

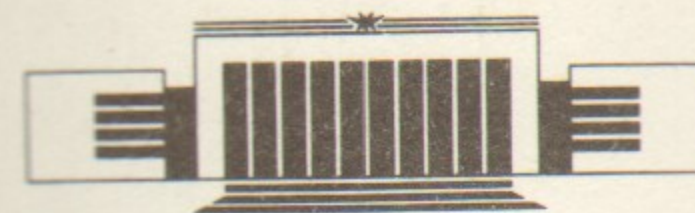


49
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Г. Грозин

**СИСТЕМА REDUCE В ФИЗИКЕ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.
Квантовая электродинамика**

ПРЕПРИНТ 90-71



НОВОСИБИРСК

Система REDUCE
в физике элементарных частиц.
Квантовая электродинамика

А.Г. Грозин

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Настоящий препринт представляет собой вторую часть пособия по применению языка аналитических вычислений REDUCE для вычисления сечений рассеяния и вероятностей распада в физике элементарных частиц. Он содержит примеры вычислений в квантовой электродинамике.

REDUCE IN ELEMENTARY
PARTICLE PHYSICS.
Quantum electrodynamics

A.G. Grozin

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, USSR

ABSTRACT

This preprint is the second part of the problem book on using REDUCE for calculations of cross sections and decay probabilities in elementary particle physics. It contains examples of calculations in quantum electrodynamics.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

1. РАССЕЯНИЕ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Настоящий препринт посвящен применению языка аналитических вычислений REDUCE [1, 2] в квантовой электродинамике [3, 4]. Он является продолжением [5]; ссылки на этот препринт обозначаются I.

Рассеяние электрона. Рассеяние электрона во внешнем поле изображено на рис. 1. Сначала мы вычисляем лептонный тензор $T_{\mu\nu}^l(p_1, p_2)$ — просуммированный по поляризациям начального и конечного электрона квадрат матричного элемента рассеяния с произвольными индексами поляризации фотона. Это несколько более общий объект, чем нам сейчас нужно, но его можно применять и во многих других задачах. Лептонный тензор содержит $e^2 = 4\pi\alpha$; множитель α явно в программе не выписан. Множитель 4 превращает $1/4 \text{ Sp}$ (REDUCE вычисляет именно такое выражение) в Sp .

В программе для удобства вводится оператор V для вершины и R для удвоенной матрицы плотности. Затем вычисляется лептонный тензор TL. При этом используется оператор FOR ALL ... SAVEAS ... Он определяет правило подстановки FOR ALL ... LET ... = ..., где правая часть — значение только что вычисленного выражения (переменной WS). В качестве M используется SQRT(K1.K1), так что TL можно использовать для частиц с раз-

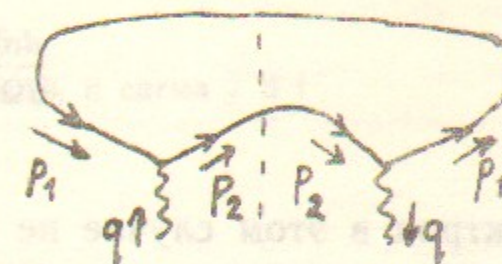


Рис. 1. Рассеяние во внешнем поле.

ной массой. Затем программа проверяет тождество Уорда для $T_{\mu\nu}^I$.

Далее мы вычисляем квадрат матричного элемента $|M'|^2$ (I.3), усредненный по поляризациям начального электрона (это дает множитель 1/2). Импульсы начального и конечного электрона обозначены P1, P2, а 4—скорость системы покоя поля (т. е. его источника) — N. Энергия электрона до и после рассеяния в этой системе одинакова и равна ϵ . Переменная $t=q^2$, $q=p_1-p_2$. Потенциал внешнего поля точечного заряда $A_\mu = -en_\mu/t$; в ММ опять подразумевается α^2 , а если заряд не точечный, то еще и квадрат формфактора. Из ММ по формуле (I.1.25) получается

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi \alpha^2 \rho^2(t) \frac{4\epsilon^2 + t}{t^2(\epsilon^2 - m^2)}. \quad (1)$$

Из этого инвариантного сечения легко получить в системе покоя

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \rho^2 \frac{\epsilon^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{4(\epsilon^2 - m^2)^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \alpha^2 \rho^2 (1 - v^2) \frac{1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (2)$$

В ультррелятивистском случае

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \rho^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\epsilon^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (3)$$

Электрон в этом случае не может рассеяться назад. Действительно, направим ось z по начальному направлению движения электрона. Проекция орбитального момента на эту ось равна 0. Поэтому проекция спина на нее не может измениться, т. е. спиральность должна изменить знак. Для ультррелятивистского электрона это запрещено. В нерелятивистском случае получается формула Резерфорда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \rho^2}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (4)$$

В системе покоя начального электрона, налетающий на него бесконечно тяжелый источник поля передает ему энергию, которую мы обозначим $m\Delta$. Сечение $d\sigma/d\Delta$ применяется для вычисления

потерь энергии тяжелой заряженной частицы, движущейся через среду с (почти) покоящимися электронами. Программа получает

$$\frac{d\sigma}{d\Delta} = \pi \alpha^2 \rho^2 \frac{2 - (1 - v^2) \Delta}{m^2 v^2 \Delta^2}. \quad (5)$$

% Рассеяние электрона во внешнем поле

% -----

MASS P1=M,P2=M,N=1;MSHELL P1,P2,N; % рассеяние. P1,P2—импульсы

LET P1,P2=M**2-T/2,N,P1=E,N,P2=E; % N—4—скорость системы покоя

OPERATOR V;FOR ALL P LET V(P)=G(F,P); % вершина

VECTOR K1,K2,E1,E2;LET K2.K2=K1.K1;

OPERATOR R; % удвоенная матрица плотности

NOSPUR F;G(F,K1)+SQRT(K1.K1)\$FOR ALL P SAVEAS R(K1);SPUR F;

OPERATOR TL; % лептонный тензор—подразумевается альфа

4*4*PI*R(K2)*V(E2)*R(K1)*V(E1);

- 16*PI*(E2.E1*K2.K1 - E2.E1*K1.K1 - E2.K2*E1.K1 - E2.K1*E1.K2)

FOR ALL K1,E1,K2,E2 SAVEAS TL(K1,E1,K2,E2);

TL(P1,P2-P1,P2,E2); % проверим тождество Уорда

0

% средний квадрат матричного элемента

% подразумевается альфа**2*формфактор**2

ON GCD;MM:=TL(P1,N,P2,N)*4*PI/(2*T**2)\$

SIG:=MM/(16*PI*(E**2-M**2));CLEAR MM; % d сигма / d t

PI*(4*E² + T)

SIG := -----

T²*(E² - M²)

% система покоя S=SIN(THETA/2)

TRF:=-4*(E**2-M**2)*S**2\$RF:=(E**2-M**2)/PI\$

SIG1:=SUB(T=TRF,SIG)*RF; % d сигма / d omega

E²*S² - E² - M²*S²

SIG1 := - -----

4*S⁴*(E⁴ - 2*E²*M² + M⁴)

SUB(M=0,SIG1); % ультррелятивистский предел


```

      S^2 - 1
-----
      4 * E^2 * S^4
EV := M / SQRT(1 - V**2) $ SIG1 := SUB(E = EV, SIG1); % V — скорость

      S^2 * V^4 - 2 * V^2 - V^2 + 1
SIG1 := -----
      4 * M^2 * S^4 * V^4

% нерелятивистский предел
PROCEDURE NONREL(X);
BEGIN SCALAR X1, X2, W, Z; X1 := NUM(X); X2 := DEN(X); W := 1;
  WHILE (Z := SUB(V = 0, X1)) = 0 DO (< X1 := X1 / V; W := W * V >); X1 := Z;
  WHILE (Z := SUB(V = 0, X2)) = 0 DO (< X2 := X2 / V; W := W / V >); X2 := Z;
  RETURN X1 / X2 * W
END;

NONREL
NONREL(SIG1);

      1
-----
      4 * M^2 * S^4 * V^4
% система покоя начального электрона. M * D — передача энергии
TD := - 2 * M ** 2 * D $ FD := 2 * M ** 2 $ SIG1 := SUB(T = TD, E = EV, SIG) * FD;

      PI * (D * V^2 - D + 2)
SIG1 := -----
      D^2 * M^2 * V^2

CLEAR SIG, SIG1; OFF GCD;

```

Поляризационные эффекты. Пусть начальный электрон поляризован, и требуется найти сечение рассеяния и поляризацию конечного электрона. Для этого нужен лептонный тензор с учетом поляризаций $T'_{\mu\nu}(p_1, a_1, p_2, a_2)$ (в него входят удвоенные матрицы плотности, так что при $a_1 = 0, a_2 = 0$ он переходит в ранее полученный тензор). Затем поляризации начального и конечного электрона разлагаются по компонентам: продольная, поперечная в плоскости рассеяния и перпендикулярная к плоскости рассеяния.

Для облегчения нахождения соответствующих единичных век-

торов написана процедура ORT, строящая ортонормированную систему из данного ей списка векторов. Вектора в списке задаются в виде V.L. Первый из них должен быть времениподобным. Он просто делится на свою длину, так что в результате его квадрат равен 1. Из каждого из следующих векторов вычитаются компоненты вдоль уже построенных векторов ортонормированной системы, и результат нормируется так, что его квадрат равен -1. Процедуре приходится следить, какие векторы являются времениподобными, а какие пространственноподобными. Для этого используются счетчики Y1, Y2. В REDUCE 3.3 имеется ошибка: если внутри блока BEGIN ... END содержится цикл FOR EACH ... DO ..., а в нем производится присваивание локальной переменной блока, то это присваивание не выполняется. Поэтому в процедуре ORT используются только циклы WHILE ... DO ...

Процедура EPOL подставляет вместо векторов поляризации их разложения по этим ортам. Процедура POL вычисляет и печатает сечение, просуммированное по поляризациям конечного электрона, и возвращает его поляризацию в виде списка из 3 компонент.

