

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера СО РАН

А.А. Иванов

К РАСЧЕТУ ИНДУКТИВНОСТИ
И ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ КАТУШЕК
ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

ИЯФ-2002-52

НОВОСИБИРСК
2002

**К расчету индуктивности и взаимной индуктивности катушек
прямоугольного сечения**

А.А. Иванов

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера, СО РАН
630090, Новосибирск

**To calculation of coil inductance and mutual coil inductance
with rectangular cross section**

A.A. Ivanov

Budker Institute of Nuclear Physics, SB RAS
630090, Novosibirsk

Расчету индуктивности катушек различной формы посвящено большое количество статей и монографий (см., например, [1]). Особенность этой задачи состоит в том, что даже в простейшем случае катушек с прямоугольной формой сечения имеются только некоторые приближенные способы ее решения. К сожалению, описанные в литературе алгоритмы сложно или даже невозможно использовать, когда возникает необходимость определения индуктивности и взаимоиנדукции с высокой, наперед заданной точностью. Примером такого рода может служить задача вычисления собственных частот системы, составленной из близко расположенных катушек [2]. Вместе с тем, прямое вычисление индуктивности с помощью ЭВМ затруднено отсутствием универсального алгоритма, основанного на точных аналитических формулах простого вида.

В принципе, величина индуктивности определяется путем вычисления энергии магнитного поля катушки. Однако исходный интеграл является 6-мерным, что сильно затрудняет вычисления. Существенное упрощение можно получить, если свести этот интеграл к одномерному, программы вычислений которого широко доступны и их применение не требуют специальных навыков.

Приведем краткий вывод формул для индуктивности (и взаимоиנדукции) круглых катушек прямоугольного сечения в виде одномерного интеграла. Начнем с вычисления индуктивности катушки с однородной плотностью тока, имеющей N витков (Рис.1). Длина катушки – b , внешний и внутренний радиусы обозначим соответственно a_2 и a_1 .

Введем, как принято в литературе, следующие безразмерные параметры: $\alpha = a_2/a_1$ и $\beta = b/a_1$. Вычисляя энергию магнитного поля во всем пространстве по известным формулам [3], получим (предполагаем, что по обмотке протекает ток J):

$$\varepsilon_m = \frac{1}{8\pi} \cdot \int H^2 dV = \frac{1}{2c} \cdot \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV = \frac{LJ^2}{2c^2} \quad (1)$$

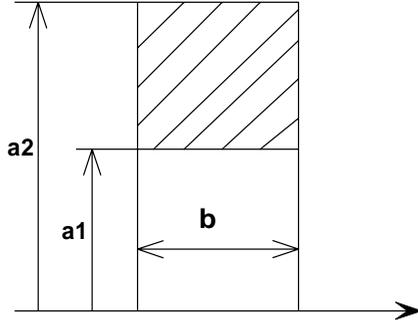


Рис. 1. Катушка прямоугольного сечения (обозначения в тексте).

Подставляя в (1) выражение для векторного потенциала системы токов, получим исходную формулу для вычислений:

$$L = \frac{1}{j^2} \cdot \iint \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r}')dVdV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad [3] \text{ (см. Приложение 1)}. \quad (2)$$

К аналогичному выражению приводит и использование часто используемого соотношения $\frac{LJ}{c} = \Phi$, где Φ – потокосцепление катушки (см. Приложение 2).

