

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

Н. Митянина

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ
ПО АЗИМУТАЛЬНЫМ ГАРМОНИКАМ
ПРИ АНАЛИЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ
КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

ИЯФ 2004-34

Новосибирск
2004

Суммирование рядов по азимутальным гармоникам при анализе устойчивости когерентных колебаний

Н. Митянина

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

При анализе устойчивости продольных когерентных колебаний многосгустковых пучков в накопителях заряженных частиц, при взаимодействии с резонаторами ВЧ системы, для определения инкрементов и когерентных сдвигов колебаний пучка приходится вычислять суммы рядов по всем азимутальным гармоникам вида

$$S(N, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^N e^{im\theta} e^{-m^2\phi_0^2/2} Z(-i(m\omega_0 + n\Omega)),$$

где $Z(-i\omega)$ – импеданс резонатора, а ϕ_0 – угловая г.м.с. длина пучка (гауссовского). В том случае, если импеданс представляется суммой резонансных мод, описываемых формулой импеданса резонансного контура, ряд может быть просуммирован аналитически для каждой моды резонатора. В предшествующих работах подобные ряды вычислялись лишь в приближении коротких сгустков, при $\phi_0 = 0$, достаточном для поперечных колебаний, но не всегда достаточном при рассмотрении продольных колебаний, особенно высших мультипольных типов продольных колебаний пучка.

В данной работе предлагается способ точного суммирования ряда по гармоникам для каждой резонансной моды, с учетом конечной длины сгустка. Исходя из полученных формул, можно оценить точность методов, не учитывающих длину сгустка.

1. Вычисление суммы в общем случае (продольные колебания)

В общем случае, суммируются ряды вида

$$S(N, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^N e^{im\theta} e^{-m^2\phi_0^2/2} Z_m^+, \quad (1)$$

где $Z_m^+ = Z(-i(m\omega_0 + n\Omega))$, Ω – синхротронная частота, n – порядок мультипольности рассматриваемых продольных колебаний, θ – угловое расстояние между двумя из сгустков пучка (при отсутствии встречного пучка). Показатель степени $N \geq 1$ при рассмотрении разных типов мультипольных колебаний независимо друг от друга равен $2n-1$, а при учете их связи может быть как нечетным, так и четным.

Отметим, что такие ряды отличаются от рассмотренных, например, в [1], во-первых, множителем $e^{-m^2\phi_0^2/2}$, описывающим спектральную плотность гауссовского сгустка, и во-вторых, тем, что порядок числителя алгебраического сомножителя члена ряда больше порядка знаменателя.

Ниже будут получены формулы для суммирования ряда (1), если импеданс с характеристическим сопротивлением ρ , резонансной частотой $\omega_r = \omega_0 m_r$ и добротностью Q имеет вид

$$Z(s) = \frac{\rho s}{(s - s_1)(s - s_2)}, \quad s = \frac{-i\omega}{\omega_r}, \quad (2)$$

$$s_{1,2} = \pm i\nu_2 - \nu_1, \quad \nu_1 = \frac{1}{2Q}, \quad \nu_2 = \sqrt{1 - \nu_1^2}.$$

1.1. Выделение слагаемых удобных для суммирования

В том случае, если импеданс резонатора представляет собой сумму импедансов резонансных мод, которые могут быть описаны формулой (2), возможно преобразовать ряд по азимутальным гармоникам (1), разложив его на два слагаемых. Одно из этих слагаемых (содержащее все полюса и достаточно быстро убывающее при номерах гармоник $|m| \rightarrow \infty$) можно просуммировать аналитически, аналогично преобразованию Ватсона–Зоммерфельда (см. [2]). Второе же слагаемое (не содержащее полюсов), с помощью формулы Пуассона (см. [3]) преобразуется в экспоненциально

сходящийся ряд, от которого в большинстве случаев можно оставить лишь одно или два слагаемых.

При суммировании ряда (1) аргумент импеданса равен $s(m) = -i \frac{m}{m_r} - iv$,

$v = \frac{n\Omega}{\omega_r}$. Обозначим

$$m_{1,2} = (s_{1,2} + iv) im_r = (\mp v_2 - iv_1 - v) m_r, \quad \text{Im}(m_{1,2}) = -v_1 m_r < 0.$$

Импеданс содержит два резонансных слагаемых:

$$Z(s) = \frac{\rho}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_1}{s - s_1} - \frac{s_2}{s - s_2} \right),$$

Достаточно выполнить суммирование для первого слагаемого

$$Z^1(s(m)) = \frac{\rho s_1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{s(m) - s_1} \right) = \frac{\rho s_1 im_r}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{m - m_1} \right).$$

Для него сумма ряда (1) записывается как

$$\begin{aligned} S^1(N, \theta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^N e^{im\theta} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2} (Z^1)_m^+ \\ &= \frac{\rho s_1 im_r}{(s_1 - s_2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2} \left(\frac{m^N - m_1^N}{m - m_1} + \frac{m_1^N}{m - m_1} \right) \\ &= S_P^1(N, \theta) + S_W^1(N, \theta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_P^1(N, \theta) &= \frac{\rho s_1 im_r}{(s_1 - s_2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2} \left(\frac{m^N - m_1^N}{m - m_1} \right) \\ &= \frac{\rho s_1 im_r}{(s_1 - s_2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2} e^{im\theta} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} m^k m_1^{N-k-1} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$S_W^1(N, \theta) = \frac{\rho s_1 im_r}{(s_1 - s_2)} m_1^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2} \left(\frac{1}{m - m_1} \right). \quad (4)$$

Индексы P и W , как будет видно в дальнейшем, обозначают слагаемые, для суммирования которых будет применяться преобразование Ватсона-Зоммерфельда (W) или формула Пуассона (P).

Аналогично записываются суммы $S_P^2(N, \theta)$ и $S_W^2(N, \theta)$, содержащие второе слагаемое $Z^2(s) = \frac{\rho s_2}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{s - s_2} \right)$, при этом общая сумма (1)

записывается как

$$S(N, \theta) = (S_P^1(N, \theta) - S_P^2(N, \theta)) + (S_W^1(N, \theta) - S_W^2(N, \theta)). \quad (5)$$

1.2. Суммирование слагаемого, содержащего особенность

Часть ряда (4) может быть просуммирована по формуле Ватсона-Зоммерфельда (см. [2]), с некоторыми уточнениями.

