omega_{1,p+1}^{(s)} \\ & & & & \vdots \\ & \hat{\Omega}_s & & & \omega_{p,p+1}^{(s)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Конец цикла.

Обратная прогонка.

Правое граничное условие.

Вектор коэффициент α однозначно определяется из граничного условия

$$Ru(x_m) = RZ_m \alpha = \psi,$$

т. е. из решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j R z_j(x_m) = \psi - R z_f(x_m). \quad (25)$$

Замечание. Если решение системы единственно, то можно утверждать, что решение задачи (21) единственно и наоборот.

Вычисление решения $u(x)$.

Находим значения искомой вектор-функции $u(x)$ в точках

$$x_m, x_{m-1}, \dots, x_s, \dots, x_1, x_0$$

следующим образом. Пусть

$$\beta_s = \begin{pmatrix} \beta_s^{(1)} \\ \beta_s^{(2)} \\ \vdots \\ \beta_s^{(p)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s = m, m-1, \dots, 2, 1.$$

Положим $\beta_m^{(j)} = \alpha_j$, $j = 1, \dots, p$. Тогда, учитывая, что на каждом шаге s при прямой прогонке уже вычислены Z_s и Ω_s (24), находим

$$u(x_s) = Z_s \beta_s, \quad (26)$$

где β_s определяется через β_{s+1} путем решения системы уравнений с хорошо обусловленной верхнетреугольной матрицей Ω_{s+1} :

$$\Omega_{s+1} \beta_s = \beta_{s+1}. \quad (27)$$

Оценка вычислительных погрешностей.

Определить погрешность результата по формулам из работы [2] при выполнении условий Теоремы 1.

Результат выполнения алгоритма – вычисленное решение краевой задачи (21) с оценкой точности результата.

Схематично этот алгоритм представлен на Рис.5

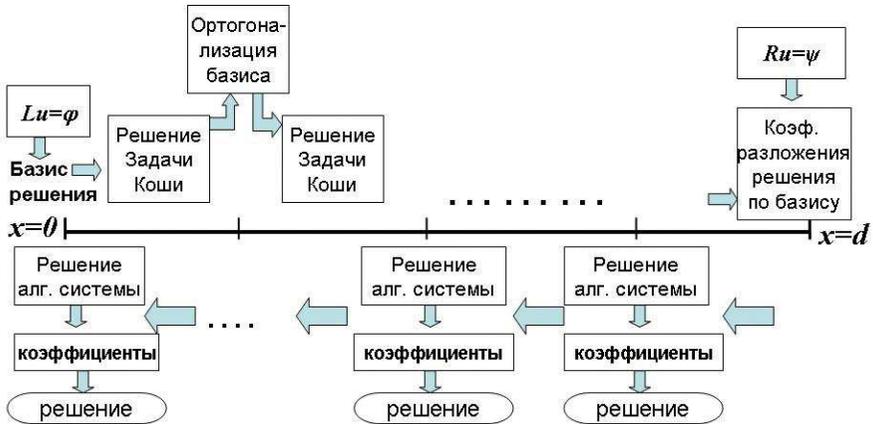


Рис. 5. Схема метода ортогональной прогонки.

5 Теория возмущений

Пусть краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{du(x)}{dx} &= A(x)u(x) + f(x), \quad 0 \leq x \leq d \\ Lu(0) &= \varphi, \quad Ru(d) = \psi, \end{aligned} \quad (28)$$

правильно поставлена. (Здесь $A(x)$ – матрица размера $n \times n$, L, R – прямоугольные матрицы размера $k \times n$ и $p \times n$ соответственно, причем $k+p = n$ (ранги матриц L, R равны k и p), вектор-функция $f(x)$ – размера n).

Это означает, что краевая задача (28) имеет единственное решение для любых φ, ψ и любой непрерывной на отрезке $[0, d]$ вектор-функции $f(x)$. Тогда решение задачи представляется с помощью матриц Грина $G(x, s), G_L(x), G_R(x)$ (см. [4])

$$u(x) = G_L(x)\varphi + \int_0^d G(x, s)f(s)ds + G_R(x)\psi, \quad (29)$$

где $G_L(x)$ – матрица-функция размера $n \times k$, решение задачи

$$\begin{cases} \frac{dG_L(x)}{dx} = A(x)G_L(x), \\ LG_L(0) = I_k, \quad RG_L(d) = O_{p \times k}, \end{cases}$$

матрица-функция $G_R(x)$ размера $n \times p$, решение задачи

$$\begin{cases} \frac{dG_R(x)}{dx} = A(x)G_R(x), \\ LG_R(0) = O_{k \times p}, \quad RG_R(d) = I_p, \end{cases}$$

и матрица-функция $G(x, s)$ размера $n \times n$, решение задачи

$$\begin{cases} \frac{dG(x, s)}{dx} = A(x)G(x, s), \\ LG(0, s) = O_{k \times n}, \quad RG(d, s) = O_{p \times n}, \\ G(s+0, s) - G(s-0, s) = I_n, \end{cases}$$

где $O_{l \times m}$ – нулевая матрица размера $l \times m$.