Переходя в (2) к цилиндрическим координатам, легко свести это выражение после однократного интегрирования по углу к следующему:

$$L = \frac{2\pi N^2}{(a_2 - a_1)^2 b^2} \cdot \int r dr \cdot \int r' dr' \cdot \iint dz \cdot dz' \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(z - z')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi}} \quad (3)$$

Пользуясь известными формулами из теории функций Бесселя (см., например, [4])

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad \text{и}$$

$$J_0(\sqrt{z^2 + Z^2 - 2zZ \cos \varphi}) = J_0(z) \cdot J_0(Z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z) J_n(Z) \cos n\varphi,$$

легко свести интеграл (3) к виду:

$$L = \frac{4\pi^2 N^2}{(a_2 - a_1)^2 b^2} \cdot \int_0^\infty d\lambda \iint dz \cdot dz' e^{-\lambda|z-z'|} \cdot \left(\int_{a_1}^{a_2} r dr J_1(\lambda r) \right)^2. \quad (4)$$

Интеграл по радиусу вычисляется (см. например [4,5]), что дает

$$\int r dr J_1(\lambda r) = \frac{\pi r}{2\lambda} \cdot (J_1(\lambda r)H_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)H_1(\lambda r)), \quad (5)$$

где $H_{0,1}$ – функции Струве [5] (см. Приложение 3). Интеграл по длине вычисляется элементарно, что дает

$$\iint dz dz' e^{-\lambda|z-z'|} = 2 \int_0^b az' \cdot \int_0^{z'} dz e^{\lambda(z-z')} = \frac{2}{\lambda} \cdot \left(b - \frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda} \right). \quad (5')$$

После подстановки этих выражений в (4), оно приобретает окончательный вид:

$$L = \frac{2\pi^4 a_1 N^2}{(\alpha - 1)^2 \beta^2} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{x^3} \left\{ \beta - \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \right\} \times \left\{ \alpha (J_1(\alpha x)H_0(\alpha x) - H_1(\alpha x)J_0(\alpha x)) - (J_1(x)H_0(x) - H_1(x)J_0(x)) \right\}^2$$

Вводя функцию $F(s) = J_1(s)H_0(s) - H_1(s)J_0(s)$, окончательное выражение для индуктивности в виде однократного интеграла можно записать как:

$$L = \frac{2\pi^4 a_1 N^2}{(\alpha - 1)^2 \beta^2} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{x^3} \left\{ \beta - \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \right\} \cdot \left\{ \alpha \cdot F(\alpha x) - F(x) \right\}^2. \quad (6)$$

Вывод выражения для взаимной индуктивности катушек прямоугольного сечения с совпадающими осями производится аналогично. Окончательное выражение для катушек, расположенных вдоль оси с зазором, имеет вид (использованы обозначения, аналогичные введенным ранее, Δ – зазор между обмотками, величины без верхнего индекса относятся к одной катушке, верхний индекс * – маркирует размеры другой катушки)

$$L_{12} = \frac{\pi^4 N_1 N_2}{(a_2 - a_1)(a_2^* - a_1^*) b b^*} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^4} (1 - e^{-\lambda b})(1 - e^{-\lambda b^*}) \times e^{-\lambda \Delta} (a_2 F(\lambda a_2) - a_1 F(\lambda a_1))(a_2^* F(\lambda a_2^*) - a_1^* F(\lambda a_1^*)) \quad (6')$$

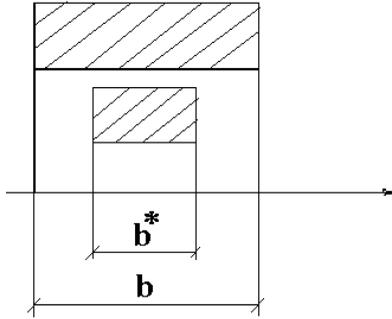


Рис. 2. Катушки с совпадающими центрами.

Другой, практически часто встречающийся случай взаимного расположения катушек – это вложенные друг в друга катушки с совпадающими центрами и осями (см. Рис.2).

