

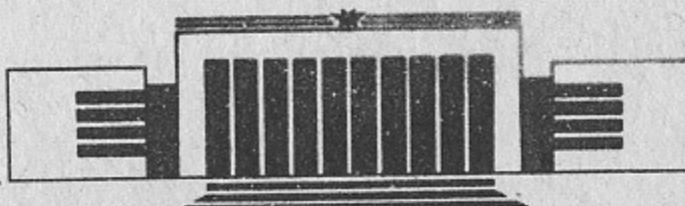


институт ядерной физики со ан ссср

Ю.А. Цидулко

РЕЗИСТИВНАЯ БАЛЛОННАЯ МОДА
В ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ

ПРЕПРИНТ 92-10



НОВОСИБИРСК

Резистивная баллонная мода
в газодинамической ловушке

Ю. А. Цидулко

Институт Ядерной Физики им. Г.И. Будкера
630090, Новосибирск, 90

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрена МГД неустойчивость (резистивная баллонная мода), развивающаяся в газодинамической ловушке из-за конечности проводимости плазмы. Рассмотрение проводится с учетом эффектов КЛР. Выделены две разновидности резистивной баллонной моды - "быстрая" и "медленная". Первая возникает только в случае, когда проводимость плазмы в пробочной области становится меньше некоторого порогового значения. "Медленная" резистивная мода имеет положительный инкремент при сколь угодно высокой проводимости. Проведено качественное сравнение с экспериментальными данными.

1. ВВЕДЕНИЕ

Газодинамическая ловушка (ГДЛ) представляет собой аксиально-симметричный пробкотрон с большим пробочным отношением $R \gg 1$ (рис. 1) и длиной L больше длины свободного пробега λ [1, 2]. МГД устойчивость в экспериментальной модели ГДЛ [2] обеспечивает расширители с запасом устойчивости $K \sim 10$. Эксперименты [3, 4] при низкой температуре плазмы $T \sim 1 \div 10$ эв показывают, что время жизни плазмы τ при пробочных отношениях $R \geq 50$ падает с ростом R , вопреки классической оценке для продольного времени жизни τ_{\parallel} в ГДЛ [1]

$$\tau_{\parallel} \sim \frac{R L}{c_s}, \quad (1)$$

где c_s - скорость звука.

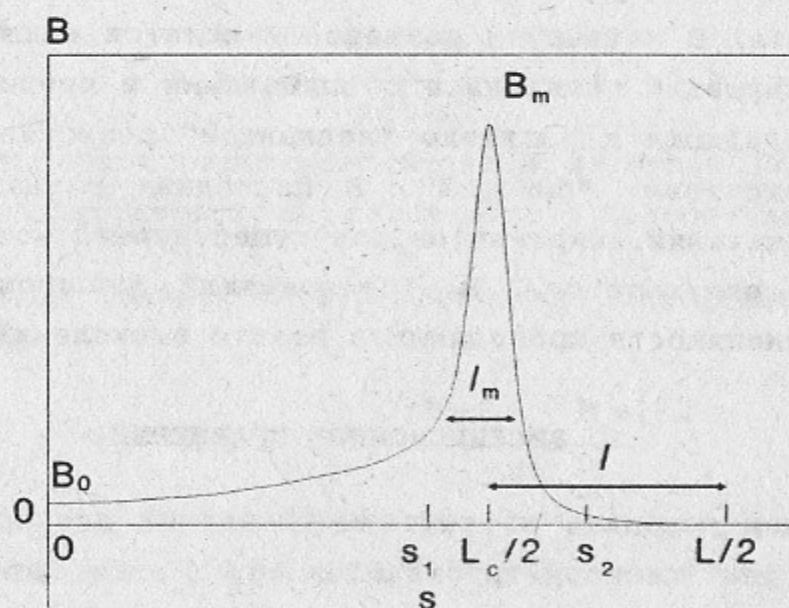


Рис. 1
Зависимость магнитного поля от координаты вдоль ловушки.

Одна из возможных причин малого времени жизни плазмы при больших R - возбуждение рассматриваемой в данной работе МГД-неустойчивости, резистивной баллонной моды, связанной с конечной проводимостью плазмы в области пробок. Конечная проводимость приводит к тому, что смещение плазмы в центральном пробкотроне и расширитель не связаны жестко, как в чисто желобковой моде. В предельном случае, когда сопротивление участка магнитной трубы между центральным пробкотроном и расширителем стремится к бесконечности, "желобок" в центре вообще "не знает" о наличии расширителя, и развитие резистивной моды происходит аналогично желобковой неустойчивости в пробкотроне, ограниченном изолирующими торцами.

Поскольку, заранее очевидно, что с уменьшением поперечного сечения "желобка" растет его омическое сопротивление, наибольший интерес представляют высокие азимутальные моды, когда рост инкремента ограничивается эффектами КЛР. Поэтому мы будем рассматривать возмущения с $m \gg 1$ в эйкональном приближении с учетом КЛР.

Во втором разделе работы в рамках некоторых предположений, упрощающих вычисления, мы получим дисперсионное соотношение для резистивной баллонной моды. В третьем разделе, пренебрегая кубическим членом в дисперсионном соотношении, проанализируем "быструю" резистивную неустойчивость, предельным случаем которой является выше упомянутый случай бесконечно большого сопротивления. В четвертом разделе вычисляется мнимая поправка к частоте возмущений, связанная с опущенным в предыдущем разделе членом, приводящая к развитию "медленной" резистивной баллонной моды при отсутствии "быстрой". В последнем разделе приводятся численные значения инкрементов для существующей модели ГДЛ [2] и обсуждение результатов. В "Приложении" рассмотрены вопросы условий применимости проводимых в работе вычислений.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Мы будем исходить из системы уравнений для возмущения тока вдоль некоторой силовой трубы $\delta I = \delta j_{\parallel} S_n$, возмущения потенциала $\delta \varphi$ и относительного возмущения плотности $\delta n/n$ (рассматриваются локальные возмущения пропорциональные $\exp(-i\omega t + im\phi)$, где t - время, m - номер азимутальной моды, ϕ - азимутальный угол). Предполагается малость давления ($\beta \ll 1$), параксиальность геомет-

рии, отсутствие в стационаре поперечного градиента температуры и потенциала, поэтому пренебрегается возмущением температуры и продольной скорости (подробнее об условиях применимости рассматриваемых уравнений см. "Приложение"). Указанную систему запишем в следующем виде:

Интеграл от уравнения квазинейтральности ($\operatorname{div} j = 0$):

$$\delta I(s) = \int_0^s \left[(\omega A_K + A_L) \delta \varphi + A_K \delta n/n \right] ; \quad (2)$$

Уравнение непрерывности (с учетом $\delta v_{\parallel} = 0$):

$$-i\omega \delta n/n + v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial s} \delta n/n = i\pi m c \delta \varphi / \psi_n ; \quad (3)$$