Будем говорить, что задача (28) хорошо обусловлена, если для любых x и s из интервала $[0, d]$ верны оценки

$$\|G_L(x)\| \leq K, \quad \|G(x, s)\| \leq K, \quad \|G_R(x)\| \leq K. \quad (30)$$

Из (29) следует, что для решения хорошо обусловленной задачи (28) справедлива оценка

$$\max_{x \in [0, d]} \|u(x)\| \leq K(\|\varphi\| + \|\psi\| + d \max_{x \in [0, d]} \|f(x)\|). \quad (31)$$

Это позволяет утверждать, что решение задачи (28) устойчиво по отношению к возмущениям.

Предположим, что мы одновременно рассматриваем две “близкие” краевые задачи на отрезке $0 \leq x \leq d$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du(x)}{dx} = A(x)u(x) + f(x), \\ Lu(0) = \varphi, \quad Ru(d) = \psi; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} = \tilde{A}(x)\tilde{u}(x) + \tilde{f}(x), \\ \tilde{L}\tilde{u}(0) = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{R}\tilde{u}(d) = \tilde{\psi}. \end{array} \right. \quad (32)$$

Матрицы \tilde{L}, \tilde{R} , входящие в граничные условия, предполагаются имеющими то же число строк и столбцов, что и L, R соответственно. Утверждение, что первая и вторая задачи “близкие”, можно понимать как утверждение, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|\tilde{A} - A\| &\leq \epsilon_A, & \|\tilde{f} - f\| &\leq \epsilon_f, \\ \|\tilde{\varphi} - \varphi\| &\leq \epsilon_\varphi, & \|\tilde{\psi} - \psi\| &\leq \epsilon_\psi, \\ \|\tilde{L} - L\| &\leq \epsilon_L, & \|\tilde{R} - R\| &\leq \epsilon_R, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\max\{\epsilon_A, \epsilon_f, \epsilon_\varphi, \epsilon_\psi, \epsilon_L, \epsilon_R\} = \varepsilon - \text{достаточно маленькое число.}$$

Всюду $f(x), \tilde{f}(x)$ – непрерывные вектор-функции. Оказывается, что из разрешимости первой задачи при не слишком большом ε вытекает разрешимость второй.

Теорема 1 Пусть $u(x)$ – решение правильно поставленной задачи (28), для функций Грина, которой справедливы оценки (30). Пусть наряду с краевой задачей (28) имеется близкая к ней краевая задача (32), причем для элементов, определяющих эту краевую задачу, справедливы оценки (33). Тогда при

$$\varepsilon < \min\{1/[2K(2+d)], 1/(2+d)\} \quad (34)$$

существует и единственно $\tilde{u}(x)$ – решение задачи (32) и для него верна оценка

$$\max_{x \in [0, d]} \|\tilde{u}(x) - u(x)\| \leq \varepsilon \mu, \quad (35)$$

причем μ – число обусловленности задачи равно

$$\mu = K(2 + d)(1 + \max_{x \in [0, d]} \|\tilde{u}(x)\|) \leq K(2 + d)(1 + 2KF), \quad (36)$$

где

$$F = 1 + \|\varphi\| + \|\psi\| + d \max_{x \in [0, d]} \|f(x)\|.$$

(Доказательство – в [?].)

Оценка означает, что решение $u(x)$ краевой задачи непрерывно зависит от коэффициентов A, L, R и правых частей $\varphi, \psi, f(x)$. В оценку непрерывности входит длина d отрезка, на котором ищется решение, и оценка K норм матриц Грина. Видно, что первое выражение для числа обусловленности μ в (36) удобно использовать, когда уже есть вычисленное решение $\tilde{u}(x)$, второе – при прогнозировании погрешности, когда численное решение еще не известно.