Согласно [2], для вычисления ряда $\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)$, где

$$f(z) = e^{-z^2 \phi_0^2 / 2} e^{iz\theta} \frac{1}{z - m_1},$$

введем вспомогательные функции

$$\varphi^{\pm}(z) = f(z) \frac{e^{\pm i\pi z}}{\sin(\pi z)}$$

и контуры интегрирования C^{\pm} , состоящие из

действительной оси и полуокружностей S^{\pm} бесконечного радиуса в верхней и нижней полуплоскостях (с направлением обхода против часовой стрелки). Полюса на действительной оси обходятся по часовой стрелке, по полуокружностям бесконечно малого радиуса. Обозначив

- z_r^{\pm} – полюсы функций φ^{\pm} на действительной оси,
- z_c^+ – полюсы функции φ^+ в верхней полуплоскости,
- z_c^- – полюсы функции φ^- в нижней полуплоскости,
- $\rho_{r,c}^{\pm}$ – вычеты этих функций в соответствующих точках $z_{r,c}^{\pm}$,

можно записать интегралы по замкнутым контурам C^{\pm} как

$$I^{\pm} = \oint_{C^{\pm}} \varphi^{\pm}(z) dz = P \int_{\mp\infty}^{\pm\infty} \varphi^{\pm}(z) dz - \sum_r \pi i \rho_r^{\pm} + \int_{S^{\pm}} \varphi^{\pm}(z) dz = 2\pi i \sum_c \rho_c^{\pm}.$$

Полюсы функций φ^{\pm} – это полюсы функции $f(z)$ и действительные целые числа, поэтому

$$\begin{aligned} I^{\pm} &= P \int_{\mp\infty}^{\pm\infty} \varphi^{\pm}(z) dz - \pi i \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) / \pi - \pi i \sum_r R_r (\text{ctg}(z_r \pi) \pm i) + \int_{S^{\pm}} \varphi^{\pm}(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_c R_c^{\pm} (\text{ctg}(z_c^{\pm} \pi) \pm i), \end{aligned}$$

где теперь z_c^{\pm}, z_r обозначают полюсы функции $f(z)$ в верхней и нижней полуплоскостях и на действительной оси, с вычетами в этих точках R_c^{\pm}, R_r .

Сложив I^+ и I^- , получаем:

$$I^+ + I^- = 2i \cdot P \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz - 2i \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) - 2\pi i \sum_r R_r \operatorname{ctg}(z_r \pi) + \int_{S^+} \varphi^+(z) dz + \int_{S^-} \varphi^-(z) dz = 2\pi i \left(\sum_c R_c^+ (\operatorname{ctg}(z_c^+ \pi) + i) + \sum_c R_c^- (\operatorname{ctg}(z_c^- \pi) - i) \right),$$

или

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = P \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz - \pi \sum_r R_r \operatorname{ctg}(z_r \pi) + \frac{1}{2i} \left(\int_{S^+} \varphi^+(z) dz + \int_{S^-} \varphi^-(z) dz \right) - \pi \left(\sum_c R_c^+ (\operatorname{ctg}(z_c^+ \pi) + i) + \sum_c R_c^- (\operatorname{ctg}(z_c^- \pi) - i) \right). \quad (6)$$

Это выражение отличается от приведенного в [2] дополнительным слагаемым $\frac{1}{2i} \left(\int_{S^+} \varphi^+(z) dz + \int_{S^-} \varphi^-(z) dz \right)$, которое в данном случае, в отличие от [2], не равно нулю, однако имеет предел на бесконечности, который и следует далее вычислить.

$$\int_{S^\pm} \varphi^\pm(z) dz = \int_{S^\pm} f(z) \frac{e^{\pm i\pi z}}{\sin \pi z} dz \Big|_{R \rightarrow \infty} = \int_{S^\pm} e^{-z^2 \Phi_0^2 / 2} e^{iz(\theta \pm 2\pi)} \frac{dz}{z - m_1}. \quad (7)$$

Определим θ в интервале $0 \leq \theta < 2\pi$. При этом интеграл (7) имеет конечный предел при $R \rightarrow \infty$ при нулевой длине сгустка. Обозначим $t = \theta \pm 2\pi$ ($t \neq 0$), $\alpha = \Phi_0^2 / 2$, $z_0 = m_1$, $Z_{1,2}$ – крайние точки пути интегрирования по z , $Z_{1,2} = \pm R$, тогда

$$\int_{S^\pm} \varphi^\pm(z) dz = \int_{S^\pm} dz \frac{1}{z - z_0} e^{-z^2 \alpha + izt} = e^{-t^2 / 4\alpha} \int_{Z_1}^{Z_2} dz \frac{e^{-(z-it/2\alpha)^2 \alpha}}{z - z_0} = e^{-t^2 / 4\alpha} \int_{Z_1 - it/2\alpha}^{Z_2 - it/2\alpha} dz' \frac{e^{-z'^2 \alpha}}{z' + it/2\alpha - z_0} = e^{-t^2 / 4\alpha} \int_{Z_1'}^{Z_2'} dz' \frac{e^{-z'^2 \alpha}}{z'} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{z'} \right)^k \right\}, \quad (8)$$

где введены обозначения $\Delta = z_0 - it / 2\alpha = m_1 - i(\theta \pm 2\pi) / \phi_0^2$, $Z'_{1,2} = \pm R - it / 2\alpha$.

Используя свойства интегральной показательной функции и интегрального синуса (см. [4], (5.1.1), (5.1.7), (5.2.21), (5.2.25)):

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad |\arg(z)| < \pi;$$

$$E_1(-x \pm i0) = Ei(x) \mp i\pi;$$

$$Si(z) = \frac{1}{2i} [E_1(iz) - E_1(-iz)] + \frac{\pi}{2}, \quad |\arg(z)| < \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (Si(x)) = \frac{\pi}{2}, \quad (9)$$

нетрудно показать, что при $\phi_0 = 0$

$$\int_{S^{\pm}} \varphi^{\pm}(z) dz \Big|_{\phi_0=0} = \int_{S^{\pm}} dz \frac{1}{z - z_0} e^{izt} = \pm i\pi \delta_{0,t}. \quad (10)$$

Вычислим интеграл (8) при $\phi_0 \neq 0$.

Радиус окружности R стремится к бесконечности, при этом можно для любого t выбрать его много больше $|z_0|$ и $|t/2\alpha|$. Путь интегрирования в плоскости переменной z' – это дуга радиуса $R \rightarrow \infty$, пересекающая положительную или отрицательную часть мнимой полуоси, соединяющая точки $Z'_{1,2} = \pm R - it/2\alpha$. Всегда можно выбрать такой радиус, чтобы $|\arg(Z'_{1,2}) - \pi/2| > \pi/4$ (для S^+) или $|\arg(Z'_{1,2}) + \pi/2| > \pi/4$ (для S^-).

Вычислим эти слагаемые по отдельности.

1. Слагаемое с $k = 0$.