Закон Ома:

$$\delta \varphi(s) - \delta \varphi_0 = - \int_0^s \frac{\delta I ds}{S_n \sigma_{\parallel}} . \quad (4)$$

Мы пользуемся следующими обозначениями:

s - координата вдоль силовой линии (считаем, что ловушка симметрична относительно сечения $s = 0$, индекс " $_0$ " всюду означает значение в сечении $s = 0$, например: $\delta \varphi_0 = \delta \varphi(0)$);

$S_n(s) = \psi_n / B(s)$ - градиентная площадь сечения плазмы,

$\psi_n = \left(\frac{2}{n} \frac{\partial n}{\partial \psi} \right)^{-1}$ - поперечный градиентный размер плотности в единицах магнитного потока $\psi = \pi r^2 B$, B - магнитное поле;

$$A_M(s) = \frac{i m^2 c^2 \psi_n M_i n}{r^2 B^3} , \quad (5)$$

- коэффициент определяющий вклад в интеграл (2) от дивергенции поляризационного тока, связанного с поперечным ускорением плазмы;

r - текущий радиус силовой линии, v_{\parallel} - продольная скорость течения плазмы;

$$A_K(s) = -i m c \psi_n n \approx \frac{2(T_i + T_e) + M_i v_{\parallel}^2}{r B^2} , \quad (6)$$

- коэффициент определяющий вклад в интеграл (2) от дивергенции дрейфовых токов, связанных с кривизной силовых линий k ;

$$A_L = -A_M \frac{\pi m c T_i}{e \psi_n} , \quad (7)$$

- коэффициент определяющий вклад в интеграл (2) от дивергенции дрейфового тока, связанного с эффектом КЛР;

$$\sigma_{\parallel} = 1.96 \frac{e^2 n}{m_e} \tau_e \text{ - продольная проводимость плазмы;}$$

$$\tau_e = \frac{3 \sqrt{m_e T_e^{3/2}}}{4 \sqrt{2\pi} n e^4} \text{ - "электронное" время;}$$

T_i, T_e, M_i, m_e - температуры и массы ионов и электронов, n - плотность плазмы, c - скорость света, e - заряд электрона, Λ - кулоновский логарифм.

Уравнение (2) может быть получены из соответствующих выражений работ [5, 6]. Допустимость пренебрежения в (2 - 4) некоторыми членами ("вынос импульса" в (2), градиент электронного давления в (4)) обсуждается в "Приложении".

Границные условия для уравнений (2 - 4):

$$\delta n_0/n_0 = - \frac{\pi m c}{\psi_n \omega} \delta \varphi_0, \quad (8)$$

$$\delta I(L/2) = 0. \quad (9)$$

Последнее условие означает равенство нулю тока на изолирующей концевой поверхности.

Для решения системы (2 - 4) условно разобьем силовую линию на три участка (см. рис. 1): центральная часть ($0-s_1$), пробочный участок (s_1-s_2), стабилизирующий участок расширителя ($s_2-L/2$). Будем считать, что на любом из этих участков можно пренебречь изменением либо интеграла (2), либо интеграла (4). А именно: на пробочном участке в силу большого пробочного отношения и малой длины пробки коэффициенты A_H , A_L , A_K малы, так что можно пренебречь вкладом этого участка в (2); в центре и в расширителе сечение S_n много больше, чем в пробке, поэтому можно пренебречь их омическим сопротивлением и вкладом в (4). Заметим, что при достаточно малой длине пробега электронов ($\lambda_e \leq (m_e/M_i)^{1/2} l_m$, l_m длина пробки) их течение является адиабатическим, и произведение $S_n \sigma_{\parallel}$, начиная с точки $L_c/2$ до конца расширителя, почти постоянно. Поэтому, для того, чтобы пренебречь омическим сопротивлением стабилизирующего участка в этом случае, нужно считать его длину много меньше полной длины расширителя (что имеет место в существующей модели ГДЛ: участок с минимальным полем, дающий основной вклад в интеграл устойчивости расширителя и в его эффективную массу, мал).

В силу описанных выше предположений интегрирование уравнений (2 - 4) от 0 до s_1 дает:

$$\delta n_1/n_1 = \delta n_0/n_0, \quad \delta \varphi_1 = \delta \varphi_0,$$

$$\delta I_1 = \delta \varphi_0 / \omega \int_0^{s_1} ds \left[\omega^2 A_H + \omega A_L - A_K \pi m c / \psi_n \right]. \quad (10)$$

Производя дальнейшее интегрирование, пренебрегая изменением δI на участке s_1-s_2 и изменением $\delta \varphi$ на участке $s_2-L/2$, получим выражение для возмущения тока в на концевой поверхности:

$$\begin{aligned} \delta I_w &= \delta I_1 + \int_{s_2}^{s_3} ds \left\{ \left[\omega^2 A_H - A_K \pi m c / \psi_n \right] \delta \varphi_0 / \omega - \omega A_H \delta I_1 \int_{s_1}^s \frac{ds'}{S_n \sigma_{\parallel}} - \right. \\ &\quad \left. - i A_K \frac{\pi m c}{\psi_n} \delta I_1 \int_{s_1}^s \frac{ds'}{v_{\parallel}} \exp \left(i \omega \int_{s'}^s ds'' / v_{\parallel} \right) \int_{s_1}^{s'} \frac{ds''}{S_n \sigma_{\parallel}} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

В интегралах по расширителю опущен член, содержащий A_L , поскольку в результате адиабатического расширения температура ионов в расширителе мала.

В дальнейшем мы будем считать, что пробочный участок и расширитель достаточно короткие, так что частота возмущений ω много меньше обратного времени пролета плазмы от s_1 до $L/2$. Поэтому, ограничиваясь в (11) линейным членом ($\exp(z) \approx 1 + z$) и приравнивая $\delta I_w = 0$, получим дисперсионное уравнение:

$$\alpha (i \omega \tau_{ex} + 1) (\omega^2 + v_c \omega + \Omega_c^2) + (\omega^2 + v \omega - \Omega^2) = 0. \quad (12)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Omega_c^2 \equiv \frac{\pi}{\psi_n M_i} \int_0^{L_c/2} \frac{2T_i + 2T_e + M_i v_{\parallel}^2}{r B^2} n \, dz \Big/ \int_0^{L_c/2} \frac{n \, dz}{r^2 B^3}, \quad (13)$$

- квадрат "собственной" частоты желобковых колебаний центрального пробкотрона;

$$\Omega^2 \equiv - \frac{\pi}{\psi_n M_i} \int_0^{L/2} \frac{2T_i + 2T_e + M_i v_{\parallel}^2}{r B^2} n \, dz \Big/ \int_0^{L/2} \frac{n \, dz}{r^2 B^3}, \quad (14)$$