Видно, что поляризация начального электрона не влияет на сечение, а поляризация конечного электрона отлична от 0, только когда начальный электрон поляризован. Компонента поляризации, перпендикулярная плоскости рассеяния, не меняется. Для остальных компонент программа получает

$$\begin{aligned}
 z_1^2 &= \frac{\left(\cos \theta + v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) z_1 + \sqrt{1 - v^2} \sin \theta z_2}{1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \\
 z_2^2 &= \frac{-\sqrt{1 - v^2} \sin \theta z_1 + \left(\cos \theta + v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) z_2}{1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

В ультрарелятивистском случае $z_1^2 = z_1$, $z_2^2 = z_2$. Первое равенство выражает сохранение спиральности ультрарелятивистских фермионов в электромагнитных взаимодействиях. В нерелятивистском случае $z_1^2 = z_1 \cos \theta + z_2 \sin \theta$, $z_2^2 = -z_1 \sin \theta + z_2 \cos \theta$, т. е. вектор поляризации не меняется, а его компоненты преобразуются из-за поворота направления движения частицы на угол θ . Это естественно, т. к. в нерелятивистском случае спин-орбитальное взаимодействие отсутствует.


```

% поляризационные эффекты
% -----
VECTOR A1,A2;LET K1.A1=0,K2.A2=0,P1.A1=0,P2.A2=0;
NOSPUR F;R(K1)*(1+G(F,A,A1))$FOR ALL P,U SAVEAS R(K1,A1);SPUR F;
% лептонный тензор с поляризацией
4*4*PI*R(K2,A2)*V(E2)*R(K1,A1)*V(E1);

16*PI*(A2.A1*E2.E1*K2.K1 - A2.A1*E2.E1*K1.K1 - A2.A1*E2.K2*
E1.K1 - A2.A1*E2.K1*E1.K2 - A2.E2*A1.E1*K2.K1 + A2.
E2*A1.E1*K1.K1 + A2.E2*A1.K2*E1.K1 - A2.E1*A1.E2*K2.
K1 + A2.E1*A1.E2*K1.K1 + A2.E1*A1.K2*E2.K1 + A2.K1*
A1.E2*E1.K2 + A2.K1*A1.E1*E2.K2 - A2.K1*A1.K2*E2.E1
- E2.E1*K2.K1 + E2.E1*K1.K1 + E2.K2*E1.K1 + E2.K1*E1
.K2 + SQRT(K1.K1)*EPS(A2,E2,E1,K2)*I - SQRT(K1.K1)*
EPS(A2,E2,E1,K1)*I + SQRT(K1.K1)*EPS(A1,E2,E1,K2)*I
- SQRT(K1.K1)*EPS(A1,E2,E1,K1)*I)

FOR ALL K1,A1,E1,K2,A2,E2 SAVEAS TL(K1,A1,E1,K2,A2,E2);
TL(P1,A1,P2-P1,P2,A2,E2); % проверим тождество Уорда
0

ON GCD;MM:=TL(P1,A1,N,P2,A2,N)*4*PI/(4*T**2)$
SIG:=MM/(16*PI*(E**2-M**2));CLEAR MM; % 2*PI d сигма / d t d фи
SIG := (PI*(2*N.A2*N.A1*T + 4*N.A2*P2.A1*E + 4*N.A1*P1.A2*E
- 2*P2.A1*P1.A2 - 4*A2.A1*E2 - A2.A1*T + 4*E2 +
T))/(2*T2*(E2 - M2))

ARRAY EP1(3),EP2(3); % базисные вектора поляризации
% перпендикуляр к плоскости рассеяния
VECTOR L;ET:=EPS(N,P1,P2,L)$INDEX L;X:=ET**2$REMIND L;
EP1(3):=EP2(3):=ET/SQRT(-X);CLEAR X,ET;

2*EPS(L,N,P2,P1)

EP1(3) := EP2(3) := -----
SQRT(- 4*E2*T + 4*M2*T - T2)

% Построение ортонормированной системы из списка векторов L0
% в виде V.L. Первый вектор должен быть времениподобным
PROCEDURE ORT(L0);
BEGIN SCALAR L1,L2,L3,X,V,W,Y1,Y2;
L1:=L0;L2:={ };Y1:=0;
WHILE L1 NEQ { } DO

```

```

<< V:=FIRST(L1);L1:=REST(L1);Y2:=0;L3:=L2;
WHILE L3 NEQ { } DO
<< W:=FIRST(L3);L3:=REST(L3);
X:=V*W;INDEX L;X:=X;REMIND L;Y2:=Y2+1;
V:=V-X*W*(IF Y2=Y1 THEN 1 ELSE -1)
>>;
X:=V**2;INDEX L;X:=X;REMIND L;Y1:=Y1+1;
V:=V/SQRT(X*(IF Y1=1 THEN 1 ELSE -1));L2:=V.L2
>>;
RETURN REVERSE(L2)
END;

ORT
X:=ORT((P1.L,N.L,P2.L));

L.PI
X:={-----,
M
L.N*M2 - L.PI*E
-----,
SQRT(E2 - M2)*M
(SQRT(E2 - M2)*L.N*E*T + 2*SQRT(E2 - M2)*L.P2*E2 - 2*
SQRT(E2 - M2)*L.P2*M2 - 2*SQRT(E2 - M2)*L.PI*E2 + 2*
SQRT(E2 - M2)*L.PI*M2 - SQRT(E2 - M2)*L.PI*T)/(SQRT(
- 4*E2*T + 4*M2*T - T2)*E2 - SQRT(- 4*E2*T + 4*M2*
T - T2)*M2))

EP1(1):=-SECOND(X)$EP1(2):=THIRD(X)$
X:=ORT((P2.L,N.L,P1.L))$
EP2(1):=-SECOND(X)$EP2(2):=-THIRD(X)$CLEAR X;
% 1 - продольная поляризация, 2 - в плоскости рассеяния

% подставляет в X вместо AX вектор EX, заданный в виде V.L
PROCEDURE EPOL(AX,EX,X);
BEGIN SCALAR X0,X1,E1;X0:=SUB(AX=0*AX,X);X1:=X-X0;
INDEX L;E1:=EX*AX.L;REMIND L;
INDEX AX;X1:=X0+X1*E1;REMIND AX;RETURN X1
END;

```


EPOL

OPERATOR Z;FACTOR Z; % компоненты поляризации

CLEAR P1.A1;SIG:=EPOL(A1,FOR I:=1:3 SUM Z(P1,I)*EP1(I),SIG)\$

CLEAR P2.A2;SIG:=EPOL(A2,FOR I:=1:3 SUM Z(P2,I)*EP2(I),SIG);

SIG := (Z(P2,3)*Z(P1,3)*PI*(4*E⁴ - 4*E²*M² + E²*T - M²*T) +
Z(P2,2)*Z(P1,2)*PI*(4*E⁴ - 4*E²*M² + E²*T + M²*T) -
2*SQRT(- 4*E²*T + 4*M²*T - T²)*Z(P2,2)*Z(P1,1)*E*M*
PI + 2*SQRT(- 4*E²*T + 4*M²*T - T²)*Z(P2,1)*Z(P1,2)*
E*M*PI + Z(P2,1)*Z(P1,1)*PI*(4*E⁴ - 4*E²*M² + E²*T
+ M²*T) + PI*(4*E⁴ - 4*E²*M² + E²*T - M²*T))/(2*
T²*(E⁴ - 2*E²*M² + M⁴))

% компоненты поляризации подставлены

% вычисляет компоненты поляризации конечного фермиона

PROCEDURE POL(SIG,N);

BEGIN SCALAR X,SIG0;

% сечение, просуммированное по поляризациям конечного электрона

FOR ALL J LET Z(N,J)=0;WRITE SIG0:=2*SIG;FOR ALL J CLEAR Z(N,J);

% поляризация конечного электрона

RETURN FOR I:=1:3 COLLECT

<< X:=DF(SIG,Z(N,I));

FOR ALL J LET Z(N,J)=0;X:=2*X/SIG0;FOR ALL J CLEAR Z(N,J);X

>>

END;

POL

X:=POL(SIG,P2);CLEAR SIG;

SIG0 := $\frac{PI*(4*E^2 + T)}{T^2*(E^2 - M^2)}$

X := { (2*SQRT(- 4*E²*T + 4*M²*T - T²)*Z(P1,2)*E*M + Z(P1,1)
*(4*E⁴ - 4*E²*M² + E²*T + M²*T))/(4*E⁴ - 4*E²*M² + E²
*T - M²*T),
(Z(P1,2)*(4*E⁴ - 4*E²*M² + E²*T + M²*T) - 2*SQRT(- 4*

E²*T + 4*M²*T - T²)*Z(P1,1)*E*M)/(4*E⁴ - 4*E²*M² + E²
*T - M²*T),
Z(P1,3)}

X:=FOR EACH W IN X COLLECT SUB(T=TRF,W); % система покоя

X := { - (2*SQRT(- S² + 1)*Z(P1,2)*E*M*S + Z(P1,1)*(- E²*
S² + E² - M²*S²))/(E²*S² - E² - M²*S²),
(Z(P1,2)*(E²*S² - E² + M²*S²) + 2*SQRT(- S² + 1)*Z(P1,
,1)*E*M*S)/(E²*S² - E² - M²*S²),
Z(P1,3)}

FOR EACH W IN X COLLECT SUB(M=0,W);% ультрарелятивистский предел
{Z(P1,1),Z(P1,2),Z(P1,3)}

X:=FOR EACH W IN X COLLECT SUB(E=EV,W); % V — скорость

X := { - (2*SQRT(- V² + 1)*SQRT(- S² + 1)*Z(P1,2)*S + Z(P1,
,1)*(S²*V² - 2*S² + 1))/(S²*V² - 1),
- (Z(P1,2)*(S²*V² - 2*S² + 1) - 2*SQRT(- V² + 1)*
SQRT(- S² + 1)*Z(P1,1)*S)/(S²*V² - 1),
Z(P1,3)}

FOR EACH W IN X COLLECT SUB(V=0,W); % нерелятивистский предел

{2*SQRT(- S² + 1)*Z(P1,2)*S + Z(P1,1)*(- 2*S² + 1),
- (Z(P1,2)*(2*S² - 1) + 2*SQRT(- S² + 1)*Z(P1,1)*S),
Z(P1,3)}

CLEAR X;

Распад $\psi \rightarrow e^+e^-$. Нейтральные векторные мезоны (например, ψ) могут переходить в виртуальный фотон. Вершина перехода имеет вид $iMfe_\mu$, где M — масса мезона, а f — характеризующая его константа размерности массы. Поэтому эти мезоны могут распадаться на e^+e^- (рис. 2). Суммирование по поляризациям мезона производится по формуле $\sum e_\mu e_\nu^* = p_\mu p_\nu / M^2 - \delta_{\mu\nu}$; первый член не дает вклада в силу тождества Уорда. Программа вычисляет $|M|^2$ и Γ (подразумевается $\alpha^2 f^2$). Для получения 2-частичного фазового объема используется процедура PH2 из пакета КРАСК. Те же формулы с заменой $f \rightarrow M$ описывают распад $\gamma^* \rightarrow e^+e^-$.

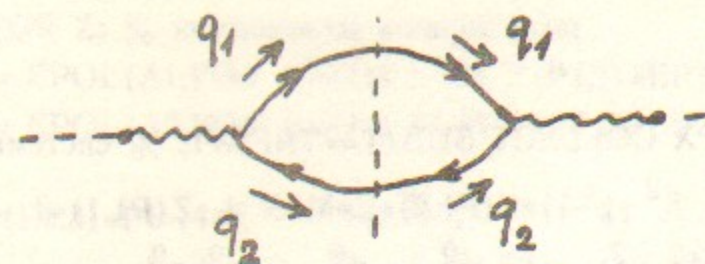


Рис. 2. $\psi \rightarrow e^+ e^-$.

Результат имеет вид

$$\Gamma = \frac{4\pi\alpha^2 f^2 (M^2 + 2m^2) \sqrt{M^2 - 4m^2}}{3M^4} = \frac{\pi\alpha^2 f^2 v (3 - v^2) \sqrt{1 - v^2}}{3m} \quad (7)$$

В ультрарелятивистском случае ($\psi \rightarrow e^+ e^-$, $\mu^+ \mu^-$)

$$\Gamma = \frac{4\pi\alpha^2 f^2}{3M} \quad (8)$$

В нерелятивистском случае

$$\Gamma = \frac{\pi\alpha^2 f^2 v}{m} \quad (9)$$

Пороговое поведение $\sim v$ (9) характерно для рождения пары частиц в S волне: в матричном элементе можно положить $\vec{v}=0$, а фазовый объем дает множитель v .