При замыкании контура интегрирования по полуокружности S^+

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{Z'_1}^{Z'_2} dz' \frac{e^{-z'^2 \alpha}}{z'} = \frac{1}{2} \int_{Z'_1}^{Z'_2} dz' \frac{e^{-z'^2 \alpha}}{z'^2} = \frac{1}{2} \int_{Z_1'^2 \alpha}^{Z_2'^2 \alpha} dy \frac{e^{-y}}{y} \\ &= \frac{1}{2} \int_{Z_1'^2 \alpha}^{-R_1 + i0} dy \frac{e^{-y}}{y} + \frac{1}{2} \int_{-R_1 - i0}^{Z_2'^2 \alpha} dy \frac{e^{-y}}{y}, \end{aligned}$$

где $R_1 = |Z'_{1,2}|^2 \alpha$, а путь интегрирования по dy пересекает отрицательную действительную полуось. Как видно, этот интеграл выражается через

интегральную показательную функцию, которая при пересечении отрицательной действительной полуоси имеет скачок (см. [4], (5.1.7)):

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{2} \int_{Z_1'^2 \alpha}^{-R_1 + i0} dy \frac{e^{-y}}{y} + \frac{1}{2} \int_{-R_1 - i0}^{Z_2'^2 \alpha} dy \frac{e^{-y}}{y} \\
 &= \frac{1}{2} \left(E_1(Z_1'^2 \alpha) - E_1(-R_1 + i0) + E_1(-R_1 - i0) - E_1(Z_2'^2 \alpha) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (E_1(-R_1 - i0) - E_1(-R_1 + i0)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (E_1((R - it / 2\alpha)^2 \alpha) - E_1((R + it / 2\alpha)^2 \alpha)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} i\pi,
 \end{aligned}$$

при этом использованы свойства и определения интегральной показательной функции и интегрального синуса (9).

При замыкании контура интегрирования по полуокружности S^- знак I_0 меняется, в этом случае

$$I_0 = \frac{1}{2} (E_1(-R_1 + i^0) - E_1(-R_1 - i^0)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -i\pi.$$

2. **Слагаемое с $k = 1$.**

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \Delta \int_{Z_1'}^{Z_2'} dz' \frac{e^{-z'^2 \alpha}}{z'^2} = -\Delta \left\{ \frac{1}{z} e^{-z^2 \alpha} \Big|_{Z_1'}^{Z_2'} - \int_{Z_1'}^{Z_2'} e^{-z'^2 \alpha} (-2\alpha z') \frac{dz'}{z'} \right\} \\
 &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\Delta \{0 - 2\sqrt{\pi\alpha}\} = 2\Delta\sqrt{\pi\alpha}.
 \end{aligned}$$

3. **Слагаемые с $k \geq 2$.**

$$\begin{aligned}
 I_k &= \Delta^k \int_{Z_1'}^{Z_2'} dz' \frac{e^{-z'^2 \alpha}}{z'^{k+1}} = -\frac{\Delta^k}{k} \left\{ \frac{1}{z^k} e^{-z^2 \alpha} \Big|_{Z_1'}^{Z_2'} - \int_{Z_1'}^{Z_2'} e^{-z'^2 \alpha} (-2\alpha z') \frac{dz'}{z'^k} \right\} \\
 &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\frac{\Delta^2}{k} \{0 + 2\alpha I_{k-2}\} = -\frac{2\Delta^2 \alpha}{k} I_{k-2},
 \end{aligned}$$

то есть

$$I_k = \frac{(i\Delta\sqrt{2\alpha})^k}{k!!} \begin{cases} I_0, & k - \text{чет.} \\ I_1 \frac{I_1}{i\Delta\sqrt{2\alpha}}, & k - \text{неч.} \end{cases}.$$

Таким образом, интеграл (8) при $R \rightarrow \infty$ записывается (с учетом (7.1.6) из [4]) в виде суммы

$$\begin{aligned}
\int_{S^\pm} dz \frac{1}{z-z_0} e^{-z^2\alpha+izt} &= e^{-t^2/4\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k+1} \right\} \\
&= e^{-t^2/4\alpha} \left\{ I_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\Delta\sqrt{2\alpha})^{2k}}{(2k)!!} + \frac{I_1}{i\Delta\sqrt{2\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\Delta\sqrt{2\alpha})^{2k+1}}{(2k+1)!!} \right\} \\
&= e^{-t^2/4\alpha} \left\{ I_0 e^{(i\Delta\sqrt{\alpha})^2} + \frac{I_1}{i\Delta\sqrt{2\alpha}} \sqrt{\pi/2} e^{(i\Delta\sqrt{\alpha})^2} \cdot \operatorname{erf}(i\Delta\sqrt{\alpha}) \right\} \\
&= \pm i\pi e^{-z_0^2\alpha+iz_0t} \operatorname{erfc}(\pm i\Delta\sqrt{\alpha}), \tag{11}
\end{aligned}$$

где знак определяется выбором S^+ или S^- , а $\Delta = z_0 - it/2\alpha$.

Нетрудно заметить, что при $\alpha \rightarrow 0$ (11) превращается в (10), как и должно быть. Кроме того, при $\alpha \ll 1$ имеем асимптотику (см., например, [4], (7.1.23)):

$$\begin{aligned}
\int_{S^\pm} dz \frac{1}{z-z_0} e^{-z^2\alpha+izt} \Big|_{\alpha \ll 1, |\Delta\sqrt{\alpha}| \gg 1} &= \pm i\pi e^{-t^2/4\alpha} e^{-(\Delta\sqrt{\alpha})^2} \left\{ \operatorname{erfc}(\pm i\Delta\sqrt{\alpha}) \right\} \tag{12} \\
&\approx \pm i\pi e^{-t^2/4\alpha} e^{-(\Delta\sqrt{\alpha})^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}(\pm i\Delta\sqrt{\alpha})} e^{(\Delta\sqrt{\alpha})^2} = e^{-t^2/4\alpha} \frac{\sqrt{\pi}}{\Delta\sqrt{\alpha}} \approx e^{-t^2/4\alpha} \frac{2\sqrt{\alpha}\pi}{it}.
\end{aligned}$$

Вернувшись к исходным обозначениям, (8) можно записать как

$$\begin{aligned}
\int_{S^\pm} \varphi^\pm(z) dz &= \int_{S^\pm} dz \frac{1}{z-m_1} e^{-z^2\phi_0^2/2+iz(\theta\pm 2\pi)} \tag{13} \\
&= \pm i\pi e^{(-m_1^2\phi_0^2/2+i(\theta\pm 2\pi)m_1)} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\pm \frac{(im_1\phi_0 + (\theta\pm 2\pi)/\phi_0)}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
&\approx -i \frac{\phi_0\sqrt{2\pi}}{\theta\pm 2\pi} e^{-(\theta\pm 2\pi)^2/2\phi_0^2}.
\end{aligned}$$

В формулу Ватсона-Зоммерфельда входит также интеграл (в смысле главного значения) вдоль действительной оси $P \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$,

$f(z) = e^{-z^2\phi_0^2/2} e^{iz\theta} \frac{1}{z-m_1}$. Он также может быть выражен через вычеты

функции $f(z)$. Вспомним, что $f(z)$ имеет полюсы только в нижней полуплоскости. Поэтому при $0 \leq \theta < 2\pi$, с использованием (12), имеем

$$\begin{aligned}
P \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \oint_{C^+} f(z) dz - \int_{S^+} f(z) dz = - \int_{S^+} f(z) dz \\
&= - \int_{S^+} e^{-z^2 \phi_0^2 / 2} e^{iz\theta} \frac{dz}{z - m_1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -i\pi e^{(-m_1^2 \phi_0^2 / 2 + i\theta m_1)} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{(im_1 \phi_0 + \theta / \phi_0)}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
&\approx \begin{cases} -i\pi e^{(-m_1^2 \phi_0^2 / 2)} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{im_1 \phi_0}{\sqrt{2}} \right) \right\}, & \theta = 0, \\ i \frac{\phi_0 \sqrt{2\pi}}{\theta} e^{-\theta^2 / 2\phi_0^2}, & \theta \gg \phi_0. \end{cases} \quad (14)
\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (6), (13), (14)