- квадрат частоты желобковых колебаний всей ловушки (с расширителями);

$$\nu_c = - \frac{\pi m c}{e \psi_n} \int_0^{L_c/2} \frac{n T_i ds}{r^2 B^3} / \int_0^{L_c/2} \frac{n ds}{r^2 B^3}, \quad (15)$$

- коэффициент, определяющий вклад эффектов КЛР в "собственное" дисперсионное соотношение для центрального пробкотрона;

$$\nu = \nu_c / (1 + \mu), \quad (16)$$

$$\mu \equiv \int_{L_c/2}^{L/2} \frac{n ds}{r^2 B^3} / \int_0^{L_c/2} \frac{n ds}{r^2 B^3}, \quad (17)$$

- отношение "эффективной" массы силовой трубки в расширителях к "эффективной" массе силовой трубки в центральном пробкотроне;

$$\alpha \equiv - \frac{\pi m^2 c^2}{1+\mu} \int_{L_c/2}^{L/2} ds \frac{2T_i + 2T_e + M_i v_{\parallel}^2}{r B^2} n \alpha \int_{L_c/2}^s \frac{ds'}{v_{\parallel}} \int_0^{s'} \frac{ds''}{S_n \sigma_{\parallel}}, \quad (18)$$

- коэффициент, пропорциональный сопротивлению силовой трубы;

$$\tau_{ex} \equiv \langle 1/v_{\parallel} \rangle_1 - \frac{1}{\langle 1/v_{\parallel} \rangle_2 \Omega_{ex}^2}; \quad (19)$$

$\langle 1/v_{\parallel} \rangle_1, \langle 1/v_{\parallel} \rangle_2$ - несколько по разному вычисленные времена пролета расширителя:

$$\langle 1/v_{\parallel} \rangle_1 \equiv \frac{\int_{L_c/2}^{L/2} ds A_k \int_s^{s'} \frac{ds'}{v_{\parallel}} \int_{L_c/2}^{s''} \frac{ds''}{v_{\parallel}} \int_0^{s''} \frac{ds'''}{S_n \sigma_{\parallel}}}{\int_{L_c/2}^{L/2} ds}, \quad (20)$$

$$\langle 1/v_{\parallel} \rangle_2 \equiv \frac{\int_{L_c/2}^{L/2} ds A_k \int_s^{s'} \frac{ds'}{v_{\parallel}} \int_0^{s''} \frac{ds''}{S_n \sigma_{\parallel}}}{\int_{L_c/2}^{L/2} ds A_h \int_0^{s'} \frac{ds'}{S_n \sigma_{\parallel}}} \cdot \frac{\int_{L_c/2}^{L/2} ds A_h}{\int_{L_c/2}^{L/2} ds A_k}; \quad (21)$$

$$\Omega_{ex}^2 \equiv - \frac{\pi}{\psi_n M_i} \int_{L_c/2}^{L/2} \frac{2T_i + 2T_e + M_i v_{\parallel}^2}{r B^2} n \alpha ds / \int_{L_c/2}^{L/2} \frac{n ds}{r^2 B^3}, \quad (22)$$

- квадрат "собственной" частоты желобковых колебаний расширителя.

Для того, чтобы в выражениях (18), (20), (21) избежать условно определенной границы интегрирования s_1 , используемой в (11), мы считали, что время пролета плазмы от s_1 до $L_c/2$ много меньше времени пролета всего участка пробки с расширителем ($s_1 - L/2$). Остальные пределы интегрирования в выражениях (15 - 22) сведены к 0, $L_c/2$, $L/2$ в силу малости вклада соответствующих участков в интегралы (2) или (4). Знаки в формулах (15 - 22) выбирались так, чтобы в "естественной" геометрии ($\psi_n < 0, \kappa < 0$ в центре, $\kappa > 0$ в расширителе) определяемые величины были положительны. Исключение составляет определение величины τ_{ex} , которая может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от соотношения между "собственной" частотой и обратным временем пролета расширителя.

В случае бесконечно малого сопротивления ($\alpha \rightarrow 0$) уравнение (12) переходит в обычное уравнение для желобковых колебаний всей ловушки. В противоположном случае бесконечно большого сопротивления ($\alpha \rightarrow \infty$) решения (12) совпадают с корнями дисперсионного уравнения для изолированного центрального пробкотрона (третий корень $\omega = i/\tau_{ex}$ при $\tau_{ex} > 0$ должен быть отброшен, поскольку уравнение (12) получено при условии $\omega \ll v_{\parallel}/l$; в случае $\tau_{ex} < 0$, условие малости ω может не нарушаться, но тогда этот корень соответствует затухающему решению). В следующих двух разделах мы проанализируем решения уравнения (12) при конечных значениях α .

3. "БЫСТРАЯ" РЕЗИСТИВНАЯ БАЛЛОННАЯ МОДА

Всюду ниже будет предполагаться выполненным условие

$$|\omega \tau_{ex}| \ll 1 + 1/\alpha. \quad (23)$$

Отметим, что при $\Omega_{ex} > v_{\parallel}/l$ ($l = (L - L_c)/2$ - длина расширителя), условие (23) выполняется автоматически в силу того, что расширитель короткий ($l \ll v_{\parallel}/\omega$), и только при $\Omega_{ex} \ll v_{\parallel}/l$, для выполнения (23) может потребоваться малость эффективного сопротивления α .

Если, пользуясь малостью частоты, отбросить в первой скобке

(12) первое слагаемое, то решение ω_F полученного уравнения можно записать в следующем виде:

$$\omega_F = -\Omega_c \frac{\tilde{m} (1 + K\eta\tilde{m}^2)}{2 (1 + \mu + K\eta\tilde{m}^2)} (1 \pm D^{1/2}), \quad (24)$$

где $\tilde{m} = v_c/\Omega_c$, $\eta = \frac{\alpha(1+\mu)}{K\tilde{m}^2}$,

а фактор $K = \mu \Omega_{ex}^2/\Omega_c^2$ принято называть запасом устойчивости (для чисто желобковой моды). Дискриминант квадратного уравнения равен

$$D = 1 + \frac{4 (K - 1 - K\eta\tilde{m}^2) (1 + \mu + K\eta\tilde{m}^2)}{\tilde{m}^2 (1 + K\eta\tilde{m}^2)^2}. \quad (25)$$

Обратим внимание, что решение (24) содержит четыре независимых безразмерных параметра: \tilde{m} , η , K , μ , из которых только \tilde{m} зависит от номера моды ($\tilde{m} \propto m$). Параметр η пропорционален сопротивлению силовой трубы. Параметры K и μ определяются главным образом геометрией ловушки и относительно слабо зависят от режима стационарного течения плазмы.