6 Детали алгоритма

Численное решение задачи (21), полученное по Алгоритму 4.2, обозначим $u^{[c]}(x)$ ("с" от английского "computation"). Доказано (см. [?]), что $u^{[c]}(x)$ можно рассматривать как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{du^{[c]}(x)}{dx} &= \tilde{A}(x)u^{[c]}(x) + \tilde{f}(x) + \hat{f}(x), \\ Lu^{[c]}(x_0) &= \tilde{\varphi}, \quad Ru^{[c]}(x_m) = \tilde{\psi}, \end{aligned} \quad (37)$$

где возмущения $\max_{x \in [x_0, x_m]} \|A - \tilde{A}\|$, $\max_{x \in [x_0, x_m]} \|f(x) - \tilde{f}(x) - \hat{f}(x)\|$, $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|$, $\|\psi - \tilde{\psi}\|$, невелики. Следовательно, краевая задача (37) может считаться достаточно близкой к исходной (21) и применение Теоремы 1 позволяет получить оценку решения

$$\max_{x \in [x_0, x_m]} \|u^{[c]}(x) - u(x)\| \leq \varepsilon \mu, \quad (38)$$

причем число обусловленности μ равно

$$\mu = K(2 + d)(1 + \max_{x \in [x_0, x_m]} \|u^{[c]}(x)\|).$$

Видно, что для вычисления погрешности решения (38) необходимо знать ε и K . Для оценки K (30) существуют алгоритмы вычисления матриц Грина методом ортогональной встречной прогонки (см. [4]). Чтобы оценить погрешности в неравенствах (33) и выбрать $\varepsilon = \max\{\epsilon_\varphi, \epsilon_\psi, \epsilon_L, \epsilon_R, \epsilon_A, \epsilon_f\}$ нужно повторить процесс решения краевой задачи по Алгоритму 4.2, учитывая погрешности, которые возникают в промежуточных вычислениях. Оценка этих погрешностей проводится на основе метода обратного анализа погрешностей. Эта процедура подробно описана в [2].

Кусочно-линейное приближение матрицы $A(x)$ и правой части $f(x)$. Часто алгоритм ортогональной прогонки применяется к задачам, для которых матричная и векторная функции $A(x)$ и $f(x)$ заданы только в отдельных точках. В случае задачи о течении крови в сосуде мы так же сталкиваемся с такой ситуацией: матрицу и правую часть мы сможем вычислить только в точках x_s : $x_s - x_{s-1} = d/m$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_s < \dots < x_m = d$. Для того, чтобы приблизить $A(x)$ и $f(x)$ непрерывными функциями, применим простейший метод интерполяции при помощи кусочно-линейных функций. Таким образом, задача (21) заменяется на следующую

$$\begin{aligned} \frac{du_{lin}(x)}{dx} &= A_{lin}(x)u_{lin} + f_{lin}(x), \\ Lu_{lin}(x_0) &= \varphi, \quad Ru_{lin}(x_N) = \psi, \end{aligned} \quad (39)$$

где на отрезке $[x_{s-1}, x_s]$ функции $A_{lin}(x)$ и $f_{lin}(x)$ представляются в виде

$$A_{lin}(x) = A_1^{(s)}x + A_0^{(s)}, \quad f_{lin}(x) = f_1^{(s)}x + f_0^{(s)},$$

так что

$$\begin{aligned} A_{lin}(x_{s-1}) &= A(x_{s-1}), & A_{lin}(x_s) &= A(x_s) \\ f_{lin}(x_{s-1}) &= f(x_{s-1}), & f_{lin}(x_s) &= f(x_s) \end{aligned}$$

Для того, чтобы оценить погрешности $\|f(x) - f_{lin}(x)\|$ и $\|A(x) - A_{lin}(x)\|$, используем теорему о полиномиальной интерполяции.

В нашем случае интерполяция производится полиномами первого порядка. Поэтому введем величину K_{dif} , которая оценивает вторые производные элементов матричной и векторной функций $A(x)$ и $f(x)$ так, что

$$\|A''(x)\| \leq K_{dif} \quad \text{и} \quad \|f''(x)\| \leq K_{dif}$$

при $x \in [x_0, x_m]$. Тогда по теореме о полиномиальной интерполяции получаем требуемые оценки

$$\|f(x) - f_{lin}(x)\| \leq K_{dif} \frac{h^2}{2} = \epsilon_{lin}, \quad \|A(x) - A_{lin}(x)\| \leq K_{dif} \frac{h^2}{2} = \epsilon_{lin}. \quad (40)$$

На основании этих неравенств по Теореме 1 получаем оценку для разности решений исходной задачи (21) и задачи с кусочно-линейными коэффициентами

$$\max_{x \in [x_0, x_m]} \|u - u_{lin}\| \leq \frac{h^2}{2} K_{dif} \mu, \quad (41)$$

где

$$\mu = K(2 + d)(1 + \max_{x \in [x_0, x_m]} \|u_{lin}\|).$$

Левое граничное условие. Коротко изложим способ определения z_j и z_f из левого граничного условия. Допустим, необходимо решить систему

$$LZ = 0, \quad (42)$$

где матрица L размера $k \times n$, ($k + p = n$), вектор Z размера n .