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2} e^{im\theta} \frac{1}{m - m_1} &= P \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz - \pi \sum_r R_r \operatorname{ctg}(z_r \pi) \quad (15) \\
&+ \frac{1}{2i} \left(\int_{S^+} \varphi^+(z) dz + \int_{S^-} \varphi^-(z) dz \right) - \pi \left(\sum_c R_c^+ (\operatorname{ctg}(z_c^+ \pi) + i) + \sum_c R_c^- (\operatorname{ctg}(z_c^- \pi) - i) \right) \\
&= \pi e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} e^{im_1 \theta} \left\{ -(\operatorname{ctg}(m_1 \pi) - i) - i \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta + im_1 \phi_0^2}{\phi_0 \sqrt{2}} \right) \right\} \\
&+ \frac{1}{2} e^{2i\pi m_1} \operatorname{erfc} \left(\frac{im_1 \phi_0 + (\theta + 2\pi) / \phi_0}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} e^{-2i\pi m_1} \operatorname{erfc} \left(\frac{-im_1 \phi_0 + (2\pi - \theta) / \phi_0}{\sqrt{2}} \right) \Bigg\},
\end{aligned}$$

где $0 \leq \theta < 2\pi$, $z_1^- = m_1$, а R_1^- – вычет в этой точке функции $f(z) = e^{-z^2 \phi_0^2 / 2} e^{iz\theta} \frac{1}{z - m_1}$, равный $R_1^- = e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} e^{im_1 \theta}$. При $\phi_0 \ll 1$, $\theta \neq 0$

это выражение упрощается:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2} e^{im\theta} \frac{1}{m - m_1} \Bigg|_{\substack{\phi_0 \ll 1, \\ \theta \neq 0}} &\approx -\pi e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} e^{im_1 \theta} (\operatorname{ctg}(m_1 \pi) - i) \\
&+ \pi e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} e^{im_1 \theta} \frac{\phi_0}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{-2i}{\theta} e^{-\theta^2 / 2\phi_0^2} + \frac{1}{(\theta + 2\pi)} e^{2i\pi m_1} e^{-(\theta + 2\pi)^2 / 2\phi_0^2} \right. \\
&\left. - \frac{1}{(2\pi - \theta)} e^{-2i\pi m_1} e^{-(2\pi - \theta)^2 / 2\phi_0^2} \right\}.
\end{aligned}$$

В том случае, когда ϕ_0 много меньше минимального расстояния между сгустками (то есть размера сепаратрисы), можно оставить лишь первое слагаемое:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2} e^{im\theta} \frac{1}{m-m_1} \Big|_{\substack{\phi_0 \ll |\theta|_{\min} \\ \theta \neq 0}} \approx -\pi e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} e^{im_1 \theta} (\operatorname{ctg}(m_1 \pi) - i). \quad (16)$$

Это тот же результат, что и при $\phi_0 = 0$, но теперь ясны ограничения: поправки надо учитывать при $\phi_0 \propto |\theta|_{\min}$. Так, например, при $\frac{\phi_0}{|\theta|_{\min}} = 0.5$

поправка имеет порядок $\frac{\phi_0}{|\theta|_{\min}} e^{-\theta_{\min}^2 / 2 \phi_0^2} = 0.5 e^{-2} \approx 0.07$, а при

$$\frac{\phi_0}{|\theta|_{\min}} = 0.25 \quad \frac{\phi_0}{|\theta|_{\min}} e^{-\theta_{\min}^2 / 2 \phi_0^2} = 0.25 e^{-8} \approx 0.00009.$$

Так как обычно ϕ_0 много меньше размера сепаратрисы, которому кратны все ненулевые θ , поэтому при $\theta \neq 0$ практически всегда этой поправкой можно пренебрегать.

При $\theta = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2} e^{im\theta} \frac{1}{m-m_1} \Big|_{\substack{\phi_0 \ll 1 \\ \theta = 0}} &\approx \\ &\approx -\pi e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} (\operatorname{ctg}(m_1 \pi) - i) - \pi i \cdot e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} \operatorname{erfc} \left(\frac{im_1 \phi_0}{\sqrt{2}} \right) \\ &= -\pi e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} \operatorname{ctg}(m_1 \pi) - \sqrt{2} \pi m_1 \phi_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_1^2 \phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

то есть для любого θ , объединяя (16) и (17), получаем

$$\begin{aligned} S_W^1(N, \theta) &= \frac{\rho s_1 i m_r}{(s_1 - s_2)} m_1^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2} e^{im\theta} \frac{1}{m-m_1} \Big|_{\phi_0 \ll 1} \\ &= -\pi \frac{\rho s_1 i m_r}{(s_1 - s_2)} m_1^N e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} \left\{ (\operatorname{ctg}(m_1 \pi) - i) e^{im_1 \theta} + i \cdot \delta_{\theta, 0} \operatorname{erfc} \left(\frac{im_1 \phi_0}{\sqrt{2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= -\pi \frac{\rho s_1 m_r}{(s_1 - s_2)} m_1^N e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} \left\{ (\text{ctg}(m_1 \pi) - i) e^{im_1 \theta} + \delta_{\theta, 0} \left(i + \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_1 \phi_0 e^{m_1^2 \phi_0^2 / 2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_1^2 \phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right) \right) \right\}.$$

Из (17) следует, что при $\theta = 0$ поправка зависит не от соотношения размера сгустка и размера сепаратрисы (то есть **длины волны фундаментальной моды**), а от соотношения размера сгустка и **минимальной длины волны** рассматриваемого спектра. То есть для длин волн, сравнимых с размером пучка, эту поправку необходимо учитывать.

При суммировании ряда $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_1^2 \phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right)$ следует брать n_{\max} слагаемых,

где $\frac{(m_1 \phi_0)^2}{2n_{\max}} \ll 1$. В таблице 1 для разных $x = (m_r \phi_0)^2$ приведены значения

n_{\max} , при которых точность вычисления суммы по n не хуже 0.001:

Таблица 1

$x = (m_r \phi_0)^2$	n_{\max}
≥ 25	$\text{ceil}(x)$
≥ 18	$\text{ceil}(x) + 1$
≥ 12	$\text{ceil}(x) + 2$
Для всех x	$\text{ceil}(x) + 3$

Отметим, что в пределе $\phi_0 \rightarrow 0$ полученные выражения совпадают с полученным в [1] не только при $0 < \theta < 2\pi$ (то есть при $\theta \neq 0$) (см. [1], формула (5)), но и при $\theta = 0$ (см. [1], формула (1)), с учетом того, что

$$\sum_m a_m \sin(m\theta) \Big|_{\theta=0} = 0. \text{ Совпадение (18) с уже известными формулами в}$$

соответствующих частных случаях подтверждает справедливость полученной выше более общей формулы (15)).