Можно написать следующие оценочные выражения:

$$\Omega_c \approx 4 v_{T1}/L_c,$$

где $v_{T1} = (2T_{10}/M_1)^{1/2}$ (считаем что $T_i \approx T_e$) ;

$$K \approx 0.6 \frac{\Delta\theta_s L_c a_s}{R a^2}, \quad (26)$$

где $\Delta\theta_s$ - изменение угла наклона силовой линии (в радианах) по отношению к оси на стабилизирующем участке расширителя ($s_2 - L/2$), a - радиус силовой линии в центре (для последующих оценок мы считаем, что a совпадает с градиентным размером плотности), a_s - характерный радиус силовой линии на стабилизирующем участке расширителя; R - пробочное отношение:

$$\mu \approx 2 \frac{l_s a_s^2}{R L_c a_c^2}, \quad (27)$$

l_s - длина участка с малым магнитным полем в расширителе;

$$\tilde{m}/m \approx 0.1 \rho_{Lc}/a^2, \quad (28)$$

$$\rho_{Lc} = v_{T1}/\omega_{B1}, \quad \omega_{B1} = eB_0/M_1 c;$$

$$\eta \approx 70 \left(\frac{m_e}{M_1} \right)^{1/2} R \frac{a^2 l_R}{\lambda_e L_c^3}, \quad (29)$$

$$\lambda_e \equiv v_{Te} \tau_{eo}, \quad v_{Te} \equiv (2T_{eo}/m_e)^{1/2}.$$

Величина l_R -характерная длина, на которой набирается сопротивление силовой трубы. В случае течения с изотермическими электронами, то есть при $\lambda_e \approx (m_e/M_1)^{1/2} l$, длина l_R порядка длины пробки l_m . Для течения с адиабатическими электронами ($\lambda_e \leq (m_e/M_1)^{1/2} l_m$) длина $l_R \approx l$, поскольку произведение $S_n \sigma_{||}$ от пробки до конца расширителя в этом случае почти постоянно.

Численные коэффициенты в оценочных формулах имеют смысл в случае, когда течение электронов адиабатическое; зависимость $1/B$ от s в центральном пробкотроне линейная; размеры области, дающей основной вклад в интегралы в (22) малы по сравнению с размерами расширителя.

Типичные значения параметров K , μ , \tilde{m}/m , η для экспериментальной модели ГДЛ [2] при $n_0 \approx 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_{eo} \approx T_{10} \approx 2 \text{ эв}$, $B_0 \approx 10^3 \text{ э}$, $a \approx 5 \text{ см}$, $R \approx 30$ следующие:

$$K \approx 10, \quad \mu \approx 0.1, \quad \tilde{m}/m \approx 0.5, \quad \eta \approx 0.1.$$

Нас интересует, существуют ли такие значения \tilde{m} , при которых ω_F становится комплексным, где лежит граница неустойчивости, и чему равно максимальное значение инкремента. Анализ выражения (25) при $K > 1$ показывает, что при достаточно больших значениях параметра η , а именно:

$$\eta > \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 1/K}), \quad (30)$$

система неустойчива, то есть с ростом номера моды расширитель "отцепляется" раньше, чем эффекты КЛР стабилизируют центральный пробкотрон. Эту неустойчивость мы будем условно называть "быстрой" резистивной баллонной модой.

Максимальный инкремент "быстрой" неустойчивости при $\mu/K \ll 1$ равен:

$$\max \operatorname{Im} \omega_F \approx \Omega_c \sqrt{1 + (4\eta K)^{-1} - \eta^{-1/2}}, \quad (31)$$

"Эффективный" номер моды \tilde{m} , соответствующий этому максимуму, равен:

$$\tilde{m} \approx \sqrt{2/\eta^{1/2} - (\eta K)^{-1}}. \quad (32)$$

При условии

$$\eta < \sqrt{1+\mu/K} \quad \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 1/K}), \quad (33)$$

"быстрая" неустойчивость отсутствует, то есть при всех m значение ω_F действително. Точное значение границы неустойчивости

по параметру η лежит в промежутке между значениями выражений (30) и (33), вычисление ее достаточно громоздко и не столь интересно, поскольку типичное значение $\mu/K \ll 1$.

4. "МЕДЛЕННАЯ" РЕЗИСТИВНАЯ БАЛЛОННАЯ МОДА

В этом разделе мы вычислим поправку к частоте, которую дает опущенный в предыдущем разделе кубический член в дисперсионном уравнении (12). При условии (23), полагая

$$\omega = \omega_F + i\Gamma, \quad \Gamma \ll \omega_F,$$

находим, что поправка равна:

$$\Gamma \approx \Omega_c^2 \tau_{ex} F^\pm(\tilde{m}, \eta, K, \mu), \quad (34)$$

где функция F^\pm определяется выражением:

$$F^\pm = \frac{K\eta\tilde{m}^2}{2(1+\mu+K\eta\tilde{m}^2)^2} \left\{ \left[\frac{\mu\tilde{m}^2(1+K\eta\tilde{m}^2)}{1+\mu+K\eta\tilde{m}^2} - K - \mu \right] \left(1 \pm 1/D^{1/2} \right) \pm \right. \\ \left. \pm (\mu-1) \mu/D^{1/2} \right\}. \quad (35)$$

Третий корень кубического уравнения, как уже отмечалось, при $\tau_{ex} > 0$ не удовлетворяет условию $\omega \ll v_{||}/l$, при котором получено дисперсионное соотношение; при $\tau_{ex} < 0$ соответствует затухающему решению.

Оценку для безразмерного параметра $\Omega_c \tau_{ex}$ можно написать в виде:

$$\Omega_c \tau_{ex} \approx 0.6 \frac{l}{L_c} - \frac{\mu L_c}{Kl}. \quad (36)$$

Типичное значение для модели ГДЛ $\Omega_c \tau_{ex} \approx 0.1$.

При условии $D > 0$, то есть в отсутствии "быстрой" неустойчивости, значения Γ чисто действительные, поэтому знак τ_{ex} , который может быть различный в зависимости от геометрии расширителя, определяет устойчивость или неустойчивость выбранной ветви решения при заданных значениях параметров \tilde{m} , η , K , μ . (Отметим, что стремление при проектировании расширителя получить наибольший запас устойчивости обычно приводит к тому, что $\tau_{ex} > 0$).

Ниже, полагая для упрощения анализа $\mu \ll 1$, и рассматривая относительно большие и малые значения η , мы приведем некоторые характеристики обеих ветвей функции F^\pm . А именно: значения эффективного номера моды \tilde{m}_0^\pm , при которых F^\pm меняет знак; экстремумы функций $F^\pm(\tilde{m})$: $\min F^\pm$, $\max F^\pm$ и соответствующие им значения \tilde{m} : \tilde{m}_{\min}^\pm , \tilde{m}_{\max}^\pm .

1) Функцию F^+ при $\mu \ll 1$ можно записать в виде:

$$F^+ \approx \frac{K\eta\tilde{m}^2(\mu\tilde{m}^2 - K)}{2(1+K\eta\tilde{m}^2)^2} (1 + 1/D^{1/2}). \quad (37)$$

Отсюда находим:

$$\tilde{m}_0^+ \approx (K/\mu)^{1/2}; \quad (38)$$

при $\tilde{m} < \tilde{m}_0^+$, $F^+ < 0$; при $\tilde{m} > \tilde{m}_0^+$, $F^+ > 0$.