В этом случае (в тех же обозначениях), взаимоиндукция может быть выражена в виде интеграла (предполагается, что $b^* \leq b$):

$$L_{12} = \frac{2\pi^4 N_1 N_2}{(a_2 - a_1)(a_2^* - a_1^*) b b^*} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^3} \left(b^* - \frac{e^{-\frac{\lambda(b-b^*)}{2}} - e^{-\frac{\lambda(b+b^*)}{2}}}{\lambda} \right) (a_2 F(\lambda a_2) - a_1 F(\lambda a_1)) \times (a_2^* F(\lambda a_2^*) - a_1^* F(\lambda a_1^*)) \quad (6'')$$

Некоторые применения полученных формул

Формально, численные расчеты с использованием полученных формул не вызывают особых проблем. Подынтегральная функция в (6) при $x \rightarrow 0$ не имеет особенности, а именно, она стремится к нулю как $\sim x^2$. Если размеры сечения катушки не слишком малы, то на верхнем пределе интеграл быстро сходится, т.к. подынтегральная функция стремится к нулю как $\sim 1/x^4$. С уменьшением размеров сечения сходимость, как и следовало ожидать, ухудшается (подынтегральная функция ведет себя $\sim \frac{1}{x}$) и интеграл $\sim \ln(1/\beta)$.

Небезынтересно применить формулы (6), (6') и (6'') к случаям, в которых удастся получить приближенные аналитические выражения для индуктивности (взаимоиндукции).

Простейший пример такого рода – вычисление индуктивности L_∞ тонкого ($\alpha \rightarrow 1$, или $a_1=a_2=a$) и длинного ($\beta \rightarrow \infty$) соленоида. Хорошо известный результат (см., например, [3]), получается, если считать, что поле внутри соленоида однородно и равно $\frac{4\pi NJ}{cb}$, т.е. не учитывать ослабление

поля на торцах и поле вне соленоида. В этом случае простейшие вычисления дают: $L_\infty = \frac{4\pi^2 N^2}{\beta} \cdot a$. Применение формулы (6) позволяет получить

поправки к индуктивности, связанные с указанными эффектами. Для разложения части подынтегральной функции, зависящей от α , проще воспользоваться прямо выражением (5), что дает (пренебрегаем также членом с $e^{-\beta x}$, который дает малые поправки):

$$L \approx 2 \cdot \frac{(2\pi)^2 N^2 a}{\beta^2} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cdot J_1^2(x) \left(\beta - \frac{1}{x}\right).$$

Приведенный интеграл вычисляется точно, что дает хорошо известный результат (см., например, [3] стр.182)

$$L \approx \frac{4\pi^2 N^2 a}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{8}{3\pi\beta}\right) = L_\infty \cdot \left(1 - \frac{8}{3\pi\beta}\right). \quad (7)$$

Второй член в скобках представляет собой искомую поправку, связанную с конечностью длины соленоида. Учет члена с $e^{-\beta x}$ в (6) дает окончательный результат в виде ряда (см. [4], стр.58)

$$L = L_\infty \cdot \left(1 - \frac{8}{3\pi\beta} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2m!}{m!m+1!}\right)^2 \cdot \frac{2m+1}{m+2} \cdot \left(\frac{-1}{4\beta^2}\right)^m\right).$$

(7')

Интересно заметить, что без этих поправок можно найти индуктивность соленоида произвольной толщины, т.е. при произвольном α . Этот результат легко получается прямым вычислением энергии магнитного поля на единицу длины бесконечного соленоида (внутри обмотки поле равно $\frac{4\pi NJ}{cb} \cdot \left(1 - \frac{r-a_1}{a_2-a_1}\right)$), а в полости – такое же, как поле бесконечно тонкого

соленоида). Внутренняя индуктивность, связанная с полем внутри обмотки, получается равной $L_\infty \cdot \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 3}{6}$, а полная индуктивность соответственно равна

$$L = L_{\infty} \cdot \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 3}{6}. \quad (8)$$

Тот же результат получается и с использованием выражения (4), если переставить порядок интегрирования по λ и радиусу, а в (5') выражение в скобках заменить на β . Интеграл по λ при этом оказывается равен

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda r) J_1(\lambda r') d\lambda}{\lambda}.$$

Используя подстановку $\frac{2J_1(\lambda)}{\lambda} = J_0(\lambda) + J_2(\lambda)$, можно свести этот интеграл к сумме интегралов от произведения функций Бесселя, что дает:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda r) J_1(\lambda r') d\lambda}{\lambda} = \begin{cases} \frac{r}{2r'} & r > r' \\ \frac{r'}{2r} & r < r' \end{cases}$$

Вычисление двукратного интеграла по радиусам в точности приводит к выражению (8).