% распад пси $\rightarrow e^+ e^-$

% -----

MASS Q1=M,Q2=M;MSHELL Q1,Q2;

LET Q1.Q2=M0**2/2-M**2; % M0 — масса пси

% средний квадрат матричного элемента, подразумевается f(пси)**2

INDEX L;MM:=TL(Q1,L,-Q2,L)*4*PI/(3*M0**2)\$REMIND L;

GAM:=MM/(2*M0)*PH2(M0,M,M);CLEAR MM; % ширина

$$\text{GAM} := \frac{16 \cdot \text{SQRT}(-4 \cdot M^2 + M0^2) \cdot \text{PI}^2 \cdot (2 \cdot M^2 + M0^2)}{3 \cdot M0^4}$$

SUB(M=0,GAM); % ультрарелятивистский предел

$$16 \cdot \text{PI}^2$$

$$3 \cdot M0$$

MV:=2*M/SQRT(1-V**2)\$GAM:=SUB(M0=MV,GAM); % V — скорость

$$4 \cdot \text{SQRT}(-V^2 + 1) \cdot V \cdot \text{PI}^2 \cdot (V^2 - 3)$$

$$\text{GAM} := \frac{4 \cdot \text{SQRT}(-V^2 + 1) \cdot V \cdot \text{PI}^2 \cdot (V^2 - 3)}{3 \cdot M}$$

NONREL(GAM); % нерелятивистский предел

$$4 \cdot V \cdot \text{PI}^2$$

$$M$$

Поляризационные эффекты. Пусть мезон имеет матрицу плотности $\rho_{ij} = e_i e_j^*$. Тогда вероятность распада, просуммированная по поляризациям e^+ , e^- , имеет вид

$$4\pi \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \rho_{ij} (A\delta_{ij} + Bn_i n_j) = \Gamma_{\parallel} |\vec{e} \cdot \vec{n}|^2 + \Gamma_{\perp} (1 - |\vec{e} \cdot \vec{n}|^2), \quad (10)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор в направлении движения e^- . Усреднение по поляризациям дает

$$\frac{\Gamma_{\parallel} + 2\Gamma_{\perp}}{3}. \quad (11)$$

Для получения 2 величин $\Gamma_{\parallel}$, $\Gamma_{\perp}$, полностью характеризующих угловое распределение, достаточно взять $\vec{e} \parallel \vec{n}$ и $\vec{e} \perp \vec{n}$.

Проведем вычисление в конкретном базисе n_0, n_1, n_2, n_3 , где n_0 — скорость ψ , n_1 — единичный вектор оси распада, а $n_{2,3}$ произвольны. В программе E1 и E2 обозначают e и e^* , или индексы i и j , по которым результат нужно свернуть с ρ_{ij} . Она получает

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{8\pi\alpha^2 f^2 m^2 \sqrt{M^2 - 4m^2}}{M^4} = \frac{\pi\alpha^2 f^2 v (1 - v^2)^{3/2}}{m},$$

$$\Gamma_{\perp} = \frac{2\pi\alpha^2 f^2 \sqrt{M^2 - 4m^2}}{M^2} = \frac{\pi\alpha^2 f^2 v (1 - v^2)^{1/2}}{m}. \quad (12)$$

В ультрарелятивистском случае

$$\Gamma_{\parallel} = 0, \quad \Gamma_{\perp} = \frac{2\pi\alpha^2 f^2}{M}. \quad (13)$$

Это следует из сохранения спиральности ультрарелятивистских фермионов: e^+ и e^- имеют противоположные спиральности, т. е. одинаковые проекции спина на ось распада. Проекция на нее орбитального момента равна 0. Поэтому мезон имеет проекцию момента на ось распада, равную ± 1 , т. е. поляризован перпендикулярно этой оси. В нерелятивистском случае угловое распределение изотропно:

$$\Gamma_{\parallel} = \Gamma_{\perp} = \frac{\pi\alpha^2 f^2 v}{m}. \quad (14)$$

```
% поляризационные эффекты
% -----
CLEAR Q1,Q2,Q1,Q2;
MASS N0=1,N1=1,N2=1,N3=1;MSHELL N0,N1,N2,N3;
LET N0.N1=0,N0.N2=0,N0.N3=0,N1.N2=0,N1.N3=0,N2.N3=0;
LET EPS(N3,N2,N1,N0)=1;
Q1:=M0/2*N0+SQRT(M0**2/4-M**2)*N1$
Q2:=M0/2*N0-SQRT(M0**2/4-M**2)*N1$
VECTOR E1,E2,A1,A2;
LET E1.N0=0,E2.N0=0,
    A1.N0=-SQRT(1-4*M**2/M0**2)*A1.N1,
    A2.N0=+SQRT(1-4*M**2/M0**2)*A2.N1;
MM:=-TL(Q1,A1,E1,-Q2,-A2,E2)*4*PI/(M0**2)$
GAM:=MM/(2*M0)*PH2(M0,M,M)$CLEAR MM;
GAM1:=SUB(A2=0*A2,GAM)$GAM0:=SUB(A1=0*A1,GAM1)$
GAML:=SUB(E1=N1,E2=N1,GAM0);

      8*SQRT(-4*M**2+M0**2)*M**2*PI
GAML := -----
      M0**4

LET E1.N1=0,E2.N1=0,E1.E2=-1;GAMT:=GAM0;CLEAR E1.N1,E2.N1,E1.E2;

      2*SQRT(-4*M**2+M0**2)*PI
GAMT := -----
      M0**2

SUB(M=0,GAML);SUB(M=0,GAMT); % ультрарелятивистский предел
```

```
0
2*PI
-----
M0
GAML:=SUB(M0=MV,GAML);GAMT:=SUB(M0=MV,GAMT);

      SQRT(-V**2+1)*V*PI*(V**2-1)
GAML := -----
      M

      SQRT(-V**2+1)*V*PI
GAMT := -----
      M

NONREL(GAML);NONREL(GAMT); % нерелятивистский предел

V*PI
-----
M
V*PI
-----
M

CLEAR GAM0,GAML,GAMT;
```

Найдем поляризацию e^- при распаде поляризованного ψ . Мы не будем рассматривать корреляцию поляризаций e^- и e^+ , поэтому можно положить $a_2=0$. Вектор поляризации a_1 выражается через продольную и поперечную поляризацию. Поскольку выбор осей 2 и 3 произволен, рассматривается только поляризация вдоль оси 2. Электрон поляризован только тогда, когда отлична от 0 циркулярная поляризация ψ $a_i = i\epsilon_{ijk}p_{jk}$, $\vec{a} = i\vec{e} \times \vec{e}^*$:

$$z_{\parallel} = \frac{a_{\parallel}}{1-|\vec{v} \cdot \vec{e}|^2}, \quad \vec{z}_{\perp} = \frac{\sqrt{1-v^2} \vec{a}_{\perp}}{1-|\vec{v} \cdot \vec{e}|^2}. \quad (15)$$

```
EL1:=SECOND(ORT((Q1.L,N0.L))); % продольная поляризация 1
EL1 := (-SQRT(-4*M**2+M0**2)*L.N1*M0+4*L.N0*M**2-L.N0*
      M0**2)/(2*SQRT(-4*M**2+M0**2)*M)
EL2:=SECOND(ORT((Q2.L,N0.L)))$ % продольная поляризация 2
```



```
CLEAR A1.N0,A2.N0;
GAM1:=EPOL(A1,Z(1,1)*E1+Z(1,2)*N2.L,GAM1)$
X:=POL(GAM1,1);CLEAR GAM1;
```

```
SIG0:=(4*SQRT(-4*M^2+M0^2)*PI*(4*N1.E2*N1.E1*M^2-N1.E2*
N1.E1*M0^2-E2.E1*M0^2))/M0^4
```

```
X:={-(EPS(N1,N0,E2,E1)*I*M0^2)/(4*N1.E2*N1.E1*M^2-N1.E2*
N1.E1*M0^2-E2.E1*M0^2),
-(2*EPS(N0,E2,E1,N2)*I*M*M0)/(4*N1.E2*N1.E1*M^2-N1.
E2*N1.E1*M0^2-E2.E1*M0^2),
0}
```

```
X:=FOR EACH W IN X COLLECT SUB(M0=MV,W);
```

```
EPS(N1,N0,E2,E1)*I
X:={-----,
N1.E2*N1.E1*V^2+E2.E1
SQRT(-V^2+1)*EPS(N0,E2,E1,N2)*I
-----,
N1.E2*N1.E1*V^2+E2.E1
0}
```

```
CLEAR X;
```

Рассмотрим теперь обратный процесс $e^+e^- \rightarrow \psi$. Его сечение получается из $\Gamma(\psi \rightarrow e^+e^-)$ по формуле (I.1.13). Воспользовавшись свободой выбора осей 2 и 3, направим ось 2 по биссектрисе между векторами поперечной поляризации e^- и e^+ . Сечение, просуммированное по поляризациям ψ , равно

$$\sigma = 8\pi^3 \alpha^2 f^2 \frac{M^2 + 2m^2 + (M^2 - 2m^2) z_{\parallel}^1 z_{\parallel}^2 - 2m^2 \bar{z}_{\perp}^1 \cdot \bar{z}_{\perp}^2}{M^4 \sqrt{M^4 - 4m^2}} \delta(\sqrt{s} - M). \quad (16)$$

В ультрарелятивистском случае

$$\sigma = \frac{8\pi^3 \alpha^2 f^2 (1 + z_{\parallel}^1 z_{\parallel}^2)}{M^3 \delta(\sqrt{s} - M)}, \quad (17)$$

что естественно, т. к. аннигилируют только e^- и e^+ с противоположными спиральностями. В нерелятивистском случае

$$\sigma = \frac{\pi^3 \alpha^2 f^2 (3 - \bar{z}^1 \cdot \bar{z}^2)}{2m^3 v} \delta(\sqrt{s} - M). \quad (18)$$

Это объясняется тем, что аннигиляция происходит только из состояния с нулевым орбитальным моментом и суммарным спином $S=1$.

Программа получает также матрицу плотности ψ . Это же выражение дает матрицу плотности γ^* в процессе $e^+e^- \rightarrow \gamma^*$. Не будем переписывать из распечатки довольно громоздкое общее выражение. В ультрарелятивистском случае

$$\rho = \frac{1}{2(1 + z_{\parallel}^1 z_{\parallel}^2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + z_{\parallel}^1 z_{\parallel}^2 + z_{\perp}^1 z_{\perp}^2 & -i(z_{\parallel}^1 + z_{\parallel}^2) \\ 0 & i(z_{\parallel}^1 + z_{\parallel}^2) & 1 + z_{\parallel}^1 z_{\parallel}^2 - z_{\perp}^1 z_{\perp}^2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Из сохранения спиральности следует, что рождаются только ψ с проекцией спина на ось 1, равной ± 1 , т. е. матрица плотности имеет только компоненты 2, 3. Продольные поляризации e^- и e^+ приводят к циркулярной поляризации мезона; поперечные дают линейную поляризацию по оси 2 с вероятностью $(1 + z_{\perp}^1 z_{\perp}^2)/2$ и по оси 3 с вероятностью $(1 - z_{\perp}^1 z_{\perp}^2)/2$. Этот факт использовался в [2] п.7.