При $\eta \ll 1$ (то есть "вдали" от "быстрой" неустойчивости) значение $D \geq 1$, поэтому нетрудно найти:

$$\min F^+ \approx - \frac{\xi K^3 \eta}{4(K^2 \eta + \mu)}, \quad (39)$$

где значение ξ удовлетворяет неравенству $1/2 < \xi \leq 1$;

$$\tilde{m}_{\min}^+ \approx \sqrt{K/(K^2 \eta + 2\mu)}. \quad (40)$$

Конкретнее: при $\eta \gg 1/K^2$

$$\min F^+ \approx - K/8, \quad \tilde{m}_{\min}^+ \approx (K\eta)^{-1/2}; \quad (41)$$

при $\eta \ll 1/K^2$

$$\min F^+ \approx - \frac{K^3 \eta}{4(K^2 \eta + \mu)}. \quad (42)$$

Максимальное значение

$$\max F^+ = \mu(K\eta)^{-1}, \quad (43)$$

осуществляется при $\tilde{m} \rightarrow \infty$.

Заметим, что выполнение условия положительности F^+ , $\tilde{m} > \tilde{m}_0^+$, с учетом условия $1 \ll v_{||}/\omega$, возможно только при $\tau_{ex} < 0$.

2) Функцию F^- при $\mu \ll 1$ перепишем в виде:

$$F^- \approx \frac{-2K^2\eta(K-1-K\eta\tilde{m}^2)}{(1+1/D^{1/2})(1+K\eta\tilde{m}^2)^2 [4(K-1-K\eta\tilde{m}^2)/\tilde{m}^2 + 1 + K\eta\tilde{m}^2]}. \quad (44)$$

Откуда находим:

$$\tilde{m}_0^- \approx \sqrt{(K-1)/(K\eta)}, \quad (45)$$

при $\tilde{m} < \tilde{m}_0^-$, $F^- < 0$; при $\tilde{m} > \tilde{m}_0^-$, $F^- > 0$.

При $\eta \gg 1/K^2$

$$\min F^- \approx - K/8, \quad \tilde{m}_{\min}^- \approx 1/\sqrt{K\eta}; \quad (46)$$

при $\eta \ll 1/K^2$

$$\min F^- \approx - K^2(K-1)\eta, \quad \tilde{m}_{\min}^- \approx \left[\frac{(K-1)^2}{\eta K(K-2/3)} \right]^{1/4}. \quad (47)$$

Максимальное значение F^- при $\eta \ll 1$ равно:

$$\max F \approx 4\eta/27, \quad \tilde{m}_{\max} \approx \sqrt{(3K-2)/(2K\eta)}. \quad (48)$$

Теперь, выбирая ветвь решения с большим инкрементом, мы можем найти максимальный инкремент "медленной" резистивной неустойчивости:

при $\tau_{ex} < 0$:

$$\max \Gamma \approx \Omega_c^2 |\tau_{ex}| \frac{\xi K^3 \eta}{4(K^2 \eta + \mu)}, \quad (49)$$

($\xi=1/2$ при $\eta \gg 1/K^2$, $\xi=1$ при $\eta \ll 1/K^2$);

при $\tau_{ex} > 0$ (наиболее интересный для нас случай):

$$\max \Gamma \approx \Omega_c^2 \tau_{ex} 4\eta/27. \quad (50)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты настоящей работы. Если параметр η , пропорциональный сопротивлению силовой трубы, больше единицы, то должна развиваться "быстрая" резистивная мода с инкрементом порядка частоты желобковых колебаний центрального пробкотрона. Если η меньше единицы то неустойчивость полностью не исчезает, при сколь угодно малом сопротивлении остается "медленная" резистивная неустойчивость. Критерием "опасности" этой неустойчивости может служить отношение ее инкремента к обратному времени жизни плазмы в ловушке. Для этого отношения, используя (50), можно написать следующую оценку:

$$\Gamma/\tau_{||}^{-1} \approx 0.2 R^2 \frac{a^2 l^3}{\lambda_e L_c^4}. \quad (51)$$

На рис. 2 приведены графики зависимости максимального (по номеру азимутальной моды) инкремента резистивной баллонной моды и обратного времени жизни плазмы в зависимости от пробочного отношения. Параметры плазмы, в соответствии с [3, 4], брались следующими: плотность распределена по Гауссу с максимальным значением $2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и полушириной в центре ловушки, равной 6 см; $T_e = T_i = 2$ эв; $B_0 = 1.1$ кгс; $r_0 = 8.5$ см - радиус силовой линии, на которой инкремент максимальен. Резкий подъем кривой $\Gamma(R)$ при больших R соответствует переходу к "быстрой" моде. Пологая часть зависимости $\Gamma(R)$ соответствует "медленной" неустойчивости (прямая, касающаяся снизу графика $\Gamma(R)$ - зависимость инкремента, вычисленная по формуле (50)). Инкремент неустойчивости сравнивает-

ся с обратным временем жизни при пробочном отношении ≈ 50 , что качественно согласуется с результатами экспериментов. Для количественного сопоставления с экспериментами нужно учитывать существенную непарааксиальность расширителей в реальной модели ГДЛ и вычислять коэффициенты поперечного переноса, связанные с неустойчивостью, что выходит за рамки настоящей работы.

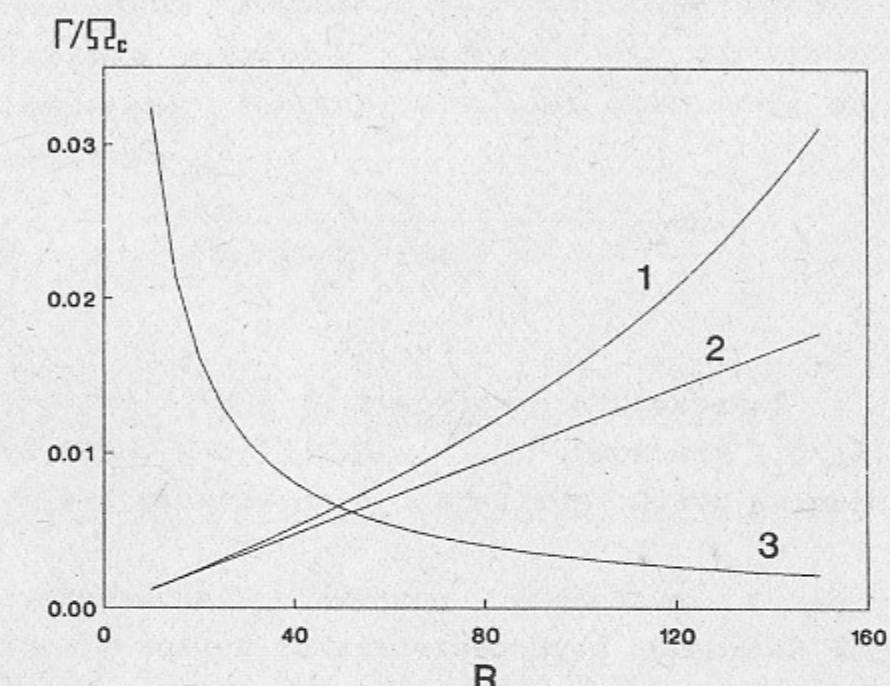


Рис. 2

Зависимость максимального инкремента от пробочного отношения.