Итак, резонансное слагаемое ряда (1) при $\phi_0 \ll 1$ имеет вид

$$\begin{aligned}
(S_W^1(N, \theta) - S_W^2(N, \theta)) &= \frac{\rho m_r}{2\nu_2} \left\{ s_1 m_1^N \pi e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} e^{im_1 \theta} \right. \\
&\times \left(-(\operatorname{ctg}(m_1 \pi) - i(1 - \delta_{\theta,0})) - \delta_{\theta,0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_1 \phi_0 e^{m_1^2 \phi_0^2 / 2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_1^2 \phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right) \right) \\
&\quad - s_2 m_2^N \pi e^{-m_2^2 \phi_0^2 / 2} e^{im_2 \theta} \\
&\times \left(-(\operatorname{ctg}(m_2 \pi) - i(1 - \delta_{\theta,0})) - \delta_{\theta,0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_2 \phi_0 e^{m_2^2 \phi_0^2 / 2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_2^2 \phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right) \right) \left. \right\}, \\
m_{1,2} &= (\mp \nu_2 - i\nu_1 - \nu) m_r, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \tag{19}
\end{aligned}$$

1.3. Суммирование слагаемого, не содержащего особенности

Часть ряда (1), не содержащая полюсов, может быть представлена (см. (5), (3)) как

$$S_P^1(N, \theta) - S_P^2(N, \theta) = \frac{\rho}{2i\nu_2} \sum_{k=0}^{N-1} ((m_1 + \nu m_r) m_1^{N-k-1} - (m_2 + \nu m_r) m_2^{N-k-1}) C_k,$$

где

$$C_k = C_k(\theta, \phi_0) = \sum_m m^k e^{im\theta} e^{-m^2 \phi_0^2 / 2}.$$

Для вычисления $C_k(\theta, \phi_0)$ можно применить, например, формулу Пуассона (см., например, [3], формула (11.1)):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i n x} dx, \tag{20}$$

достаточные условия применимости которой выполняются для $C_k(\theta, \phi_0)$ (во-первых, $f'(x)$ существует при $-\infty < x < \infty$ и, во-вторых, ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+n)$$

сходится равномерно при $0 \leq x \leq 1$).

Согласно (2.3.15.9) из [5], для $\operatorname{Re}(p) > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-px^2 - qx} dx = n! \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(-\frac{q}{2p} \right)^n \exp\left(\frac{q^2}{4p} \right) \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(p/q^2)^k}{k!(n-2k)!}.$$

В нашем случае для $f(m) = m^k e^{im\theta} e^{-m^2\phi_0^2/2}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i n x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2\phi_0^2/2} e^{ix(\theta+2\pi n)} dx \\ &= k! \frac{\sqrt{2\pi}}{\phi_0^{k+1}} \exp\left(-\frac{(\theta+2\pi n)^2}{2\phi_0^2}\right) \sum_{l=0}^{[k/2]} \frac{\left(-i \frac{(\theta+2\pi n)}{\phi_0}\right)^{k-2l}}{(2l)!!(k-2l)!}. \end{aligned}$$

Так как $\phi_0 \ll 2\pi$, в (20) можно ограничиться при $\theta=0$ слагаемым с $n=0$, а при $\theta>0$ – слагаемыми с $n=0, -1$:

$$\begin{aligned} C_k(0, \phi_0) &= \sum_m m^k e^{-m^2\phi_0^2/2} \approx \frac{2\sqrt{\pi}}{(\phi_0\sqrt{2})^{k+1}} \frac{k!}{(k/2)!} \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ } k - \text{чет.} \\ 0, \text{ } k - \text{неч.} \end{array} \right\}, \\ C_k(\theta, \phi_0)|_{\theta>0} &\approx k! \frac{\sqrt{2\pi}}{\phi_0^{k+1}} \left\{ \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\phi_0^2}\right) \sum_{l=0}^{[k/2]} \frac{\left(-i \frac{\theta}{\phi_0}\right)^{k-2l}}{(2l)!!(k-2l)!} \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-\frac{(\theta-2\pi)^2}{2\phi_0^2}\right) \sum_{l=0}^{[k/2]} \frac{\left(-i \frac{(\theta-2\pi)}{\phi_0}\right)^{k-2l}}{(2l)!!(k-2l)!} \right\}, \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (21) \end{aligned}$$

1.4. Общее выражение для суммы ряда

Таким образом сумма ряда (1) вычисляется как

$$\begin{aligned} S(N, \theta) &= (S_P^1(N, \theta) - S_P^2(N, \theta)) + (S_W^1(N, \theta) - S_W^2(N, \theta)), \\ (S_W^1(N, \theta) - S_W^2(N, \theta)) &= \frac{\rho i m_r}{2i v_2} \left\{ s_1 m_1^N \pi e^{-m_1^2\phi_0^2/2} e^{im_1\theta} \left(-(\text{ctg}(m_1\pi) - i(1 - \delta_{\theta,0})) \right) \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\theta,0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_1 \phi_0 e^{m_1^2\phi_0^2/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_1^2\phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right) \right\} \\ &\quad - s_2 m_2^N \pi e^{-m_2^2\phi_0^2/2} e^{im_2\theta} \left(-(\text{ctg}(m_2\pi) - i(1 - \delta_{\theta,0})) \right) \end{aligned}$$

$$- \delta_{\theta,0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_2 \phi_0 e^{m_2^2 \phi_0^2 / 2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_2^2 \phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right) \Bigg\},$$

$$S_P^1(N, \theta) - S_P^2(N, \theta) = \frac{\rho}{2i\nu_2} \sum_{k=0}^{N-1} ((m_1 + \nu m_r) m_1^{N-k-1} - (m_2 + \nu m_r) m_2^{N-k-1}) C_k,$$

где C_k определены в (21).

2. Поперечные колебания

При анализе поперечных колебаний суммируются ряды вида

$$S_t(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} Z_{tm}^-,$$

где $Z_{tm}^- = Z_{tx}(-i\omega_0(m - \nu'_x))$,

$$Z_{tx}(s) = \frac{-i\rho_t}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{-i\rho_t}{(s_1-s_2)} \left(\frac{1}{(s-s_1)} - \frac{1}{(s-s_2)} \right), \quad s = \frac{-i\omega}{\omega_r},$$

ν'_x – дробная часть числа бетатронных колебаний за оборот.

В этом случае, во-первых, поперечный размер сгустка сразу можно считать нулевым, и во-вторых, суммируемая функция достаточно быстро убывает при $|m| \rightarrow \infty$ так что сразу могут быть применены формулы суммирования, аналогичные приведенным в [1]. Такой же результат получается автоматически при использовании изложенного выше метода, с учетом того, что благодаря убыванию суммируемой функции при $|m| \rightarrow \infty$ как $1/m^2$, метод Ватсона-Зоммерфельда полностью применим к этому ряду.