% сечение — подразумевается DELTA(SQRT(S) - M0)

```
SIG:=2*PI**2/(M0**2/4-M**2)/4*GAM$CLEAR GAM;
```

```
LET COS(F)**2=(1+COS(2*F))/2,SIN(F)**2=(1-COS(2*F))/2,
```

```
COS(F)*SIN(F)=SIN(2*F)/2;
```

```
SIG:=EPOL(A1,Z(1,1)*E1+Z(1,2)*(COS(F)*N2.L+SIN(F)*N3.L),SIG)$
```

```
SIG:=EPOL(A2,Z(2,1)*E2+Z(2,2)*(COS(F)*N2.L-SIN(F)*N3.L),SIG)$
```

```
CLEAR E1.N0,E2.N0;
```

```
LET E1.E2=-N1.E1*N1.E2-N2.E1*N2.E2-N3.E1*N3.E2;
```

```
SIG:=SIG$CLEAR E1.E2;INDEX E1,E2;SIG0:=-E1.E2*SIG;REIND E1,E2;
```

```
SIG0:=- (16*Z(2,2)*Z(1,2)*COS(2*F)*M^2*PI^3 + 8*Z(2,1)*Z(1,
```

```
1)*PI^3*(2*M^2-M0^2) + 8*PI^3*(-2*M^2-M0^2))/
```

```
SQRT(-4*M^2+M0^2)*M0^4)
```

```
SUB(M=0,SIG0);SUB(M0=MV,SIG0);NONREL(WS);
```

```
8*Z(2,1)*Z(1,1)*PI^3 + 8*PI^3
```

M0^3

$$\begin{aligned}
& - (\text{SQRT}(-V^2 + 1) * Z(2,2) * Z(1,2) * \text{COS}(2 * F) * \text{PI}^3 * (V^4 - 2 * V^2 + \\
& \quad 1) + \text{SQRT}(-V^2 + 1) * Z(2,1) * Z(1,1) * \text{PI}^3 * (V^4 - 1) + \\
& \quad \text{SQRT}(-V^2 + 1) * \text{PI}^3 * (-V^4 + 4 * V^2 - 3)) / (2 * M^3 * V) \\
& \quad \frac{Z(2,2) * Z(1,2) * \text{COS}(2 * F) * \text{PI}^3 - Z(2,1) * Z(1,1) * \text{PI}^3 - 3 * \text{PI}^3}{2 * M^3 * V}
\end{aligned}$$

MATRIX RO(3,3),R1,R2;

R1:=MAT((N1.E1,N2.E1,N3.E1))\$R2:=MAT((N1.E2,N2.E2,N3.E2))\$

INDEX E1,E2;

FOR I:=1:3 DO FOR J:=1:3 DO

RO(I,J):=SIG*R1(I,I)*R2(1,J)/SIG0;

CLEAR SIG,SIG0;

D:=-2*DEN(RO(1,1));

$$D := - 2 * (2 * Z(2,2) * Z(1,2) * \text{COS}(2 * F) * M^2 + Z(2,1) * Z(1,1) * (2 * M^2 - M_0^2) - M_0^2) - 2 * M^2 - M_0^2$$

D*RO;

$$\text{MAT}(1,1) := - 2 * (2 * Z(2,2) * Z(1,2) * \text{COS}(2 * F) * M^2 + 2 * Z(2,1) * Z(1,1) * M^2 - 2 * M^2)$$

$$\text{MAT}(1,2) := - 2 * (Z(2,2) * Z(1,1) * \text{COS}(F) * M * M_0 - Z(2,2) * \text{SIN}(F) * I * M * M_0 - Z(2,1) * Z(1,2) * \text{COS}(F) * M * M_0 - Z(1,2) * \text{SIN}(F) * I * M * M_0)$$

$$\text{MAT}(1,3) := 2 * (Z(2,2) * Z(1,1) * \text{SIN}(F) * M * M_0 + Z(2,2) * \text{COS}(F) * I * M * M_0 + Z(2,1) * Z(1,2) * \text{SIN}(F) * M * M_0 - Z(1,2) * \text{COS}(F) * I * M * M_0)$$

$$\text{MAT}(2,1) := - 2 * (Z(2,2) * Z(1,1) * \text{COS}(F) * M * M_0 + Z(2,2) * \text{SIN}(F) * 2 * M * M_0 - Z(2,1) * Z(1,2) * \text{COS}(F) * M * M_0 + Z(1,2) * \text{SIN}(F) * I * M * M_0)$$

$$\text{MAT}(2,2) := Z(2,2) * Z(1,2) * M_0^2 + Z(2,1) * Z(1,1) * M_0^2 + M_0^2$$

$$\text{MAT}(2,3) := - (Z(2,1) * I * M_0^2 + Z(1,1) * I * M_0^2)$$

$$\text{MAT}(3,1) := 2 * (Z(2,2) * Z(1,1) * \text{SIN}(F) * M * M_0 - Z(2,2) * \text{COS}(F) * I * M * M_0 + Z(2,1) * Z(1,2) * \text{SIN}(F) * M * M_0 + Z(1,2) * \text{COS}(F) * I * M * M_0)$$

$$\text{MAT}(3,2) := Z(2,1) * I * M_0^2 + Z(1,1) * I * M_0^2$$

$$\text{MAT}(3,3) := - (Z(2,2) * Z(1,2) * M_0^2 - Z(2,1) * Z(1,1) * M_0^2 - M_0^2)$$

M:=0\$RO;CLEAR M;

MAT(1,1) := 0

MAT(1,2) := 0

MAT(1,3) := 0

MAT(2,1) := 0

$$\text{MAT}(2,2) := \frac{Z(2,2) * Z(1,2) + Z(2,1) * Z(1,1) + 1}{2 * Z(2,1) * Z(1,1) + 2}$$

$$\text{MAT}(2,3) := - \frac{Z(2,1) * I + Z(1,1) * I}{2 * Z(2,1) * Z(1,1) + 2}$$

MAT(3,1) := 0

$$\text{MAT}(3,2) := \frac{Z(2,1) * I + Z(1,1) * I}{2 * Z(2,1) * Z(1,1) + 2}$$

$$\text{MAT}(3,3) := - \frac{Z(2,2) * Z(1,2) - Z(2,1) * Z(1,1) - 1}{2 * Z(2,1) * Z(1,1) + 2}$$

Рассеяние пиона во внешнем поле. Вершина взаимодействия заряженного пиона (или любого другого бесспинового мезона) с фотоном имеет вид $V_\mu = e[F(q^2)p_\mu + F_-(q^2)q_\mu]$, $p = p_1 + p_2$, $q = p_1 - p_2$. Сохранение тока $V_\mu q_\mu = 0$ приводит к $F_-(q^2) = 0$. В программе вводится мезонный тензор $T_{\mu\nu}^M(p_1, p_2)$, аналогичный $T_{\mu\nu}^I$ (в нем подразумевается αF^2). Сечение равно

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{4\pi\alpha^2 F^2(t)\rho^2(t)\epsilon^2}{t^2(\epsilon^2 - m^2)} \quad (20)$$

В системе покоя

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 F^2 \rho^2 \epsilon^2}{4(\epsilon^2 - m^2)^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{\alpha^2 F^2 \rho^2 (1 - v^2)}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (21)$$

В ультрарелятивистском случае

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 F^2 \rho^2}{4\epsilon^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (22)$$

В нерелятивистском случае получается формула Резерфорда (4) (с добавлением F^2).

```
% рассеяние пиона во внешнем поле
% -----
FOR ALL K1,K2,P LET V(K1,K2,P) = (K1+K2).P; % вершина
% мезонный тензор — подразумевается альфа*формфактор**2
OPERATOR TM;FOR ALL K1,E1,K2,E2 LET TM(K1,E1,K2,E2) =
  4*PI*V(K1,K2,E1)*V(K1,K2,E2);
TM(P1,P2-P1,P2,E2); % проверим тождество Уорда
0
ON GCD;MM:=TM(P1,N,P2,N)*4*PI/T**2$
SIG:=MM/(16*PI*(E**2-M**2));CLEAR MM; % d сигма / d t
```

```
4*E**2*PI
SIG := -----
      T**2*(E**2 - M**2)
```

```
SIG:=SUB(T=TRF,SIG)*RF; % d сигма / d омега
      E**2
```

```
SIG := -----
      4*S**4*(E**4 - 2*E**2*M**2 + M**4)
```

```
SUB(M=0,SIG); % ультрарелятивистский предел
```

```
1
-----
4*E**2*S**4
```

```
SIG:=SUB(E=EV,SIG); % V — скорость
```

```
      V**2 - 1
SIG := - -----
      4*M**2*S**4*V**4
```

```
NONREL(SIG);CLEAR SIG; % нерелятивистский предел
```

```
1
-----
4*M**2*S**4*V**4
```

Распад $\psi \rightarrow \pi^+ \pi^-$. Распад через сильное взаимодействие подав-

лен из-за несохранения G четности, и главным является электромагнитный механизм (рис. 2). Кроме того, те же формулы с заменой $f \rightarrow M$ относятся и к распаду $\gamma^* \rightarrow \pi^+ \pi^-$. Программа получает

$$\Gamma = \frac{\Gamma_{\parallel}}{3} = \frac{\pi \alpha^2 f^2 F^2 (M^2 - 4m^2)^{3/2}}{3M^4} = \frac{\pi \alpha^2 f^2 F^2 v^3 (1 - v^2)^{1/2}}{6m}, \quad \Gamma_{\perp} = 0. \quad (23)$$

В ультрарелятивистском случае

$$\Gamma = \frac{\pi \alpha^2 f^2 F^2}{3M}, \quad (24)$$

что (при $F=1$) в 4 раза меньше вероятности распада на $e^+ e^-$ (8). В нерелятивистском случае

$$\Gamma = \frac{\pi \alpha^2 f^2 F^2 v^3}{6m}. \quad (25)$$

Вектор поляризации $\vec{\psi}$ мезона $\vec{e}$ должен линейно входить в матричный элемент M . Единственный вектор, на который он может умножиться, это скорость π^+ мезона $\vec{v}$: $M \sim \vec{e} \cdot \vec{v}$. Поэтому отлично от 0 только $\Gamma_{\parallel}$. При $v \rightarrow 0$ вероятность распада Γ содержит v^2 из $|M|^2$ и v из фазового объема, т. е. $\Gamma \sim v^3$ (25). Такое пороговое поведение характерно для всех процессов рождения пары частиц в P волне.

```
% распад пси -> пи + пи -
% -----
% подразумевается f(пси)**2*формфактор**2
INDEX L;MM:=-TM(Q1,L,-Q2,L)*4*PI/(3*M0**2)$REMLND L;
GAM:=MM/(2*M0)*PH2(M0,M,M);CLEAR MM; % ширина
      SQRT(-4*M**2 + M0**2)*PI*(4*M**2 - M0**2)
```

```
GAM := - -----
      3*M0**4
```

```
SUB(M=0,GAM); % ультрарелятивистский предел
```

```
PI
```

```
-----
3*M0
```

```
GAM:=SUB(M0=MV,GAM); % V — скорость
```

```
      SQRT(-V**2 + 1)*V**3*PI
```

```
GAM := -----
      6*M
```