- 1 - $\Gamma(R)/\Omega_c$ - решение кубического дисперсионного уравнения.
- 2 - $\Gamma(R)/\Omega_c$ вычисленное по формуле (50).
- 3 - $1/\tau_{||}(R)\Omega_c$.

Отметим, что искусственное "искривление" силовых линий в центральном пробкотроне, производимое для измерения запаса устойчивости расширителя в экспериментах, описанных в [3, 4], также должно было приводить к росту инкремента резистивной неустойчивости (нетрудно проследить, что выражение (50) для $\max \Gamma$ пропорционально кубу интеграла по центральному пробкотрону, содержащему в подынтегральном выражении кривизну α).

ПРИЛОЖЕНИЕ

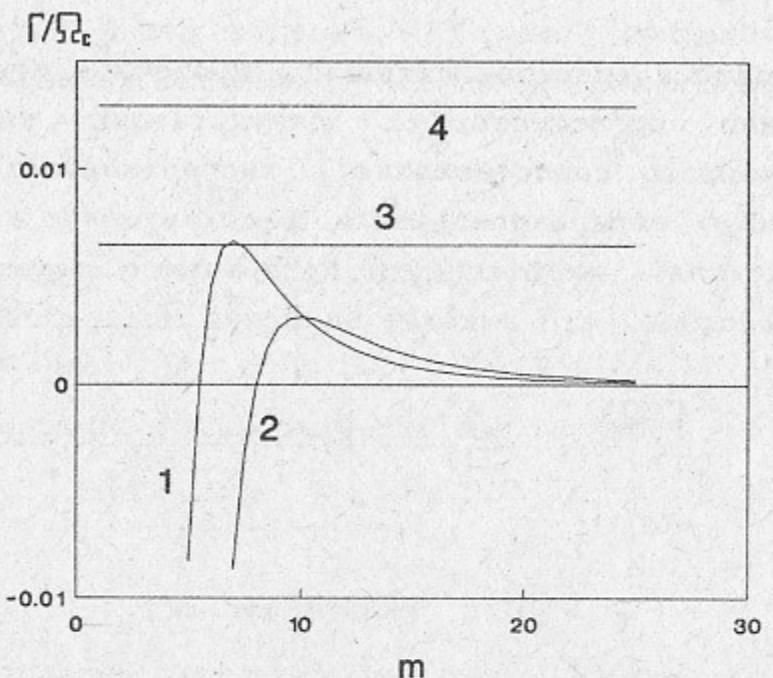


Рис. 3

Зависимость инкремента от номера моды.

1 - $\Gamma(m)/\Omega_c$, при $R=50$.

2 - $\Gamma(m)/\Omega_c$, при $R=25$.

3 - значение $1/\tau_{||}\Omega_c$ при $R=50$.

4 - значение $1/\tau_{||}\Omega_c$ при $R=25$.

На рис. 3 приведены графики зависимости инкремента резистивной баллонной неустойчивости от номера азимутальной моды для значений пробочного отношения 25 и 50 при тех же параметрах плазмы. Интересно было бы изменение такой зависимости для экспериментального обнаружения резистивной неустойчивости.

Отметим еще одно любопытное обстоятельство. Рассмотрим вместо центрального пробкотрона, имеющего максимум B на оси, систему с минимумом B (отсутствие аксиальной симметрии не существенно при рассмотрении локальных мод). Это приведет к тому, что в наших вычислениях Ω_c^2 станет отрицательным. Можно проследить, что в результате "быстрая" неустойчивость исчезнет совсем, а "медленная" останется при $\tau_{ex} < 0$. То есть, присоединение к устойчивой ловушке "стабилизирующего" расширителя при учете резистивности может приводить к неустойчивости. Во избежание недоразумения заметим, что энергия для возмущений "черпается" из вытекающей плазмы (система не замкнута).

Автор признателен Д. Д. Рютову и Г. В. Рослякову за постановку задачи и содействие в работе.

1. Оценка вклада эффекта "выноса импульса".

В точном выражении для возмущения продольного тока [5] есть еще один член, опущенный нами в (2), который мы здесь обозначим δI_p . Он равен:

$$\delta I_p = i A_n v_{||} \delta \varphi . \quad (\text{П. 1})$$

Этот член "ответственен" за так называемый эффект "выноса импульса". Им можно заведомо пренебречь в центральной части, поскольку там мала скорость $v_{||}$, и на пробочном участке, поскольку там мал фактор A_n . Учитывая δI_p на стабилизирующем участке расширителя, получим выражение для тока на концевой поверхности ловушки:

$$\delta I_{WP} = \delta I_w + i v_{||} A_n (L/2) \left\{ \delta \varphi_0 - \delta I_1 \int_{s_1}^{L/2} \frac{ds'}{S_n \sigma_{||}} \right\} , \quad (\text{П. 2})$$

где δI_w - определяется выражением (11), полученным без учета δI_p . Приравнивая δI_{WP} к нулю, получим дисперсионное соотношение в виде:

$$\alpha (i \omega \tau_{ex} + 1 + \gamma_p) (\omega^2 + v_c \omega + \Omega_c^2) + \\ + \omega^2 + v_p \omega + i v_p \omega - \Omega^2 = 0 , \quad (\text{П. 3})$$

где

$$\gamma_p \equiv \frac{m^2 c^2 \psi M_i}{\alpha} \left(\frac{n v_{||}}{r^2 B^3} \right) s=L/2 \int_0^{L/2} \frac{ds}{S_n \sigma_{||}} ,$$

$$v_p \equiv \left(\frac{n v_{||}}{r^2 B^3} \right) s=L/2 / \int_0^{L/2} \frac{n ds}{r^2 B^3} .$$

Отсюда следует, что эффектом "выноса импульса" можно пренебречь, при выполнении двух условий:

$$\gamma_p \ll 1 , \quad (\text{П. 4})$$

$$v_p \ll \alpha \tau_{ex} (\omega_F^2 + v_c \omega_F + \Omega_c^2) . \quad (\text{П. 5})$$

Для параметров γ_p и v_p/Ω_c нетрудно получить следующие оценочные выражения:

$$\gamma_p \approx \frac{B_0 a^2}{\Delta \theta B_W l a_s} , \quad v_p/\Omega_c \approx \frac{B_0}{R B_W} ,$$

где B_W - магнитное поле концевой поверхности ловушки. Для значе-

ний эффективного азимутального числа \tilde{m} , лежащих в области, где существует резистивная неустойчивость ($\tilde{m}^2 \eta \geq 1$), в предположении малости параметра μ (а именно: $\mu \leq K\eta$) условие (П.5) можно записать в более простом виде:

$$\nu_p / \Omega_c \ll K \tau_{ex} \Omega_c .$$

Если в качестве оценки считать $B_w/B_0 \approx a_s^2/a_s^2$, то в итоге получаем следующее условие

$$1 \gg \max \left[\frac{a_s}{\Delta \theta}, \frac{L_c a_s^2}{R K a_s^2} \right], \quad (\text{П.6})$$

при выполнении которого можно пренебречь "выносом импульса".