С помощью ортогональных преобразований отражения получаем ортогональную матрицу Q такую, что матрица L^* представима в виде произведения двух матриц – верхнетреугольной Ω размера $n \times k$ и квадратной матрицы Q размера $n \times n$. Для построения отражений воспользуемся рекомендациями из Главы 3 монографии [1]. В результате получим верхнетреугольную матрицу Ω_0

$$\Omega_0 = Q_0 L^* \quad \text{или} \quad L^* = Q_0^* \Omega_0.$$

При этом система (42) запишется в виде

$$\Omega_0^* Q_0 Z_0 = 0 \quad \text{или} \quad \Omega_0^* Y_0 = 0, \quad \text{где} \quad Y_0 = Q_0 Z_0. \quad (43)$$

Для системы (43) полный ортогональный базис подпространства векторов, удовлетворяющих $\Omega_0^* Y_0 = 0$, составляют векторы e_{k+1}, \dots, e_n , где e_i – вектор, у которого все компоненты, кроме i -ой, равны 0, а i -я компонента равна 1.

Отсюда получаем решение в (42) $Z_0 = Q_0^* Y$. Столбцы $z_j(x_0)$, $j = 1, \dots, p$, матрицы Z_0 являются искомым начальным базисом.

Вектор $z_f(x_0)$ находится из решения недоопределенной системы линейных уравнений

$$Lz_f = \varphi.$$

В результате вычисления на компьютере вместо векторов $z_j(x_0)$ и $z_f(x_0)$ будут найдены близкие к ним $z_j^{[c]}(x_0) = z_j(x_0) + \zeta_j^{(0)}$ и $z_f^{[c]}(x_0) = z_f(x_0) + \zeta_f^{(0)}$. Вывод оценок, возникающих на этом этапе, подробно описан в работе [2].

Метод интегрирования. Для интегрирования задач Коши (23) мы используем самый простой метод – метод Эйлера. У этого метода есть недостаток – уменьшение его погрешности (т. е. соответствующее уменьшение шага интегрирования) требует больших вычислительных затрат. Несмотря на это мы используем этот метод по следующим соображениям. Во-первых, в задаче о кровообращении (как и во многих других задачах) интегрируются не сами функции, а их приближения. В данном случае используется также наиболее простое кусочно-линейное приближение. Следовательно, уже на этапе интерполяции коэффициентов задачи вносится определенная погрешность. И при выборе метода интегрирования достаточно следить за тем, чтобы погрешность интегрирования не превышала погрешности интерполяции. В предлагаемом варианте это условие будет соблюдено.

Замечание. Из этих рассуждений также следует, что для того, чтобы повысить общую точность решения задачи, нужно параллельно повысить порядок интерполяции и точность интегрирования.

Вторая причина использования именно метода Эйлера – это его простота, которая позволяет относительно легко проследить за накоплением и распространением погрешностей в процессе интегрирования.

При этом метод Эйлера можно все же несколько видоизменить, если учесть специальный кусочно-линейный вид матрицы коэффициентов и правой части с тем, чтобы минимизировать погрешности интегрирования. Все оценки погрешностей интегрирования даны в работе [2].

В результате интегрирования системы (23) на отрезке $[x_{s-1}, x_s]$ мы получим приближенно вычисленные значения $y_1^{[c]}(x_s), \dots, y_p^{[c]}(x_s), y_f^{[c]}(x_s)$ в точке x_s .

Метод ортогонализации. Мы используем преобразования отражения Хаусхолдера для ортогонализации базисов в подпространствах, возникающих на каждом шаге прямой прогонки. Главной причиной использования этого метода является его повышенная устойчивость к ошибкам округления, то есть точность получения ортогональной системы векто-

ров в этом случае не зависит от числа обусловленности прямоугольной матрицы, составленной из векторов, подлежащих ортогонализации.