NONREL(GAM);CLEAR GAM; % нерелятивистский предел

V³*PI

6*M

LET Q2.EE=-Q1.EE;MM:=TM(Q1.EE,-Q2.EE)/(M0**2)\$

GAM:=MM/(2*M0)*PH2(M0,M,M);CLEAR MM;

GAM :=
$$\frac{\text{SQRT}(-4*M^2 + M0^2)*EE.Q1^2}{M0^4}$$

GAML:=SUB(EE=(Q1-Q2)/SQRT(-(Q1-Q2)*(Q1-Q2)),GAM);

GAML :=
$$\frac{16*M^4 - 8*M^2*M0^2 + M0^4}{4*\text{SQRT}(-4*M^2 + M0^2)*M0^4}$$

LET EE.Q1=0;GAMT:=GAM;CLEAR EE.Q1,GAM,GAML,GAMT;OFF GCD;

GAMT:=0

Рассеяние протона во внешнем поле. Вершина взаимодействия протона (или любого другого бариона со спином 1/2) с фотоном $V_\mu = e\bar{u}_2\Gamma_\mu u_1$, где Γ_μ может быть разложена по базисным матрицам. Все структуры, содержащие $\hat{p}_1$ или $\hat{p}_2$, с помощью коммутации и уравнения Дирака сводятся к выражениям с меньшим числом матриц. В результате останутся 3 структуры: $p_\mu = (p_1 + p_2)_\mu$, $q_\mu = (p_1 - p_2)_\mu$ и γ_μ . Вторая из них запрещена сохранением тока $V_\mu q_\mu = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu &= -F_2 \frac{p_\mu}{2m} + (F_1 + F_2) \gamma_\mu = F_1 \gamma_\mu + F_2 \frac{\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m} = \\ &= F_1 \frac{p_\mu}{2m} + (F_1 + F_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m}\end{aligned}\quad (26)$$

(поскольку $\sigma_{\mu\nu} q_\nu / 2m = \gamma_\mu - p_\nu / 2m$ в обкладках $\bar{u}_2 \dots u_1$). Здесь в первой форме записи $-F_2$ отвечает заряду (как у пиона), а $F_1 + F_2$ — заряду с нормальным (дираковским) магнитным моментом (как у электрона); во второй F_1 отвечает заряду с нормальным магнитным моментом, а F_2 — аномальному магнитному моменту; в третьей F_1 отвечает заряду, а $F_1 + F_2$ — магнитному моменту.

Как мы увидим, более удобным оказывается другой выбор формфакторов

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu &= (F_e - F_m) \frac{2mp_\mu}{p^2} + F_m \gamma_\mu = \frac{4m^2 F_e - q^2 F_m}{p^2} \gamma_\mu + (F_e - F_m) \frac{2m\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{p^2} = \\ &= \left(F_e - \frac{q^2}{4m^2} F_m\right) \frac{2mp_\mu}{p^2} - F_m \frac{\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m},\end{aligned}\quad (27)$$

т. к. они не интерферируют в сечении.

Программа вычисляет барионный тензор $T_{\mu\nu}^B(p_1, p_2)$. Видно, что при выборе формфакторов (27) в нем действительно отсутствует интерференционный член $F_e F_m$. Сечение равно

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi \alpha^2 p^2(t) \frac{16m^2 e^2 F_e^2(t) - t[4(e^2 - m^2) + t] F_m^2(t)}{t^2(e^2 - m^2)(4m^2 - t)}.\quad (28)$$

В системе покоя

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 p^2 (1 - v^2) \frac{(1 - v^2) F_e^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \theta v^4 F_m^2}{4m^2 v^4 \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - v^2 \cos^2 \frac{\theta}{2})}.\quad (29)$$

В ультрарелятивистском случае работает только магнитный формфактор

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 p^2 F_m^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4e^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}},\quad (30)$$

а в нерелятивистском — электрический

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 p^2 F_e^2}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}.\quad (31)$$

(это сечение получается из формулы Резерфорда (4) домножением на F_e^2).

% рассеяние протона во внешнем поле

% -----

% вершина $G = F_m/F_e$ подразумевается Fe

FACTOR G;NOSPUR F;VECTOR P,Q;P:=K1+K2\$Q:=P1-P2\$

(1-G)*2*M/P.P*P.L+G*G(F,L)\$

FOR ALL L,K1,K2 SAVEAS V(L,K1,K2);CLEAR P,Q;SPUR F;

OPERATOR TB; % барионный тензор — подразумевается альфа**2*Fe**2
4*4*PI*R(K2)*V(E2,K1,K2)*R(K1)*V(E1,K1,K2);

$$- (8*G^2*PI*(E2.E1*K2.K1^3 + E2.E1*K2.K1^2*K1.K1 - E2.E1*K2.K1 * K1.K1^2 - E2.E1*K1.K1^3 + E2.K2*E1.K2*K2.K1*K1 . K1 + E2.K2*E1.K2*K1.K1^2 - E2.K2*E1.K1*K2.K1^2 - E2.K2*E1.K1*K2.K1*K1.K1 - E2.K1*E1.K2* K2.K1^2 - E2.K1*E1.K2*K2.K1*K1.K1 + E2.K1*E1. K1*K2.K1*K1.K1 + E2.K1*E1.K1*K1.K1^2) - (8*K1. K1*PI)*(E2.K2*E1.K2*K2.K1 + E2.K2*E1.K2*K1.K1 + E2. K2*E1.K1*K2.K1 + E2.K2*E1.K1*K1.K1 + E2.K1*E1.K2*K2. K1 + E2.K1*E1.K2*K1.K1 + E2.K1*E1.K1*K2.K1 + E2.K1*E1 . K1*K1.K1))/(K2.K1 + K1.K1)$$

FOR ALL K1,E1,K2,E2 SAVEAS TB(K1,E1,K2,E2);

TB(P1,P2-P1,P2,E2); % проверим тождество Уорда

0

ON GCD;MM:=TB(P1,N,P2,N)*4*PI/(2*T**2)\$

SIG:=MM/(16*PI*(E**2-M**2));CLEAR MM; % d сигма / d t

$$SIG := - \frac{G^2*T*PI*(4*E^2 - 4*M^2 + T) - 16*E^2*M^2*PI}{T^2*(4*E^2*M^2 - E^2*T - 4*M^4 + M^2*T)}$$

SIG:=SUB(T=TRF,SIG)*RF; % d сигма / d omega

$$SIG := - (G^2*S^2*(E^4*S^2 - E^4 - 2*E^2*M^2*S^2 + 2*E^2*M^2 + M^4*S^2 - M^4) - E^2*M^2)/(4*S^4*(E^6*S^2 - 3*E^4*M^2*S^2 + E^4 * M^2 + 3*E^2*M^4*S^2 - 2*E^2*M^4 - M^6*S^2 + M^6))$$

SUB(M=0,SIG);SUB(E=EV,SIG);NONREL(WS);CLEAR SIG;OFF GCD;

$$- \frac{G^2*(S^2 - 1)}{4*E^2*S^4}$$

$$G^2*S^2*V^4*(S^2*V^2 - S^2 - V^2 + 1) + V^4 - 2*V^2 + 1$$

$$4*M^2*S^4*V^4*(S^2*V^2 - V^2 + 1)$$

1

$$4*M^2*S^4*V^4$$

Поляризационные эффекты. Барионный тензор с учетом поляризаций не распечатан из-за своей громоздкости. В нем есть и интерференционные члены $F_e F_m$. Поляризация поперек плоскости рассеяния не меняется. Остальные компоненты даются формулами

$$z_1^2 = \frac{az_2^1 + bz_2^1}{c}, \quad z_2^2 = \frac{-bz_2^1 + az_2^1}{c},$$

$$a = F_e^2 (1 - v^2) \left(\cos \vartheta - v^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) + F_e F_m v^2 (1 - v^2) \sin^2 \vartheta - \frac{1}{4} F_m^2 v^4 \sin^2 \vartheta \left(\cos \vartheta - v^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right), \quad (32)$$

$$b = \sqrt{1 - v^2} \sin \vartheta \left[F_e - F_m v^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \left[F_e (1 - v^2) + F_m v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right],$$

$$c = \left[F_e^2 (1 - v^2) + \frac{1}{4} F_m^2 v^4 \sin^2 \vartheta \right] \left(1 - v^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right).$$

В случае $F_e = F_m$, когда вершина (27) $\sim \gamma_\mu$, формула (32) сводится к (6).

% поляризационные эффекты

% -----

LET P1.A1=0,P2.A2=0;

% барионный тензор с поляризацией

4*4*PI*R(K2,A2)*V(E2,K1,K2)*R(K1,A1)*V(E1,K1,K2)\$

FOR ALL K1,A1,E1,K2,A2,E2 SAVEAS TB(K1,A1,E1,K2,A2,E2);

TB(P1,A1,P2-P1,P2,A2,E2); % проверим тождество Уорда

0

ON GCD;MM:=TB(P1,A1,N,P2,A2,N)*4*PI/(4*T**2)\$

SIG:=MM/(16*PI*(E**2-M**2))\$CLEAR MM; % 2 pi d сигма / d t d phi

CLEAR P1.A1;SIG:=EPOL(A1,FOR I:=1:3 SUM Z(P1,I)*EP1(I),SIG)\$

CLEAR P2.A2;SIG:=EPOL(A2,FOR I:=1:3 SUM Z(P2,I)*EP2(I),SIG)\$

X:=POL(SIG,P2)\$CLEAR SIG;

$$\text{SIG0} := - \frac{G^2 * T * \text{PI} * (4 * E^2 - 4 * M^2 + T) - 16 * E^2 * M^2 * \text{PI}}{T^2 * (4 * E^2 * M^2 - E^2 * T - 4 * M^4 + M^2 * T)}$$

```

X:=FOR EACH W IN X COLLECT SUB(T=TRF,W)$
FOR EACH W IN X COLLECT SUB(M=0,W);
{Z(P1,1),Z(P1,2),Z(P1,3)}
X:=FOR EACH W IN X COLLECT SUB(E=EV,W)$
% попробуем записать результат покрасивее
THIRD(X);
Z(P1,3)
X1:=FIRST(X)$D:=-DEN(X1)$X1:=D*X1$X2:=D*SECOND(X)$CLEAR X;
A:=DF(X1,Z(P1,1))$B:=DF(X1,Z(P1,2))$
DF(X2,Z(P1,1))+B;DF(X2,Z(P1,2))-A;CLEAR X1,X2;
0
0