2. Оценка вклада градиента электронного давления в (4).

Известно, что при решении задачи с учетом эффектов КЛР в законе Ома нужно учитывать вклад градиента электронного давления (если $T_e \geq T_i$). То есть, продольная компонента закона Ома должна быть записана следующим образом (при $\delta T_e = 0$):

$$\frac{\partial \delta \varphi}{\partial s} = - \frac{\delta I}{S_n \sigma_{||}} + \frac{T_e}{e} \frac{\partial}{\partial s} (\delta n/n) . \quad (\text{П.7})$$

В результате интегрирования системы, состоящей из уравнений (2), (3) и уравнения (П.7) (вместо (4)), в рамках указанных в разделе II допущений мы получим выражение для возмущения тока на концевой поверхности ловушки:

$$\begin{aligned} \delta I_w &= \delta I_1 + \int_{s_2}^{s_3} ds \left\{ \left[\omega^2 A_K - A_K \frac{\pi m c}{\psi_n} \right] \delta \varphi_0 / \omega - \right. \\ &- \omega A_K \delta I_1 \left[\int_{s_1}^s \frac{ds'}{S_n \sigma_{||}} - i \int_{s_1}^s \frac{ds'}{v_{||}} \omega^* \int_{s_1}^{s'} \frac{ds''}{S_n \sigma_{||}} \exp \left(i \int_{s''}^s \frac{\omega - \omega^*}{v_{||}} ds''' \right) \right] - \\ &\left. - i A_K \frac{\pi m c}{\psi_n} \delta I_1 \int_{s_1}^s \frac{ds'}{v_{||}} \int_{s_1}^{s'} \frac{ds''}{S_n \sigma_{||}} \exp \left(i \int_{s''}^s \frac{\omega - \omega^*}{v_{||}} ds''' \right) \right\}, \quad (\text{П.8}) \end{aligned}$$

$$\text{где } \omega^* = - \frac{\pi m c}{e \psi_n} .$$

Теперь считая, что $\omega^* l \ll v_{||}$ и $\omega l \ll v_{||}$, получим дисперсионное соотношение:

$$\alpha [i(\omega - g\nu_c) \tau_{ex} + 1] (\omega^2 + \nu_c \omega + \Omega_c^2) + \omega^2 + \nu \omega - \Omega^2 = 0 , \quad (\text{П.9})$$

$$\begin{aligned} &\int_{L/2}^{L_c/2} \frac{ds}{v_{||}} \int_{s_1}^s \frac{ds'}{v_{||}} T_e \int_0^{s'} \frac{ds''}{S_n \sigma_{||}} \int_0^{L_c/2} \frac{n ds}{r^2 B^3} \\ \text{где } g \equiv \frac{\langle \omega^* \rangle}{\nu_c} \equiv &\frac{\int_{L_c/2}^{L/2} \frac{ds}{v_{||}} \int_{s_1}^s \frac{ds'}{v_{||}} \int_0^{s'} \frac{ds''}{S_n \sigma_{||}} \int_0^{L_c/2} T_i \frac{n ds}{r^2 B^3}}{\int_{L_c/2}^{L/2} \frac{ds}{v_{||}} \int_{s_1}^s \frac{ds'}{v_{||}} \int_0^{s'} \frac{ds''}{S_n \sigma_{||}} \int_0^{L_c/2} \frac{n ds}{r^2 B^3}} . \quad (\text{П.10}) \end{aligned}$$

Соответственно, инкремент медленной резистивной неустойчивости будет равен

$$\Gamma_g = (1 - g\nu_c / \omega_F) \Gamma ,$$

где Γ - определяется выражением (34), полученным без учета ω^* . Оценочное выражение для параметра g можно написать в следующем виде

$$g \approx \frac{T_{e0} l_{Te}}{T_{i0} l} , \quad (\text{П.11})$$

где $l_{Te} \sim \lambda_e (M_i/m_e)^{1/2}$ - длина в пробочной области на которой происходит спад температуры электронов. Для значений эффективного азимутального числа \tilde{m} , лежащих в области, где существует резистивная неустойчивость ($\tilde{m}^2 \eta \geq 1$), отношение ω_F/ν_c порядка единицы, поэтому вкладом возмущения градиента электронного давления в уравнение (4) можно пренебречь, когда $g \ll 1$. Это условие в силу оценки (П.11) при $T_{i0} \approx T_{e0}$ выполняется, когда

$$\lambda_e \ll l (m_e/M_i)^{1/2} . \quad (\text{П.12})$$

3. Оценка возмущений температуры и продольной скорости

Для вычисления величин δT , $\delta v_{||}$ мы должны записать систему линеаризованных МГД-уравнений, состоящую из уравнения непрерывности, продольной компоненты уравнения Эйлера и закона сохранения энергии (для простоты здесь рассматривается идеальная одножидкостная модель; возмущения поперечной скорости плазмы, связанные с возмущением потенциала, считаются заданными извне). Указанная система после ряда преобразований, которые мы опускаем, сводится к следующему уравнению:

$$(1-\beta^2)\zeta'' - P\zeta' - Q\zeta = F, \quad (\text{П. 13})$$

где $\zeta(x) \equiv \delta v_{||}/v_{||}$,

штрихи () означают дифференцирование по безразмерной переменной

$$x \equiv (s - L_c/2)|\omega|/v_{||}.$$

Остальные обозначения следующие:

$$\beta^2 \equiv 3 [T_0/T(x)-1], \quad T = T_1 = T_e,$$

$$P \equiv 8h + 2w\beta^2 + (1-\beta^2) \left[h'/(h+w) - h \right],$$

$$Q \equiv w \left\{ 9h + w\beta^2 + (3-\beta^2) \left[h'/(h+w) - h \right] \right\},$$

$$h \equiv T'/T,$$

$$w \equiv -i\omega/|\omega|,$$

$$F \equiv -\frac{3}{5}w \left[(h+w) \left(\frac{f}{h+w} \right)' + \frac{wh'}{h+w} \int_{x_0}^x \exp[w(x_1-x)] f dx_1 \right],$$

$$f(x) \equiv [\delta\psi(x) - \delta\psi_0]/(2\psi_n).$$

Границное условие для (П. 13): $\zeta(x_0) = \zeta'(x_0) = 0$. Возмущения температуры и плотности выражаются через ζ следующим образом:

$$\delta T/T = -\frac{2}{3} \int_{x_0}^x \exp[w(x_1-x)] \zeta' dx_1,$$

$$\delta n/n = \delta\psi_0/(2\psi_n) - \int_{x_0}^x \exp[w(x_1-x)] (\zeta' + wf) dx_1.$$

В простейшем случае однородного поля $T = \text{const}$ в стационарном течении, и решение (П. 13) без правой части соответствует продольным звуковым волнам:

$$\zeta = \exp(ikv_{||}x/|\omega|),$$

где $k = \frac{\omega}{v_{||}(1 \pm 1/\beta)}$. Отсюда следует, что $\beta = v_{||}/c_s$, c_s - локальное значение скорости звука.