. В результате, обозначив $\nu = -\nu'_x / m_r$,

$$m_{1,2} = (s_{1,2} + i\nu) i m_r = (\mp \nu_2 - i\nu_1 - \nu) m_r = (\mp \nu_2 - i\nu_1) m_r + \nu'_x,$$

используя полученные выше результаты, можно сразу записать

$$\begin{aligned} S_t(\theta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} Z_m^- = \frac{\rho_t m_r}{(s_1 - s_2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \left(\frac{1}{m - m_1} - \frac{1}{m - m_2} \right) \\ &= \frac{\pi \rho_t m_r}{2i\nu_2} \left\{ e^{im_1\theta} (\text{ctg}(m_1\pi) - i) + e^{im_2\theta} (\text{ctg}(m_2\pi) - i) \right\}. \end{aligned}$$

4. Симметричные моды колебаний

При рассмотрении симметричных пучков используют базис нормальных симметричных мод колебаний, в котором матрица, описывающая колебания пучка, превращается в диагональную или (при наличии встречного пучка) в трехдиагональную, элементы которой описываются рядами

$$\tilde{S}_{i,k} = \delta_{ik} N_b \sum_p (pN_b + k)^N e^{i\theta(pN_b+k)} e^{-(pN_b+k)^2 \phi_0^2 / 2} Z(-i((pN_b + k)\omega_0 + n\Omega)),$$

здесь $\theta = \pm 2\theta_p$ (θ_p – угловое расстояние от резонатора до места встречи пучков) при описании воздействия встречного пучка и $\theta = 0$ при описании воздействия пучка самого на себя; $\theta < 0$ заменяется на $\theta + 2\pi$.

Просуммировать этот ряд можно методом, аналогичным изложенному выше.

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{k,k}^1 &= \frac{\rho s_1 i m_r}{(s_1 - s_2)} N_b \sum_p e^{-(pN_b+k)^2 \phi_0^2 / 2} \left(\frac{(pN_b + k)^N}{(pN_b + k) - m_1} \right) \\ &= \frac{\rho s_1 i m_r}{(s_1 - s_2)} N_b \sum_p e^{-(pN_b+k)^2 \phi_0^2 / 2} \left(\frac{(pN_b + k)^N - m_1^N}{(pN_b + k) - m_1} + \frac{m_1^N}{(pN_b + k) - m_1} \right) \\ &= \tilde{S}_P^1(N, k) + \tilde{S}_W^1(N, k), \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_W^1(N, k) = \frac{\rho s_1 i m_r}{(s_1 - s_2)} m_1^N \sum_p e^{-(pN_b+k)^2 \phi_0^2 / 2} e^{i\theta(pN_b+k)} \left(\frac{1}{p + (k - m_1) / N_b} \right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_P^1(N, k) &= \frac{\rho s_1 i m_r}{(s_1 - s_2)} N_b \sum_p e^{-(pN_b+k)^2 \phi_0^2 / 2} e^{i\theta(pN_b+k)} \left(\frac{(pN_b + k)^N - m_1^N}{(pN_b + k) - m_1} \right) \\ &= \frac{\rho s_1 i m_r}{(s_1 - s_2)} N_b \sum_p e^{-(pN_b+k)^2 \phi_0^2 / 2} e^{i\theta(pN_b+k)} \sum_{k'=0}^{N-1} (pN_b + k)^{k'} m_1^{N-k'-1} \\ &= \frac{\rho s_1 i m_r}{(s_1 - s_2)} N_b \sum_{k'=0}^{N-1} m_1^{N-k'-1} \tilde{C}_{k'}(k), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{C}_{k'}(k) = \sum_p e^{-(pN_b+k)^2 \phi_0^2 / 2} e^{i\theta(pN_b+k)} (pN_b + k)^{k'}.$$

Сумму $\tilde{C}_{k'}(k)$ можно вычислить с помощью преобразования Пуассона (20):

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{k'}(k) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(pN_b+k)^2 \phi_0^2 / 2} (pN_b+k)^{k'} e^{2\pi i n p} e^{i\theta(pN_b+k)} dp \\
 &= \frac{1}{N_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n k / N_b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 \phi_0^2 / 2} x^{k'} e^{ix \left(\frac{2\pi n}{N_b} + \theta \right)} dx \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{N_b} \frac{k!}{\phi_0^{k'+1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n k / N_b} \exp \left(-\frac{(2\pi n / N_b + \theta)^2}{2\phi_0^2} \right) \\
 &\quad \times \sum_{l=0}^{[k'/2]} \frac{1}{(2l)!!(k'-2l)!} \left(-i \frac{(2\pi n / N_b + \theta)}{\phi_0} \right)^{k'-2l}.
 \end{aligned}$$

Пусть $0 \leq f_1 \leq \theta / (2\pi / N_b) < f_1 + 1 \leq N_b$. Тогда основной вклад в сумму дают слагаемые с $n = -f_1$ и $n = -f_1 - 1$. При $\theta = 2\pi f_1 / N_b$

$$\tilde{C}_{k'}(k) \Big|_{\theta=2\pi f_1 / N_b} = \frac{\sqrt{2\pi}}{N_b} e^{2\pi i f_1 k / N_b} \frac{k!}{\phi_0^{k'+1} k'!!} \begin{cases} 1, & k' - \text{чет.} \\ 0, & k' - \text{нечет.} \end{cases}$$

При $\theta = 2\pi f_1 / N_b + \Delta\theta$, $\Delta\theta \gg \phi_0$

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{k'}(k) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{N_b} \frac{k!}{\phi_0^{k'+1}} e^{i2\pi f_1 k / N_b} \left\{ \exp \left(-\frac{(\Delta\theta)^2}{2\phi_0^2} \right) \sum_{l=0}^{[k'/2]} \frac{1}{(2l)!!(k'-2l)!} \left(-i \frac{(\Delta\theta)}{\phi_0} \right)^{k'-2l} \right. \\
 &\quad \left. + e^{i2\pi k / N_b} \exp \left(-\frac{(\Delta\theta - 2\pi / N_b)^2}{2\phi_0^2} \right) \sum_{l=0}^{[k'/2]} \frac{1}{(2l)!!(k'-2l)!} \left(-i \frac{(\Delta\theta - 2\pi / N_b)}{\phi_0} \right)^{k'-2l} \right\}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что при $N_b = 1$, $k = 0$, $f_1 = 0$ это выражение превращается в полученное выше для одного сгустка.

Аналогично можно вычислить и слагаемое, содержащее особенность, \tilde{S}_W для симметричных мод колебаний.

Есть и другой способ – перейти к нормальным симметричным модам уже после выполнения суммирования по азимутальным гармоникам. Полученная в результате матрица будет состоять из двух слагаемых \tilde{S}_W и \tilde{S}_P . Для вычисления второго слагаемого \tilde{S}_W этот способ удобнее.