```

ON FACTOR;B;CLEAR B;OFF FACTOR;

$$2 * \text{SQRT}(-V^2 + 1) * \text{SQRT}(-S^2 + 1) * (G * S^2 * V^2 - G * V^2 + 1) * (G * S^2 * V^2 - V^2 + 1) * S$$

AA:=COEFF(A,G)\$CLEAR A,A1,A2;

LET G**2=X,S**2=Y,V**2=Z;

% без этих подстановок факторизация не получается

A1:=FIRST(AA)\$A2:=SECOND(AA)\$A3:=THIRD(AA)\$CLEAR AA;D:=D\$

ON FACTOR;A1;A2;A3;D;CLEAR A1,A2,A3,D;

$$- (Y * Z - 2 * Y - Z + 1) * (Z - 1)$$

$$4 * Z * (Y - 1) * (Z - 1) * Y$$

$$Z^2 * (Y * Z - 2 * Y - Z + 1) * (Y - 1) * Y$$

$$- (X * Y^2 * Z^2 - X * Y * Z^2 + Z - 1) * (Y * Z - Z + 1)$$

Распад $\gamma^* \rightarrow p\bar{p}$. Распад $\psi \rightarrow p\bar{p}$ происходит в основном за счет сильного взаимодействия, поэтому мы сразу будем рассматривать распад $\gamma^* \rightarrow p\bar{p}$. Программа получает

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{8\pi\alpha^2 m^2 F_e^2 \sqrt{M^2 - 4m^2}}{M^6}, \quad \Gamma_{\perp} = \frac{2\pi\alpha^2 F_m^2 \sqrt{M^2 - 4m^2}}{M^4}, \quad \Gamma = \frac{\Gamma_{\parallel} + 2\Gamma_{\perp}}{3} \quad (33)$$

Формфакторы фактически специально выбраны так, что F_e описывает распад на $p\bar{p}$ с проекцией спина 0, а $F_m = \pm 1$. В ультрарелятивистском случае

$$\Gamma_{\parallel} = 0, \quad \Gamma_{\perp} = \frac{2\pi\alpha^2 F_m^2}{M^3}, \quad (34)$$

а в нерелятивистском

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\pi\alpha^2 F_e^2 v}{4m^3}, \quad \Gamma_{\perp} = \frac{\pi\alpha^2 F_m^2 v}{4m^3}. \quad (35)$$

% распад гамма* -> p анти-p

% -----

INDEX L;ON GCD;MM:=TB(Q1,L,-Q2,L)*4*PI/(3*M0**4)\$REIND L;

GAM:=MM/(2*M0)*PH2(M0,M,M);CLEAR MM; % ширина

$$\text{GAM} := \frac{4 * \text{SQRT}(-4 * M^2 + M0^2) * \text{PI} * (G^2 * M0^2 + 2 * M^2)}{3 * M0^6}$$

LET Q2.EE=-Q1.EE;MM:=TB(Q1,EE,-Q2,EE)*4*PI/(M0**4)\$

GAM1:=-MM/(2*M0)*PH2(M0,M,M)\$CLEAR MM;

GAML:=SUB(EE=(Q1-Q2)/SQRT(-(Q1-Q2)*(Q1-Q2)),GAM1);

$$\text{GAML} := \frac{8 * M^2 * \text{PI} * (4 * M^2 - M0^2)}{\text{SQRT}(-4 * M^2 + M0^2) * M0^6}$$

LET EE.Q1=0;GAMT:=GAM1;CLEAR EE.Q1;

$$\text{GAMT} := \frac{2 * \text{SQRT}(-4 * M^2 + M0^2) * G^2 * \text{PI}}{M0^4}$$

SUB(M=0,GAML);SUB(M=0,GAMT);

0

$$2 * G^2 * \text{PI}$$

$$M0^3$$

GAML:=SUB(M0=MV,GAML)\$GAMT:=SUB(M0=MV,GAMT)\$

NONREL(GAML);NONREL(GAMT);CLEAR GAM,GAM1,GAML,GAMT;OFF GCD;

V*PI

4*M³

G²*V*PI

4*M³

2. РАССЕЙЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

$e\mu \rightarrow e\mu$, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Этот параграф посвящен процессам рассеяния заряженных частиц друг на друге. В большинстве случаев для вычисления квадрированных диаграмм достаточно знания тензоров $T_{\mu\nu}^I$, $T_{\mu\nu}^M$, $T_{\mu\nu}^B$, вычисленных в предыдущем параграфе. Мы будем использовать в программах операторы и процедуры этого параграфа, а также пакет КРАСК (1.1).

Простейшим из этих процессов является рассеяние различных заряженных лептонов друг на друге, например, $e\mu \rightarrow e\mu$ (рис. 3). Один или оба из этих лептонов могут быть на самом деле античастицами. То же сечение применимы для рассеяния заряженных лептонов на кварках, нужно только умножить его на z_q^2 .

Квадрат матричного элемента рис. 3 равен свертке двух тензоров $T_{\mu\nu}^I$, деленной на t^2 (из фотонных пропагаторов) и на 4 (усреднение по начальным поляризациям). Дифференциальное сечение считается по формуле (1.1.21):

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2\pi\alpha^2 \frac{s^2 + (s+t)^2 - 4(m_1^2 + m_2^2)s + 2(m_1^2 + m_2^2)^2}{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]t^2} \xrightarrow{m_1, m_2 \rightarrow 0} 2\pi\alpha^2 \frac{s^2 + u^2}{s^2 t^2}. \quad (1)$$

Нетрудно найти $d\sigma/dt$ в системе покоя второй частицы, и проверить, что когда ее масса велика, оно переходит в сечение рассеяния в кулоновском поле (1.1) ($\rho=1$). Обозначив энергию, переданную второй частице в ее системе покоя, через $m_2\Delta$, получим

$$\frac{d\sigma}{d\Delta} = \pi\alpha^2 \frac{2\varepsilon_1^2 - (m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\varepsilon_1)\Delta + m_2^2\Delta^2}{m_2^2(\varepsilon_1^2 - m_1^2)\Delta^2}. \quad (2)$$

При $m_1 \rightarrow \infty$ эта формула переходит в (1.5) ($\rho=1$).

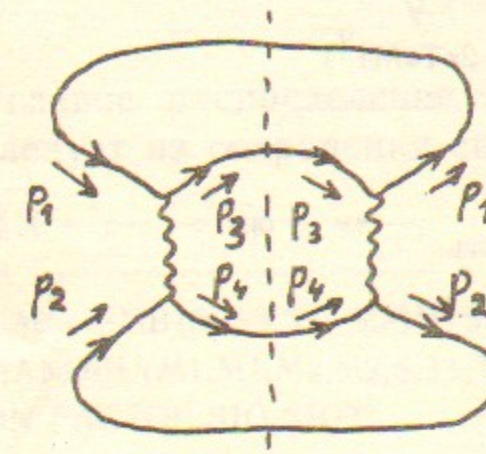


Рис. 3. $e\mu \rightarrow e\mu$.

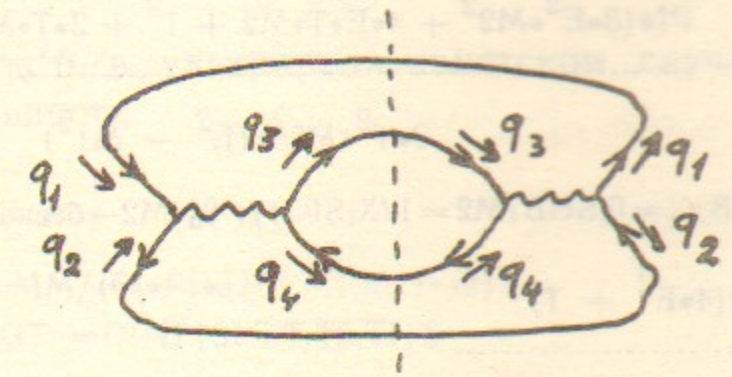


Рис. 4. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

% e- мю- -> e- мю-

% -----

MASS P1=M1,P2=M2,P3=M1,P4=M2;MSHELL P1,P2,P3,P4;

LET P1.P2=(S-M1**2-M2**2)/2,P3.P4=(S-M1**2-M2**2)/2,

P1.P3=M1**2-T/2,P2.P4=M2**2-T/2,

P1.P4=(S+T-M1**2-M2**2)/2,P2.P3=(S+T-M1**2-M2**2)/2;

ON GCD;INDEX L1,L2;MM:=TL(P1,L1,P3,L2)*TL(P2,L1,P4,L2)/4/T**2\$

REMINDE L1,L2;ON FACTOR;

SIG:=MM/(64*PI*JJ(S,M1,M2)**2); % d сигма / d t

$$\text{SIG} := \frac{(2*(2*S^2 + 2*S*T - 4*S*M2^2 - 4*S*M1^2 + T^2 + 2*M2^4 + 4*M2^2*M1^2 + 2*M1^4)*PI)/((S - M2^2 + 2*M2*M1 - M1^2)*(S - M2^2 - 2*M2*M1 - M1^2)*T^2)}{(S - M2^2)^2*T^2}$$

SUB(M1=0,SIG);SUB(M2=0,WS);OFF FACTOR; % M1->0 M2->0

$$\frac{2*(2*S^2 + 2*S*T - 4*S*M2^2 + T^2 + 2*M2^4)*PI}{(S - M2^2)^2*T^2}$$

$$\frac{2*(2*S^2 + 2*S*T + T^2)*PI}{S^2*T^2}$$

% система покоя 2

SR2:=M2**2+2*M2*E+M1**2\$SIG:=SUB(S=SR2,SIG);

SIG :=

$$\frac{\text{PI}*(8*\text{E}^2*\text{M2}^2 + 4*\text{E}*\text{T}*\text{M2} + \text{T}^2 + 2*\text{T}*\text{M2}^2 + 2*\text{T}*\text{M1}^2)}{2*\text{T}^2*\text{M2}^2*(\text{E}^2 - \text{M1}^2)}$$

SUB(X=0, SUB(M2=1/X, SIG)); % M2 → бесконечность

$$\frac{\text{PI}*(4*\text{E}^2 + \text{T})}{\text{T}^2*(\text{E}^2 - \text{M1}^2)}$$

$$\text{TR2} := -2*\text{M2}**2*\text{D}\$ \text{R2} := 2*\text{M2}**2\$$$

SIG := SUB(T=TR2, SIG)*R2; % d сигма / d дельта

SIG :=

$$\frac{\text{PI}*(\text{D}^2*\text{M2}^2 - 2*\text{D}*\text{E}*\text{M2} - \text{D}*\text{M2}^2 - \text{D}*\text{M1}^2 + 2*\text{E}^2)}{\text{D}^2*\text{M2}^2*(\text{E}^2 - \text{M1}^2)}$$

% M1 → бесконечность

SUB(X=0, SUB(M1=1/X, SUB(E=M1/SQRT(1-V**2), SIG))); CLEAR SIG;

$$\frac{\text{PI}*(\text{D}*V^2 - \text{D} + 2)}{\text{D}^2*V^2*\text{M2}}$$

$$\text{D}^2*V^2*\text{M2}$$

Квадрат матричного элемента процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (рис. 4) получается заменой $s \leftrightarrow t$. Это же сечение с добавлением z_q^2 и соответствующих цветовых множителей (см. главу по КХД) относится к процессам $l^+l^- \leftrightarrow q\bar{q}$. Дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2\pi\alpha^2 \frac{(s+t)^2 + t^2 - 4(m_1^2 + m_2^2)t + 2(m_1^2 + m_2^2)^2}{s^3(s-4m_1^2)} \xrightarrow{m_1, m_2 \rightarrow 0} 2\pi\alpha^2 \frac{t^2 + u^2}{s^4}. \quad (3)$$

Полное сечение

$$\sigma = \frac{4}{3} \pi\alpha^2 \frac{(s+2m_1^2)(s+2m_2^2)}{s^3} \sqrt{\frac{s-4m_2^2}{s-4m_1^2}} \xrightarrow{m_1, m_2 \rightarrow 0} \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (4)$$

В системе центра масс

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s^3} |s(s+4m_1^2+4m_2^2) + (s-4m_1^2)(s-4m_2^2) \cos^2 \theta| \times$$

$$\times \sqrt{\frac{s-4m_2^2}{s-4m_1^2}} \xrightarrow{m_1, m_2 \rightarrow 0} \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta). \quad (5)$$

Угловое распределение $1 + \cos^2 \theta$ в ультрарелятивистском случае следует из сохранения спиральности.