Достаточно простым оказывается также вычисление взаимной индуктивности двух полубесконечных тонких соленоидов одинакового радиуса, расположенных вдоль оси без зазора. Используя ту же процедуру, что при выводе (7), можно получить

$$L_{12} = \frac{4\pi^2 a^2 N^2}{b^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cdot J_1^2(\lambda a) = L_{\infty} \cdot \frac{4}{3\pi\beta}.$$

Заключение

В работе получены выражения для индуктивности и взаимоиндукции катушек прямоугольного сечения в виде однократных интегралов, пригодные для численных расчетов. Получены аналитические формулы для ряда практически интересных частных случаев.

Приложение 1

Выражение (2) дает полную индуктивность системы проводников с током произвольной конфигурации. Принято разделять эту индуктивность на две части: внутреннюю, которая определяется энергией магнитного поля внутри проводника, и внешнюю, определяемую энергией магнитного поля в пространстве вне проводников. Применяя использованное при выводе (1) векторное тождество $div[\vec{A} \times \vec{H}] = \vec{H} \cdot rot \vec{A} - \vec{A} \cdot rot \vec{H}$, легко получить выражения для внутренней и внешней индуктивности системы токов в виде (ср. [6], стр.30):

$$L_{int} = \frac{1}{J^2} \cdot \iint \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r}')dVdV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{c^2}{4\pi J^2} \oiint_S [\vec{A} \times \vec{H}] \cdot d\vec{S},$$

$$L_{ext} = -\frac{c^2}{4\pi J^2} \oiint_S [\vec{A} \times \vec{H}] \cdot d\vec{S}.$$

В этих выражениях поверхностный интеграл берется по поверхности проводника, так что единичный вектор нормали к поверхности направлен вне него.

Приложение 2

Альтернативное выражение для полной индуктивности катушки цилиндрической симметрии может быть получено из закона сохранения энергии электромагнитного поля катушки при медленном, квазистатическом изменении тока в ней. Энергией возникающего электрического поля можно при этом пренебречь и закон сохранения энергии приобретает вид:

$$\frac{\partial H^2}{\partial t} \frac{1}{8\pi} + div \frac{c}{4\pi} \cdot [E \times H] = -\vec{j} \cdot \vec{E} = -\vec{j} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).$$

Интегрируя по всему пространству и пользуясь отсутствием потока вектора Пойтинга через поверхность бесконечно большого радиуса, получим

$$\frac{\partial \varepsilon_H}{\partial t} = \frac{LJJ}{c^2} = \frac{1}{c} \int \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV',$$

где интеграл в правой части берется по объему катушки. Очевидным образом полученное выражение сводится к (2). Используя цилиндрическую симметрию, его можно далее преобразовать, вводя поток магнитного поля

$$\Phi(r, z) = \int_0^r 2\pi r' dr' H_z(r', z) = 2\pi r A_\varphi(r, z).$$

Тогда, используя очевидную пропорциональность потока тока в катушке, получим:

$$\frac{LJJ}{c} = \int j \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\Phi}{2\pi r'} dV' = \int j \cdot \frac{J}{J} \frac{\Phi}{2\pi r'} \cdot 2\pi r' dr' dz'.$$

Далее это выражение сводится очевидным образом к $\frac{LJ}{c} = \langle \Phi \rangle = \frac{1}{J} \cdot \int_S j \Phi dS$, где интеграл берется по поперечному сечению катушки. Для катушки малого сечения и с постоянной плотностью тока получим часто встречающееся выражение $\frac{LJ}{c} = \Phi$, где Φ – поток магнитного поля через площадь сечения катушки.