При переходе к базису нормальных симметричных мод с матрицей перехода \hat{V} ($V_{kl} = e^{i\frac{2\pi}{N_b}(k-1)(l-1)}$) матрица \hat{S}_W^1 с элементами $(\hat{S}_W^1)_{ps} = S_W^1(\theta_{ps})$ (см. (18)) превращается в диагональную:

$$(\tilde{S}_W^1)_{ps} = (\hat{V}S_W^1\hat{V}^{-1})_{ps} = \frac{1}{N_b} \sum_{l=1}^{N_b} \left[\sum_{j=k-l-1-l}^{N_b-l} e^{i\frac{2\pi}{N_b}(p-1)j} S_W^1\left(\frac{-2\pi j}{N_b}\right) \right] e^{-\frac{i2\pi}{N_b}((l-1)(s-p))}.$$

Отметим, что отрицательный аргумент $\theta = \frac{2\pi(l-k)}{N_b} = -\frac{2\pi j}{N_b}$ должен быть превращен в положительный $\theta + 2\pi = \frac{2\pi(-j + N_b)}{N_b}$.

Сумма по j от $(1-l)$ до (N_b-1-l) не зависит от l (так как при разных l суммируются в разном порядке одни и те же слагаемые), поэтому можно вынести эту сумму из-под знака суммирования по l :

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_W^1)_{ps} &= \frac{1}{N_b} \left[\sum_{f=0}^{N_b-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f} S_W^1\left(\frac{2\pi f}{N_b}\right) \right] \sum_{l=0}^{N_b-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(l(s-p))} \\ &= \delta_{ps} \left[\sum_{f=0}^{N_b-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f} S_W^1\left(\frac{2\pi f}{N_b}\right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь суммируются (с фазовыми множителями) значения $S_W^1(\theta)$ для значений $\theta = \frac{2\pi f}{N_b}$, $f = 0, \dots, N_b - 1$. Отметим, что в случае встречных пучков $\theta_{kl} = \pm 2\theta_p + \frac{2\pi(l-k)}{N_b} = \pm 2\theta_p - \frac{2\pi j}{N_b}$, где θ_p – угловое положение резонатора относительно выбранного (одного из возможных) места встречи сгустков. При этом

$$(\tilde{S}_W^1(\pm 2\theta_p))_{ps} = \delta_{ps} \left[\sum_{f=0}^{N_b-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f} S_W^1\left(\pm 2\theta_p + \frac{2\pi f}{N_b}\right) \right],$$

причем аргумент функции $S_W^1\left(\pm 2\theta_p + \frac{2\pi f}{N_b}\right)$ в каждом слагаемом, равный

$\left(\pm 2\theta_p + \frac{2\pi f}{N_b}\right)$, должен быть увеличен или уменьшен на 2π , так, чтобы он оказался в пределах $[0, 2\pi)$. Пусть $0 \leq f_1 \leq 2\theta_p / (2\pi / N_b) < f_1 + 1 \leq N_b$, тогда

$$\begin{aligned}
 (\tilde{S}_W^1(+2\theta_p))_{pp} &= \sum_{f=0}^{N_b-1-f_1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f} S_W^1\left(2\theta_p + \frac{2\pi f}{N_b}\right) \\
 &\quad + \sum_{f=N_b-f_1}^{N_b-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f} S_W^1\left(2\theta_p + \frac{2\pi(f-N_b)}{N_b}\right) \\
 &= \sum_{f=-f_1}^{N_b-1-f_1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f} S_W^1\left(2\theta_p + \frac{2\pi f}{N_b}\right) = \sum_{f'=f+f_1=0}^{N_b-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)(f'-f_1)} S_W^1\left(2\theta_p - \frac{2\pi f_1}{N_b} + \frac{2\pi f'}{N_b}\right) \\
 &= e^{\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f_1} \sum_{f'=0}^{N_b-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f'} S_W^1\left(\Delta\theta + \frac{2\pi f'}{N_b}\right),
 \end{aligned}$$

где $0 \leq \Delta\theta = 2\theta_p - \frac{2\pi f_1}{N_b} < \frac{2\pi}{N_b}$.

Для $0 \leq f_1 \leq -2\theta_p / (2\pi / N_b) < f_1 + 1 \leq N_b$ вывод аналогичен.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 (\tilde{S}_W^1)_{ps} &= \delta_{ps} e^{\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f_1} \sum_{f'=0}^{N_b-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f'} \tilde{S}_W^1\left(\Delta\theta + \frac{2\pi f'}{N_b}\right) \\
 &= \delta_{ps} \frac{\rho s_1 i m_r}{2i\nu_2} m_1^N \pi e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} e^{\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f_1} \left\{ \frac{e^{-\frac{i\pi}{N_b} m_1}}{\sin(m_1 \pi)} \sum_{f'=0}^{N_b-1} \left[e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f'} e^{i m_1 \left(\Delta\theta + \frac{2\pi f'}{N_b}\right)} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[i + \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_1 \phi_0 e^{m_1^2 \phi_0^2 / 2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_1^2 \phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right) \right] \sum_{f'=0}^{N_b-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f'} \delta_{\Delta\theta + \frac{2\pi f'}{N_b}, 0} \right\} \\
 &= \delta_{ps} \frac{\rho}{2i\nu_2} (m_1 + \nu m_r) m_1^N \pi e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} e^{\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f_1}
 \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{e^{-\frac{i\pi}{N_b} m_1} e^{im_1(\Delta\theta)}}{\sin(m_1\pi)} \sum_{f'=0}^{N_b-1} \left[e^{i\frac{2\pi f'}{N_b}(m_1-(p-1))} \right] \right. \\ \left. - e^{-i\Delta\theta(p-1)} \left[i + \sqrt{2\pi} m_1 \phi_0 e^{m_1^2 \phi_0^2 / 2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_1^2 \phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right) \right] \sum_{f'=0}^{N_b-1} \delta_{\Delta\theta + \frac{2\pi f'}{N_b}, 0} \right\}.$$

Так как $\Delta\theta \geq 0$ и $f' \geq 0$, то $\sum_{f'=0}^{N_b-1} \delta_{\Delta\theta + \frac{2\pi f'}{N_b}, 0} = \delta_{\Delta\theta, 0}$, то есть

$$(\tilde{S}_W)_{ps} = \delta_{ps} \frac{\rho \pi m_r}{2\nu_2} e^{\frac{i2\pi}{N_b}(p-1)f_1} \\ \left[\times s_1 m_1^N e^{-m_1^2 \phi_0^2 / 2} \left\{ \frac{e^{im_1(\Delta\theta+\pi)} e^{-i\frac{\pi}{N_b}(2m_1-(p-1))}}{\sin\left(\frac{\pi}{N_b}(m_1-(p-1))\right)} - \delta_{\Delta\theta, 0} \left[i + \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_1 \phi_0 e^{m_1^2 \phi_0^2 / 2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_1^2 \phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right) \right] \right\} \right. \\ \left. - s_2 m_2^N e^{-m_2^2 \phi_0^2 / 2} \times \left\{ \frac{e^{im_2(\Delta\theta+\pi)} e^{-i\frac{\pi}{N_b}(2m_2-(p-1))}}{\sin\left(\frac{\pi}{N_b}(m_2-(p-1))\right)} - \delta_{\Delta\theta, 0} \left[i + \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_2 \phi_0 e^{m_2^2 \phi_0^2 / 2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m_2^2 \phi_0^2)^n}{(2n+1)!!} \right) \right] \right\} \right].$$

$$p = 1, \dots, N_b.$$

Необходимое число слагаемых суммы по n было приведено в таблице 1 (при вычислении суммы для одного сгустка).