% e+ e- → мю+ мю-

% -----

MM:=SUB(S=T,T=S,MM)\$SIG:=MM/(64*PI*JJ(S,M1,M1)**2)\$

MANDEL(M1,M1,M2,M2,S,T1,T2)\$SIGT:=DINT(SIG,T,T2,T1)\$

ON FACTOR;SIG;SIGT;

$$\frac{(2*(S^2 + 2*S*T + 2*T^2 - 4*T*M2^2 - 4*T*M1^2 + 2*M2^4 + 4*M2^2*M1^2 + 2*M1^4)*PI)/((S - 4*M1^2)*S^3)}{(4*SQRT(S^2 - 4*S*M2^2 - 4*S*M1^2 + 16*M2^2*M1^2)*(S + 2*M2^2)*(S + 2*M1^2)*PI)/(3*(S - 4*M1^2)*S^3)}$$

$$\text{SIG0} := \text{SUB}(M1=0, \text{SIG}); \text{SIGT0} := \text{SUB}(M1=0, \text{SIGT});$$

$$\text{SIG0} := \frac{2*(S^2 + 2*S*T + 2*T^2 - 4*T*M2^2 + 2*M2^4)*PI}{S^4}$$

$$\text{SIGT0} := \frac{4*SQRT(S^2 - 4*S*M2^2)*(S + 2*M2^2)*PI}{3*S^3}$$

$$\text{SUB}(M2=0, \text{SIG0}); \text{SUB}(M2=0, \text{SIGT0}); \text{CLEAR SIG0, SIGT0};$$

$$\frac{2*(S^2 + 2*S*T + 2*T^2)*PI}{S^4}$$

$$\frac{4*PI}{3*S}$$

$$\frac{2*(S^2 + 2*S*T + 2*T^2)*PI}{S^4}$$

$$\frac{4*PI}{3*S}$$

% система центра масс

PICM:=SQRT(S/4-M1**2)\$P2CM:=SQRT(S/4-M2**2)\$

TCM:=-PICM**2-P2CM**2+2*PICM*P2CM*C\$CM:=PICM*P2CM/PI\$

SIGCM:=SUB(T=TCM, SIG)*CM; % d сигма / d омега

$$\text{SIGCM} := (\text{SQRT}(S - 4*M1^2)*\text{SQRT}(S - 4*M2^2)*(C^2*S^2 - 4*C^2*S*M2^2 - 4*C^2*S*M1^2 + 16*C^2*M2^2*M1^2 + S^2 + 4*S*M2^2 + 4*S*M1^2))/(4*(S - 4*M1^2)*S^3)$$

$$\text{SUB}(M1=0, \text{SIGCM}); \text{SUB}(M2=0, \text{WS});$$

$$\text{SQRT}(S)*\text{SQRT}(S - 4*M2^2)*(C^2*S - 4*C^2*M2^2 + S + 4*M2^2)$$

$$4*S^3$$

$$C^2 + 1$$

$$4*S$$

ел $\rightarrow$ ел, $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$. Дифференциальное сечение ел $\rightarrow$ ел

$$\frac{d\sigma}{dt} = 4\pi\alpha^2 F_\pi^2(t) \times \frac{s(s+t) - m_1^2(2s+t) - 2m_2^2s + (m_1^2 + m_2^2)^2}{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]t^2} \xrightarrow{m_1, m_2 \rightarrow 0} 4\pi\alpha^2 F_\pi^2(t) \frac{-u}{s^2}. \quad (6)$$

Если масса лептона или мезона велика, то сечение в системе покоя тяжелой частицы переходит в сечение рассеяния легкой частицы в кулоновском поле (1.1) или (1.20).

% е пи $\rightarrow$ е пи

% -----

$$\text{MM} := \text{TL}(P1, L1, P3, L2)*\text{TM}(P2, L1, P4, L2)/2/T**2S$$

$$\text{ON FACTOR}; \text{SIG} := \text{MM}/(64*\text{PI}*J(S, M1, M2)**2); \% \text{ d сигма / d t}$$

$$\text{SIG} := (4*(S^2 + S*T - 2*S*M2^2 - 2*S*M1^2 - T*M1^2 + M2^4 + 2*M2^2*M1^2 + M1^4)*\text{PI})/((S - M2^2 + 2*M2*M1 - M1^2)*(S - M2^2 - 2*M2*M1 - M1^2)*T^2)$$

$$\text{SUB}(M1=0, \text{SIG}); \text{SUB}(M2=0, \text{SIG}); \text{SUB}(M1=0, \text{WS}); \text{OFF FACTOR};$$

$$4*(S^2 + S*T - 2*S*M2^2 + M2^4)*\text{PI}$$

$$(S - M2^2)^2*T^2$$

$$4*(S + T - M1^2)*\text{PI}$$

$$(S - M1^2)*T^2$$

$$4*(S + T)*\text{PI}$$

$$S*T^2$$

$$\text{SUB}(S=\text{SR2}, \text{SIG}); \text{SUB}(X=0, \text{SUB}(M2=1/X, \text{WS}));$$

$$\text{PI}*(4*E^2*M2 + 2*E*T + T*M2)$$

$$T^2*M2*(E^2 - M1^2)$$

$$\text{PI}*(4*E^2 + T)$$

$$T^2*(E^2 - M1^2)$$

$$\text{SR1} := M1**2 + 2*M1*E + M2**2\$ \text{SUB}(S=\text{SR1}, \text{SIG}); \text{SUB}(X=0, \text{SUB}(M1=1/X, \text{WS}));$$

$$\text{PI}*(4*E^2*M1^2 + 2*E*T*M1 + T*M2^2)$$

$$T^2*M1^2*(E^2 - M2^2)$$

$$4*E^2*\text{PI}$$

$$T^2*(E^2 - M2^2)$$

$$\text{CLEAR SIG};$$

Дифференциальное сечение $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2\pi\alpha^2 F_\pi^2(s) \times$$

$$\times \frac{-t(s+t) + m_1^2(2t-s) + 2m_2^2t + (m_1^2 + m_2^2)^2}{s^3(s-4m_1^2)} \xrightarrow{m_1, m_2 \rightarrow 0} 2\pi\alpha^2 F_\pi^2(s) \frac{tu}{s^4}. \quad (7)$$

Полное сечение

$$\sigma = \pi\alpha^2 F_\pi^2(s) \frac{(s+2m_1^2)(s-4m_2^2)^{3/2}}{3s^3(s-4m_1^2)^{1/2}} \xrightarrow{m_1, m_2 \rightarrow 0} \frac{\pi\alpha^2 F_\pi^2(s)}{3s}. \quad (8)$$

В системе центра масс

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 F_n^2(s) \frac{s - (s - 4m_1^2) \cos^2 \theta}{8s^3} \frac{(s - 4m_2^2)^{3/2}}{(s - 4m_1^2)^{1/2}} \xrightarrow{m_1, m_2 \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 F_n^2(s) \sin^2 \theta}{8s} \quad (9)$$

Угловое распределение $\sin^2 \theta$ в случае ультрарелятивистских электронов объясняется сохранением спиральности.

% e+ e- → пи+ пи-

% -----

MM: = - SUB(S=T, T=S, MM)/2\$SIG: = MM/(64*PI*JJ(S, M1, M1)**2)\$

SIGT: = DINT(SIG, T, T2, T1)\$

ON FACTOR; SIG; SIGT;

$$- (2*(S*T - S*M1^2 + T^2 - 2*T*M2^2 - 2*T*M1^2 + M2^4 + 2*M2^2*M1^2 + M1^4)*PI)/((S - 4*M1^2)*S^3) \\ (SQRT(S^2 - 4*S*M2^2 - 4*S*M1^2 + 16*M2^2*M1^2)*(S - 4*M2^2)*(S + 2*M1^2)*PI)/(3*(S - 4*M1^2)*S^3)$$

SIG0: = SUB(M1=0, SIG); SIGT0: = SUB(M1=0, SIGT);

$$SIG0 := - \frac{2*(S*T + T^2 - 2*T*M2^2 + M2^4)*PI}{S^4}$$

$$SIGT0 := \frac{SQRT(S^2 - 4*S*M2^2)*(S - 4*M2^2)*PI}{3*S^3}$$

SUB(M2=0, SIG0); SUB(M2=0, SIGT0); CLEAR SIG0, SIGT0, SIGT;

$$- \frac{2*(S + T)*T*PI}{S^4}$$

PI

3*S

% система центра масс

SIGCM: = SUB(T=TCM, SIG)*CM;

$$SIGCM := - (SQRT(S - 4*M1^2)*SQRT(S - 4*M2^2)*(C^2*S - 4*C^2*M1^2 - S)*(S - 4*M2^2))/(8*(S - 4*M1^2)*S^3)$$

SUB(M1=0, SIGCM); SUB(M2=0, WS);

$$- \frac{SQRT(S)*SQRT(S - 4*M2^2)*(C + 1)*(C - 1)*(S - 4*M2^2)}{8*S^3} \\ - \frac{(C + 1)*(C - 1)}{8*S}$$

CLEAR SIG, SIGCM;

ер → ер, e⁺e⁻ → рр̄. Дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2\pi\alpha^2 \{ F_m^2(t)(-t)[s^2 + (s+t)^2 - 4m_1^2s - 4m_2^2(s+t) + 2(m_1^2 - m_2^2)^2] + \\ + 8F_e^2(t)m_2^2[s(s+t) - m_1^2(2s+t) - 2m_2^2s + (m_1^2 + m_2^2)^2] \} / [s - (m_1 + m_2)^2] \times \\ \times [s - (m_1 - m_2)^2] (4m_2^2 - t) t^2. \quad (10)$$

При большой массе протона оно переходит в сечение рассеяния электрона во внешнем поле (1.1) с $\rho = F_e$.