Следующим шагом в Алгоритме 4.2 является ортогонализация полученных векторов $y_1^{[c]}(x_s), \dots, y_p^{[c]}(x_s), y_f^{[c]}(x_s)$. Согласно методу ортогональных отражений, подробно описанному в Главах 3, 4 монографии [1], если

$$Y_s^{[c]} = [y_1^{[c]}(x_s), \dots, y_p^{[c]}(x_s), y_f^{[c]}(x_s)],$$

то

$$R_s = \bar{Q}_s^* Y_s^{[c]} \quad \text{или} \quad Y_s^{[c]} = \bar{Q}_s \bar{R}_s,$$

где

$$\bar{Q}_s = P_{p+1} P_p \dots P_1,$$

P_j - преобразования отражения, аннулирующие элементы j -го столбца матрицы $P_{j-1} \dots P_1 Y_s^{[c]}$. Отсюда, если $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_{p+1}$ - первые p столбцов матрицы \bar{Q}_s , то стартовые значения для интегрирования на следующем шаге берутся в виде

$$\bar{z}_i(x_s) = \bar{q}_i, \quad \bar{z}_f(x_s) = \bar{r}_{p+1, p+1}^{(s)} \bar{q}_{p+1},$$

а матрица $\bar{\Omega}_s$, используемая при обратной прогонке, совпадает с верхней квадратной частью матрицы \bar{R}_s за исключением последнего элемента на диагонали: $\bar{\omega}_{p+1, p+1}^{(s)} = 1$. В действительности при реализации этого подхода на компьютере возникают арифметические погрешности. В результате вместо векторов \bar{z}_i, \bar{z}_f и матрицы $\bar{\Omega}_s$ будут вычислены $z_i^{[c]}(x_s), z_f^{[c]}(x_s)$ и $\Omega_s^{[c]}$. Подробно оценки погрешностей вычисления \bar{Q}_s и $\bar{\Omega}_s$ описаны в работе [2].

Правое граничное условие. Следующим шагом в Алгоритме 4.2 является определение вектор-коэффициента α . Обратная прогонка начинается с того, что $u_{lin}(x_m)$ представляется в виде

$$u_{lin}(x_m) = \bar{z}_f(x_m) + \sum_{j=1}^p \bar{\alpha}_j \bar{z}_j(x_m),$$

а коэффициенты $\bar{\alpha}_j$ находятся из правого граничного условия (25).

В действительности же, с учетом погрешностей, решение ищется в виде

$$u^{[c]}(x_m) = z_f^{[c]}(x_m) + \sum_{j=1}^p \alpha_j^{[c]} z_j^{[c]}(x_m) \quad (44)$$

Подставим выражение (44) в граничное условие $Ru(x_m) = \psi$. Отсюда, коэффициенты $\bar{\alpha}_j$ определяются из полученной системы линейных уравнений с погрешностью (см. таблицу 8.1 в Главе 8 в [3] и [2]). Полагаем, что в крайней точке x_m $\beta_j(x_m) = \alpha_j$, $j = 1, \dots, p$.

Обратная прогонка и вычисление решения. Следуя Алгоритму 4.2, приближенное решение в каждой точке x_s ($s = m-1, \dots, 1, 0$) вычисляется через $Z_s^{[c]} = [z_1^{[c]}(x_s), \dots, z_p^{[c]}(x_s), z_f^{[c]}(x_s)]$ и $\Omega_s^{[c]}$ (полученные при прямой прогонке) по формуле

$$u^{[c]}(x_s) = z_f^{[c]}(x_s) + \sum_{j=1}^p \beta_j^{[c]}(x_s) z_j^{[c]}(x_s),$$

где вектор $\beta^{[c]}(x_s) = \beta_s^{[c]}$ определяется через $\beta_{s+1}^{[c]}$ при обратной прогонке путем решения системы уравнений с верхнетреугольной матрицей $\Omega_{s+1}^{[c]}$:

$$\Omega_{s+1}^{[c]} \beta_s^{[c]} = \beta_{s+1}^{[c]}.$$

Окончательные погрешности решения и погрешности, возникающие при обратной прогонке, подробно рассмотрены в работе [2].

7 Результаты численного решения

Рассмотрим несколько примеров использования описанного выше численного метода для моделирования течения крови в сосудах.

Как было показано в Разделе 3 система гемодинамики (11), описывающая течение крови в каждой отдельной артерии, сводится к решению уравнения (14) с соответствующими граничными условиями.

При вычислении элементов матрицы H , вектора f мы использовали следующие величины (единицы измерения в системе СГС):

d – длина сосуда,

$A = A(t, x)$ – площадь поперечного сечения сосуда,

$Q = Q(t, x)$ – поток массы,

$p = p(t, x)$ – давление,

$\alpha = \text{const}$ – коэффициент Кориолиса,

$\rho = \text{const}$ – плотность,

$K_r = \text{const}$ – коэффициент трения,

t – время,

x – осевая координата,

$\beta = Eh\sqrt{\pi} = \text{const}$,

h – толщина стенки сосуда (считаем ее постоянной),

E – модуль Юнга (тоже = const),

$A_0 = A|_{t=0} = \pi R_0^2 = \text{const}$,

$R_0 = R_0(x)$ – исходный радиус сосуда (будем считать, что он не зависит от x , т. е. = const),

Будем считать, что $\alpha = 1$,

Коэффициент трения K_r берем в виде $K_r = 8\pi\nu$, где ν – коэффициент вязкости.