Приложение 3

В большинстве программ, используемых для математических расчетов, имеется встроенные процедуры для вычисления функций Бесселя. Для вычисления значений функций Струве необходимо использовать ряд [5]:

$$H_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}x\right)^{2k}}{\Gamma(k + \frac{3}{2})\Gamma(k + \nu + \frac{3}{2})}.$$

При больших значениях аргумента удобно использовать асимптотические выражения [5]

$$H_0(x) = N_0(x) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{x^5} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{x^7} + \dots \right]$$

$$H_1(x) = N_1(x) + \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1^2 \cdot 3}{x^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{x^6} - \dots \right],$$

где $N_{1,2}$ – функции Неймана. Ошибка в приведенных выражениях не превышает величины первого отброшенного члена и имеет тот же знак. При больших значениях аргумента приведенные формулы позволяют свести выражение $J_1(x)H_0(x) - J_0(x)H_1(x)$

$$\text{к } \frac{2}{\pi x} + \frac{2J_1(x)}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \dots \right] - \frac{2J_0(x)}{\pi} \cdot \left[1 + \frac{1}{x^2} - \dots \right]$$

(здесь использовано выражение для вронскиана функций Бесселя).

Пример программы для MathCad, вычисляющей индуктивность с использованием формулы (6).

Program to calculate a single coil inductance with rectangular cross section

$$HQ(x) := Y0(x) + \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{9}{x^5} - 9 \cdot \frac{25}{x^7} + 9 \cdot 25 \cdot \frac{49}{x^9}\right)$$

$$HQQ(x) := Y1(x) + \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} + 9 \cdot \frac{5}{x^6} - 9 \cdot 25 \cdot \frac{7}{x^8}\right)$$

$$H0(x) := \text{if} \left[x \geq 10, HQ(x), \frac{x}{2} \cdot \sum_{k=0}^{50} (-1)^k \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(\Gamma(k+1.5))^2} \right]$$

$$H1(x) := \text{if} \left[x \geq 10, HQQ(x), \frac{x^2}{4} \cdot \sum_{k=0}^{50} (-1)^k \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(\Gamma(k+1.5)) \cdot \Gamma(k+2.5)} \right]$$

$$F(x) := J1(x) \cdot H0(x) - J0(x) \cdot H1(x) \quad \text{Int}(a, b) := \int_0^{200} \left[b - \frac{(1 - e^{-bx})}{x} \right] \frac{(a \cdot F(a \cdot x) - F(x))^2}{x^3} dx$$

Parameters of coil

inner radius (cm) A1 := 4 **number of turns** N := 500

outer radius (cm) A2 := 6

length (cm) B := 20

$$Q := \frac{A2}{A1} \quad W := \frac{B}{A1}$$

$$L(Q, W, A1) := 2 \cdot \pi^4 \cdot A1 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{N^2 \cdot \text{Int}(Q, W)}{(Q-1)^2 \cdot W^2}$$

Coil inductance in microH is equal to

$$L(Q, W, A1) = \blacksquare$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *П.Л.Калантаров, Л.А.Цейтлин.* Расчет индуктивностей, Л.: Энергоатомиздат, 1986.
2. *М.А.Тиунов.* Расчет квазистационарных магнитных полей в аксиально-симметричном случае методом эквивалентных контуров, Препринт ИЯФ 82-59, 1982.
3. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Электродинамика сплошных сред, М.: Наука, 1982.
4. *Г.Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции, М.: Наука, 1974.
5. *М.Abramowitz, and I.A.Stegun.* (Eds.), Handbook of Math. Functions with Formulas, Graphs and Math. Tables, 9th printing, New York: Dover, p.496-498, 1972; Справочник по спец. функциям с формулами, графиками и мат. таблицами, под ред. М.Абрамовица и И.Стиган, М.: Наука, стр.313-321, 1979.
6. *Г.Бухгольц.* Расчет электрических и магнитных полей, М.: Издательство иностранной литературы, 1961.