Отметим, что при $N_b = 1$, $k = 0$, $f_1 = 0$ это выражение превращается в полученное выше выражение (19) для одного сгустка.

Оценка вклада в сумму нерезонансных слагаемых

Итак, выражение для суммы ряда (1) содержит три слагаемых разного рода:

- 1) слагаемое, полученное с помощью преобразования Пуассона, являющееся суммой ряда, содержащего целую часть выражения $m^N Z_m^+$, то есть не имеющего особенности;
- 2) слагаемые, полученные при вычислении вычетов при суммировании части выражения $m^N Z_m^+$, содержащей особенность, но стремящейся к

нулю при $m \rightarrow \infty$; эти слагаемые, содержащие множители $(\text{ctg}(m_{1,2}\pi) - i(1 - \delta_{\theta,0}))$, имеют резонансный характер и преобладают, когда $m_{1,2}$ приближается к целочисленным значениям;

- 3) слагаемое, возникающие при суммировании части выражения $m^N Z_m^+$, содержащей особенность, но стремящейся к нулю при $m \rightarrow \infty$, и представляющие собой конечный интеграл по полуокружностям бесконечного радиуса.

В работах, посвященных суммированию аналогичных рядов, обычно ограничиваются вторым из этих слагаемых. Но если в [1] приведены формулы для $\phi_0 = 0$ и для N не больше единицы, то в [6] рассматриваются ряды аналогичные (1) (но для $\theta = 0$).

На приведенных ниже рисунках 1 и 2 показаны зависимости (действительная и мнимая части) второго слагаемого (S1) и суммы первого и третьего (S2), нормированные на $\rho Q m_r$, от $m_r = \omega_r / \omega_0$, то есть от резонансной частоты, для двух значений добротности, $Q = 30000$ и $Q = 3000$, для $N = 1$ (рис.1) и для $N = 2$ (рис.2). Остальные параметры, взятые для расчетов, следующие: $\phi_0 = 0.001$, $\Omega / \omega_0 = 0.01$, $\theta = 0$, $N_b = 1$.

Эти рисунки показывают, что в тех случаях, когда m_r заметно отличаются от целых чисел, а также при низких добротностях второе слагаемое перестает быть преобладающим, и вкладом первого и третьего слагаемых не нужно пренебрегать. Заметим, что при нечетном $N = 1$ (при рассмотрении разных типов мультипольных синхротронных колебаний независимо друг от друга, в приближении коротких густков) S2 дает в основном вклад в мнимую часть общей суммы, а при четном $N = 2$ – в действительную (четные значения N возникают при описании внутрисгустковых колебаний с учетом взаимодействия густков с ВЧ модами, длины волн которых сравнимы или меньше длины густков).

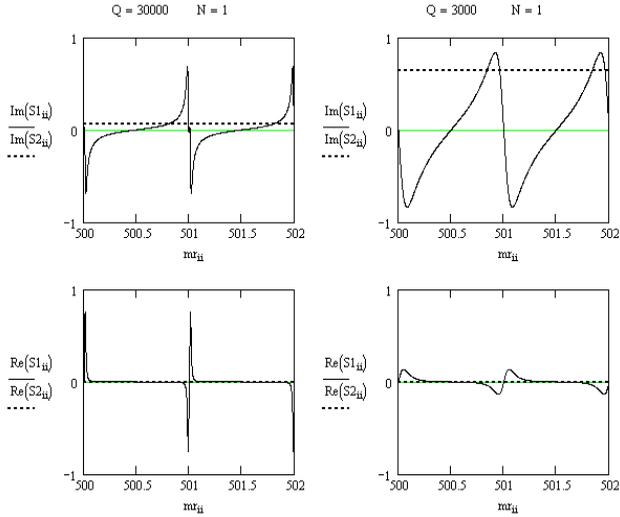


Рис.1. Зависимости (действительная и мнимая части) второго слагаемого (S1) и суммы первого и третьего слагаемых (S2), нормированные на $\rho Q m_r$, от $m_r = \omega_r / \omega_0$, то есть от резонансной частоты, для значений добротности $Q = 30000$ и $Q = 3000$, для нечетного $N = 1$.

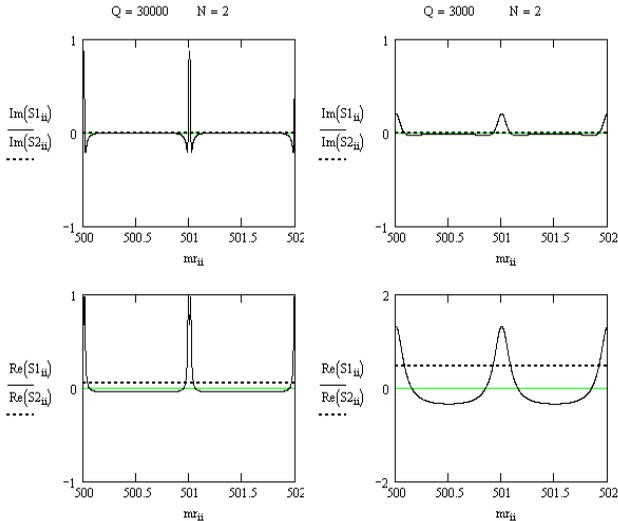


Рис. 2. Зависимости (действительная и мнимая части) второго слагаемого (S1) и суммы первого и третьего слагаемых (S2), нормированные на $\rho Q m_r$, от $m_r = \omega_r / \omega_0$, то есть от резонансной частоты, для значений добротности $Q = 30000$ и $Q = 3000$, для четного $N = 2$.

Литература

- [1] *B. Zotter*. On the summation of infinite algebraic and Fourier series. CERN/ISR-TH/78-9, CERN, Geneva, April 1978 ([42]).
- [2] *M. Month, R.F. Peierls*. Coupling impedance structure above the tube cutoff frequency, NIM 137 (1976), p. 299 (Appendix A) ([15])
- [3] *Федорюк М.В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987 ([43]).
- [4] *М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.)*. Справочник по специальным функциям. Москва, «Наука», 1979 ([14]).
- [5] *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев*. Интегралы и ряды. Элементарные функции. Москва, «Наука», 1981 ([21]).
- [6] *K. Balewski, R.D. Kohaupt*. Analytic Evaluation of the Effective Impedance for Coupled Bunch Instabilities. DESY 90-152, DESY, Hamburg, 1990.

Н. Митянина

**Суммирование рядов по азимутальным гармоникам
при анализе устойчивости когерентных колебаний**

N. Mityanina

**Summation on the serieses over azimuthal harmonics
at the analysis of the coherent oscillations stability**

ИЯФ 2004-34

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 17.05.2004

Сдано в набор 19.05.2004

Подписано в печать 21.05.2004

Формат 60x90 1/16 Объем 1.5 печ.л., 1.2 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 34

Обработано на IBM PC и отпечатано

на ротапринтере ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

Новосибирск, 630090, пр. Академика Лаврентьева, 11