В расчетах использовались значения

$$\rho = 1 \text{ г/см}^3, \quad h = 0.05 \text{ см}, \quad \nu = 0.035 \text{ П}, \quad E = 3 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2.$$

Все основные данные, в том числе структура сосудистого дерева (см. Рис. 3) и описание основных артерий и артериол (таблица 1) взяты из диссертации [7].

7.1 Одиночный сосуд

Как пример рассмотрим модельную задачу о течении крови в одиночном сосуде длины 10 см. И пусть на левом его конце поддерживается давление $p|_{x=0} = 10 + 10|\sin \pi t|$, а на правом зададим нулевое давление: $p|_{x=10} = 0$. Результаты расчетов на основе одномерной модели гемодинамики с использованием метода прямых и метода ортогональной прогонки представлены на Рис. 6.

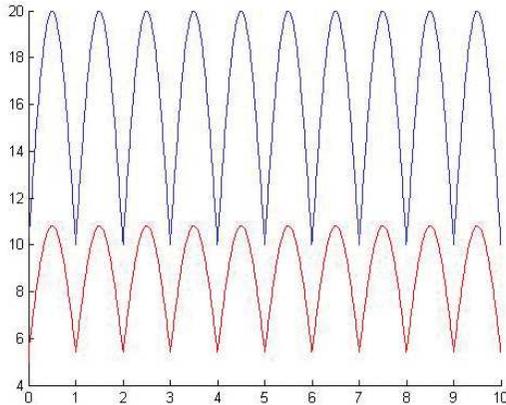


Рис. 6. Давление в одиночном сосуде: верхний график – давление на левом конце, нижний – давление в середине сосуда (по вертикали – давление в мм. рт. ст., по горизонтали – время в сек).

7.2 Ветвление сосудов

Рассмотрим модельную задачу для системы из трех сосудов (Рис. 7). Также как и в предыдущей задаче на всех трех свободных концах задается давление, причем давление на концах 2-го и 3-го сосудов нулевое. В качестве условий в точке ветвления используются равенства (8) и (10). Результаты численного моделирования изображены на Рис. 8.

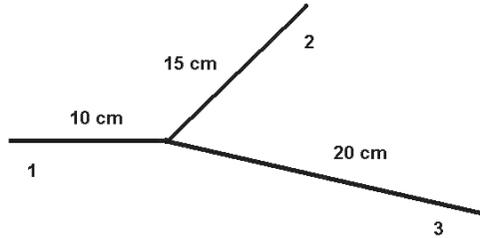


Рис. 7. Модельная система из трех сосудов.

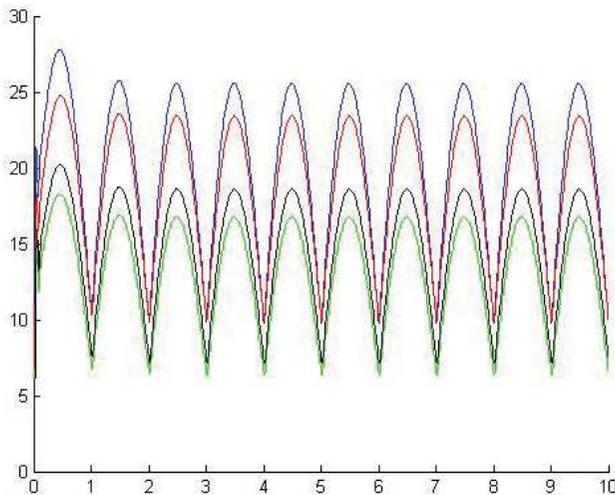


Рис. 8. Давление в системе из трех сосудов, сверху вниз: давление на конце 1-го сосуда, давление в середине 1-го, 2-го и 3-го сосудов (по вертикали – давление в мм. рт. ст., по горизонтали – время в сек).

7.3 Артериальная система человека

В качестве примера использования описанной вычислительной методики, рассмотрим задачу о течении крови в артериальной системе человека из 55 артерий и артериол, изображенной на Рис. 3.

Итак, в качестве математической модели по-прежнему используем одномерную модель гемодинамики для каждой артерии (14). На входе первой артерии (аорты) ставится граничное условие вида (6) (моделирующее работу сердца), на выходе конечных артерий $-p = 70$. Здесь имеется в виду давление 70 мм рт.ст. (так как программы создавались для биологов и медиков, которые традиционно измеряют давление крови в мм рт.ст.). С учетом того, что уравнения и граничные условия линейные, мы получим вычисленное давление в мм рт.ст. В точках ветвления артерий мы требуем выполнения интерфейсных условий (8) и (10).