При рассмотрении течения плазмы через пробку в решении уравнения (П. 13) возникает особенность в точке, где стационарное течение переходит через скорость звука: $(1-\beta^2)=0$. Возникновение этой особенности связано с тем, что при нежелобковом возмущении течения, в котором имеется переход через скорость звука, решение нелинеаризованной системы уравнений будет содержать ударную волну. Для устранения особенности в решении линеаризованных

уравнений учтем малую, но конечную вязкость. Если считать, что вязкость становится существенной только на масштабах много меньших, чем продольный размер пробки, то вместо (П. 13) получим следующее уравнение:

$$\tilde{\eta}\zeta'' + (1-\beta^2 + w\tilde{\eta})\zeta'' - P\zeta' - Q\zeta = F, \quad (\text{П. 14})$$

где $\tilde{\eta} \approx \tau_1 |\omega|$ - обезразмеренный коэффициент вязкости, $\tilde{\eta}h \ll 1$.

Решение (П. 14) без правой части для случая однородного магнитного поля, имеет вид звуковых волн, затухающих в направлении своего распространения. Для решения (П. 14) в некотором интервале $|x| \leq x_1$ (где $x_1 \ll 1/h$) вокруг точки, соответствующей $\beta^2=1$, оставим в коэффициентах уравнения главные члены их разложения по параметру xh . Кроме того, будем искать достаточно быстро меняющееся решение, то есть предположим, что $\zeta \gg \tilde{\eta}$. Тогда, опуская последний член в левой части уравнения, и делая замену переменных $\alpha \equiv x (4h/\tilde{\eta})^{1/2}$, $\psi(\alpha) \equiv d\zeta/dx$, получим уравнение:

$$\psi'' - \alpha \psi' - 2\psi = \Phi, \quad (\text{П. 15})$$

где $\Phi \equiv F/(4h)$.

Функция Грина уравнения (П. 15), обращающаяся в ноль при $|\alpha| \rightarrow \infty$, имеет вид:

$$G(x, \xi) = -\frac{\int_0^\infty dt t \exp(-t^2/2-t\xi-t|x-\xi|)}{2 \int_0^\infty dt t^2 \exp(-t^2/2-t\xi)}.$$

Учитывая, что $G(x, \xi)$ экспоненциально спадает при $|x-\xi| \gg 1$, оценим изменение ζ на интервале $|x| \leq x_1 = 2x_1(h/\tilde{\eta})^{1/2} \gg 1$:

$$\Delta_1 \zeta \equiv \zeta(x_1) - \zeta(-x_1) \approx -\frac{3w}{20} \int_{-x_1}^{x_1} d\xi \frac{d}{d\xi} \left(\frac{f}{h} \right) G_1(\xi),$$

где $G_1(\xi) = \int_{-\infty}^\infty G(x, \xi) dx$. Нетрудно убедиться, что асимптотика функции $G_1(\xi)$ при $\xi \gg 1$ пропорциональна ξ^2 , поэтому можно написать следующую оценку

$$|\Delta_1 \zeta| \leq \frac{f(x_1)}{h^2 \tilde{\eta}} \sim \frac{\delta\psi_3 - \delta\psi_0}{\psi_n} \frac{l_m^3 \omega}{l_R \lambda_i v_{||}}, \quad (\text{П. 16})$$

где λ_i - длина свободного пробега ионов, l_R - характерная длина

силовой линии, на которой набирается сопротивление силовой трубки. Отметим, что оценка для $\delta v_{\parallel}/v_{\parallel}$, которую можно получить из уравнения (П. 13) в области, где $|1-\beta^2| \geq 1$, дает в l_m/λ_1 раз меньшую величину по сравнению с (П. 16). Таким образом, основной вклад в возмущение продольной скорости вносит участок, где скорость течения близка к скорости звука.

Для того, чтобы можно было пренебречь возмущением продольной скорости при вычислении инкремента медленной резистивной моды, необходимо выполнение условия:

$$\delta v_{\parallel}/v_{\parallel} \ll (\delta n_3/n_3 - \delta n_0/n_0) l w/v_{T1} \sim \frac{\delta \psi_3 - \delta \psi_0}{\psi_n} \frac{l^2 \omega^2}{v_{\parallel}^2}.$$

Таким образом, должно выполняться неравенство:

$$\lambda_1 \gg \frac{l_m^3 L_c}{l^2 l_R}. \quad (\text{П. 17})$$

С другой стороны для применимости МГД подхода необходимо, чтобы $l_m \gg \lambda_1$, что вместе с (П. 17) определяет интервал возможных значений длины свободного пробега ионов. Очевидно, что учет не только вязкости, но и других диссипативных процессов, может привести к расширению указанного интервала, однако подробный анализ этой возможности выходит за рамки настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Вопросы атомной науки и техники. Термоядерный синтез, 1980, т. 1, 57.
2. Bagryanskiy P.A. et al. In. Proc. of the XI International Conf. on Plasma Physics and Controlled Fusion Research, (Kioto 1986). Vienna, IAEA, 1987, 3, 467.
3. Bagryanskiy P.A. et al. In. Proc. of the XIX International Conf. on Phenomena in ionized gases, Belgrade 1989, v.4, p.832.
4. Багрянский П.А. Диссертация, ИЯФ, Новосибирск, 1990.
5. Nagornyi V.P., Ryutov D.D., Stupakov G.V. Nuclear Fusion, 1984, v.24, 11, 1421.
6. Berk H.L., Ryutov D.D., Stupakov G.V., Tsidulko Yu.A. In. Proc. of the XIII International Conf. on Plasma Physics and Controlled Fusion Research, (Washington 1990). Vienna, IAEA, 1991, 2, 298.

Ю.А. Цидулко

Резистивная баллонная мода
в газодинамической ловушке

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 11 февраля 1992 г.
Подписано в печать 11 февраля 1992 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,8 печ.л., 1,5 уч.-изд.л.
Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ N 10

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ СО РАН,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.