Например, граничные условия для бифуркации артерий в общем случае, когда i артерия разветвляется на j и l записываются так

$$\begin{aligned}Q_i &= Q_j + Q_l, \\a_i A_i + b_i Q_i - c_i &= a_j A_j + b_j Q_j - c_j, \\a_i A_i + b_i Q_i - c_i &= a_l A_l + b_l Q_l - c_l.\end{aligned}$$

Исходные площади сечения артерий $A_i|_{t=0}$ могут быть взяты из известных таблиц параметров артериальной системы человека. Для объемного кровотока Q , используем условие $Q|_{t=0} = 0$.

Также будем считать, что артерии, изображенные на Рис. 3, обладают характеристиками, указанными в таблице 1.

На Рис. 9, 10, 11 показано рассчитанное давление в серединах соответствующих сосудов. В левой части каждого из графиков, что соответствует малому временному параметру, поведение кривых отличается от остальной части, это объясняется тем, что начальные условия для задачи ($A_i|_{t=0} = A_{i0}$, $Q|_{t=0} = 0$) не соответствуют физиологическим показателям. Поэтому расчетной кривой требуется время, чтобы выйти на периодический режим [3, 5].

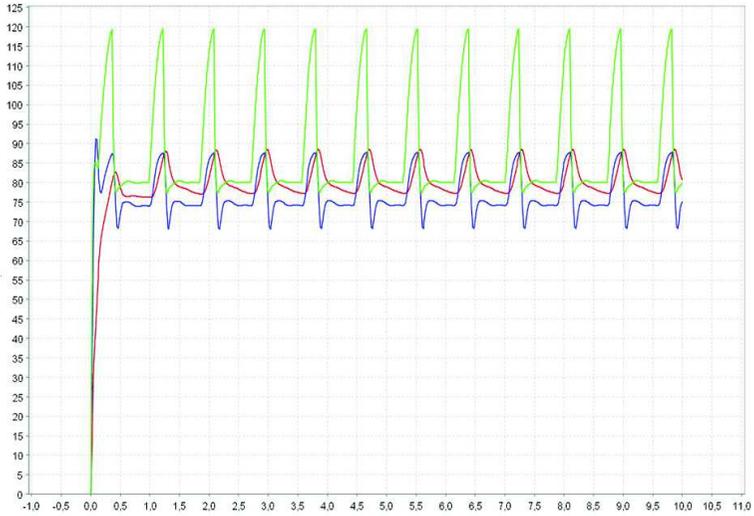


Рис. 9. Давление в середине 1-ой, 13-ой и 16-ой артерий (по вертикали – давление в мм. рт. ст., по горизонтали – время в сек).

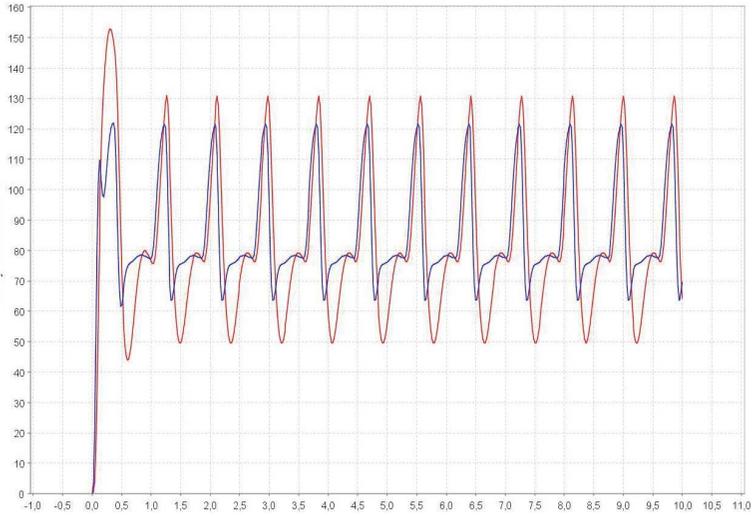


Рис. 10. Давление в середине 8-ой и 22-ой артерий (по вертикали – давление в мм. рт. ст., по горизонтали – время в сек).

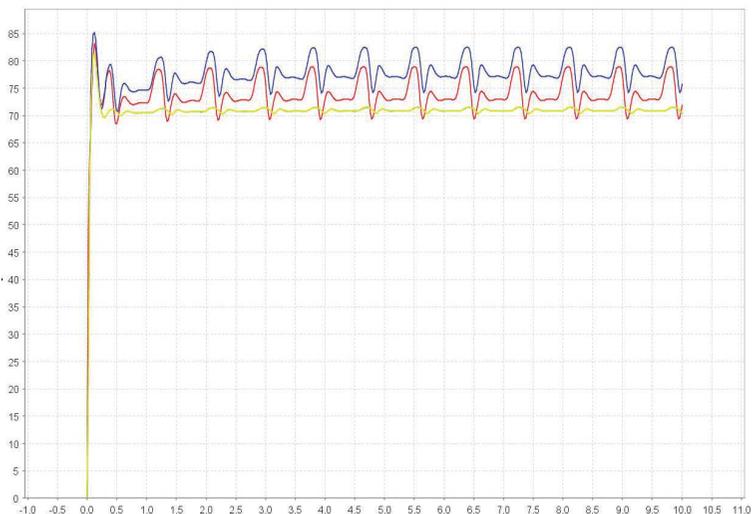


Рис. 11. Давление в середине артерий 33, 43, 49, 55 (по вертикали – давление в мм. рт. ст., по горизонтали – время в сек).

Заключение. Используемый математический и программный аппарат фактически позволяет отслеживать давление в любой артерии в любой его точке в любой момент времени и моделировать различные состояния системы.

Как уже отмечалось выше, метод ортогональной прогонки, допускает контроль за накоплением вычислительной погрешности [2]. В своей работе мы делаем на этом особый акцент. Связано это с тем, что увеличение объемов вычислений при современном уровне математического моделирования приводит к усилению роли вычислительной погрешности. Но многие алгоритмы не позволяют оценить ее вклад в решение, вследствие чего результат математического моделирования принимает характер *гипотезы*, которая в ряде случаев может достаточно сильно отличаться от точного решения исходной задачи.

В данном случае такой неопределенный характер численного решения неприемлем по двум основным причинам. Во-первых, пользователями данного алгоритма являются биологи, физиологи и другие специалисты, далекие от вычислительной математики. В силу своей специальности они не знают и не обязаны знать особенности внутреннего устройства вычислительных программ. Но при этом пользователи должны иметь воз-

возможность делать обоснованные выводы из результатов математического моделирования. Во-вторых, в данном случае моделируются процессы, связанные с жизнью и здоровьем человека. Следовательно, используемые алгоритмы должны вести себя предсказуемым и контролируемым образом.

Список литературы

- [1] *Бибердорф Э.А., Попова Н.И.* Гарантированная точность современных алгоритмов линейной алгебры. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2006.
- [2] *Бибердорф Э.А., Попова Н.И.* Контроль точности решения краевой задачи методом ортогональной прогонки. Новосибирск, 2008. (Препринт ИЯФ СО РАН; 2009-1).
- [3] *Бибердорф Э.А., Блохин А.М., Попова Н.И., Трахнин Ю.Л.* Система кровообращения и артериальная гипертония: биофизические и генетико-физиологические механизмы, математическое и компьютерное моделирование. Глава 4: Глобальное моделирование артериальной системы человека. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2008 (в печати).
- [4] *Годунов С.К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Издательство НУ, 1994.
- [5] *Леонова Т. И.* Построение, численное моделирование и анализ одномерной модели гемодинамики. Дипломная работа, механико-математический факультет НГУ, Новосибирск: 2008.
- [6] *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М: Мир, 1983.
- [7] *Lampsoni D. N.* One dimensional and multiscale models for blood flow circulation. Thesis, Lausanne, 2004.
- [8] *Quarteroni A., Formaggia L.* Mathematical modelling and numerical simulation of the cardiovascular system. In: *Ciarlet P.G. (ed.). Handbook of numerical analysis, v.12, special volume: Ayache N. (ed.). Computational Models for the Human Body.* Amsterdam, Elsevier Science & Technology, 2003, p.3-129.
- [9] *Formaggia L., Veneziani A.* Reduced and multiscale models for the human cardiovascular system. Von Karman, 2003. Lecture notes of the 7th VKI lecture series, "Biological Fluid Dynamics".

Э.А. Бибердорф, Н.И. Попова

**Численное решение задачи гемодинамики
методом прямых и методом ортогональной прогонки**

E.A. Biberdorf, N.I. Popova

**Numerical solution of the gemodynamic system
by the method of straight lines
and the orthogonal sweep method**

ИЯФ 2009-2

Ответственный за выпуск А.В. Васильев

Работа поступила 26.01.2009 г.

Сдано в набор 27.01.2009 г.

Подписано в печать 28.01.2009 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.3 печ.л., 1.8 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 2

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.