% ер → ер

% -----

INDEX L1, L2; MM: = TL(P1, L1, P3, L2)*TB(P2, L1, P4, L2)/4/T**2\$

REIND L1, L2; SIG: = MM/(64*PI*JJ(S, M1, M2)**2)\$ % d сигма / d t

SIGN: = NUM(SIG)\$SIGD: = DEN(SIG)\$

FACTOR G; SIGN; SUB(M1=0, SIGN); REMFAC G; CLEAR SIGN;

$$2*G^2*T*PI*(2*S^2 + 2*S*T - 4*S*M2^2 - 4*S*M1^2 + T^2 - 4*T*M2^2 + 2*M2^4 - 4*M2^2*M1^2 + 2*M1^4) + 16*PI*M2^2*(-S^2 - S*T + 2*S*M2^2 + 2*S*M1^2 + T*M1^2 - M2^4 - 2*M2^2*M1^2 - M1^4) \\ 2*G^2*T*PI*(2*S^2 + 2*S*T - 4*S*M2^2 + T^2 - 4*T*M2^2 + 2*M2^4) + 16*PI*M2^2*(-S^2 - S*T + 2*S*M2^2 - M2^4)$$

ON FACTOR; SIGD; SUB(M1=0, SIGD); OFF FACTOR; CLEAR SIGD;

$$(S - M2^2 + 2*M2*M1 - M1^2)*(S - M2^2 - 2*M2*M1 - M1^2)*(T - 4*M2^2)*T^2 \\ (S - M2^2)^2*(T - 4*M2^2)*T^2$$

SUB(M1=0,M2=0,SIG);

$$\frac{2 \cdot G^2 \cdot \text{PI} \cdot (2 \cdot S^2 + 2 \cdot S \cdot T + T^2)}{S^2 \cdot T^2}$$

% система покоя 2

SIG:=SUB(S=SR2,SIG)\$

SUB(X=0,SUB(M2=1/X,SIG)); % M2 → бесконечность

$$\frac{\text{PI} \cdot (4 \cdot E^2 + T)}{T^2 \cdot (E^2 - M1^2)}$$

$$\text{PI} \cdot (4 \cdot E^2 + T)$$

CLEAR SIG;

Дифференциальное сечение $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2\pi\alpha^2 \times$$

$$\times \{ F_m^2(s) s [(s+t)^2 + t^2 - 4m_1^2 t - 4m_2^2 (s+t) + 2(m_1^2 - m_2^2)^2] + \\ + 8F_e^2(s) m_2^2 [-t(s+t) + m_1^2 (s+2t) + \\ + 2m_2^2 t - (m_1^2 + m_2^2)^2] \} / s^3 (s-4m_1^2)(s-4m_2^2). \quad (11)$$

Полное сечение

$$\sigma = 4\pi\alpha^2 \frac{(s+2m_1^2) [F_m^2(s) s + 2F_e^2(s) m_2^2]}{3s^3} \sqrt{\frac{s-4m_2^2}{s-4m_1^2}}. \quad (12)$$

В системе центра масс

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s^3} \{ F_m^2(s) s [s + 4m_1^2 + (s-4m_1^2) \cos^2 \theta] + \\ + 4F_e^2(s) m_2^2 [s - (s-4m_1^2) \cos^2 \theta] \} \sqrt{\frac{s-4m_2^2}{s-4m_1^2}}. \quad (13)$$

% $e^+e^- \rightarrow p$ анти- p

% -----

MM:=SUB(S=T,T=S,MM)\$SIG:=MM/(64*PI*JJ(S,M1,M1)**2)\$

SIGT:=DINT(SIG,T,T2,T1)\$SIGN:=NUM(SIG)\$SIGD:=DEN(SIG)\$

FACTOR G;SIGN;SUB(M1=0,SIGN);REMFAC G;CLEAR SIGN;

$$2 \cdot G^2 \cdot S \cdot \text{PI} \cdot (S^2 + 2 \cdot S \cdot T - 4 \cdot S \cdot M2^2 + 2 \cdot T^2 - 4 \cdot T \cdot M2^2 - 4 \cdot T \cdot M1^2 +$$

$$2 \cdot M2^4 - 4 \cdot M2^2 \cdot M1^2 + 2 \cdot M1^4) + 16 \cdot \text{PI} \cdot M2^2 \cdot (-S \cdot T + \\ S \cdot M1^2 - T^2 + 2 \cdot T \cdot M2^2 + 2 \cdot T \cdot M1^2 - M2^4 - 2 \cdot M2^2 \cdot M1^2 - M1^4) \\ 2 \cdot G^2 \cdot S \cdot \text{PI} \cdot (S^2 + 2 \cdot S \cdot T - 4 \cdot S \cdot M2^2 + 2 \cdot T^2 - 4 \cdot T \cdot M2^2 + 2 \cdot M2^4) + \\ 16 \cdot \text{PI} \cdot M2^2 \cdot (-S \cdot T - T^2 + 2 \cdot T \cdot M2^2 - M2^4)$$

ON FACTOR;SIGD;SUB(M1=0,SIGD);CLEAR SIGD;

$$(S - 4 \cdot M2^2) \cdot (S - 4 \cdot M1^2) \cdot S^3$$

$$(S - 4 \cdot M2^2) \cdot S^4$$

SIGT;SUB(M1=0,SIGT);OFF FACTOR;

$$(4 \cdot \text{SQRT}(S^2 - 4 \cdot S \cdot M2^2 - 4 \cdot S \cdot M1^2 + 16 \cdot M2^2 \cdot M1^2) \cdot (G^2 \cdot S + 2 \cdot M2^2) \cdot \\ (S + 2 \cdot M1^2) \cdot \text{PI}) / (3 \cdot (S - 4 \cdot M1^2) \cdot S^3)$$

$$4 \cdot \text{SQRT}(S^2 - 4 \cdot S \cdot M2^2) \cdot (G^2 \cdot S + 2 \cdot M2^2) \cdot \text{PI}$$

$$3 \cdot S^3$$

SUB(M1=0,M2=0,SIG);SUB(M1=0,M2=0,SIGT);CLEAR SIGT;

$$2 \cdot G^2 \cdot \text{PI} \cdot (S^2 + 2 \cdot S \cdot T + 2 \cdot T^2)$$

$$S^4$$

$$4 \cdot G^2 \cdot \text{PI}$$

$$3 \cdot S$$

% система центра масс

SIG:=SUB(T=TCM,SIG)*CM\$SIGN:=NUM(SIG)\$SIGD:=DEN(SIG)\$

FACTOR G;FACTORIZE(SIGN);REMFAC G;CLEAR SIGN;

$$[G^2 \cdot S \cdot (C^2 \cdot S - 4 \cdot C^2 \cdot M1^2 + S + 4 \cdot M1^2) + 4 \cdot M2^2 \cdot (-C^2 \cdot S + 4 \cdot C^2 \cdot \\ M1^2 + S),$$

$$\text{SQRT}(S - 4 \cdot M1^2),$$

$$\text{SQRT}(S - 4 \cdot M2^2)]$$

ON FACTOR;SIGD;OFF FACTOR;CLEAR SIGD;

$$4*(S - 4*M1^2)*S^3$$

SUB(M1=0,M2=0,SIG);

$$G^2*(C^2 + 1)$$

4*S

CLEAR SIG;

$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$. Электрон-электронное рассеяние описывается 4 квадрированными диаграммами рис. 5. Диаграммы в, г получаются из а, б заменой $t \leftrightarrow u$. Прямая диаграмма рис. 5а

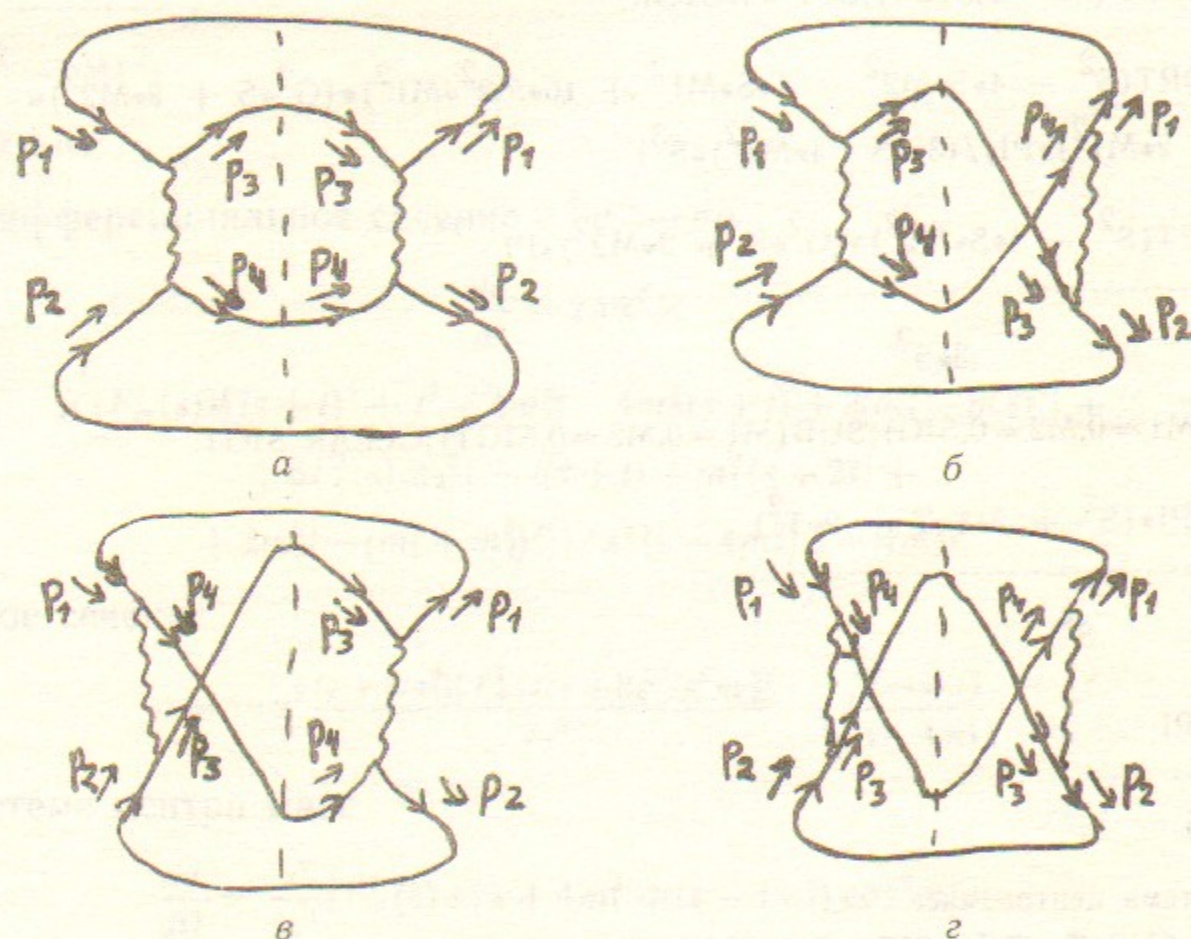


Рис. 5. $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$.

вычисляется путем свертки 2 тензоров $T'_{\mu\nu}$, как для $e\mu$ рассеяния. Обменная диаграмма рис. 5б отличается знаком, и вычисляется как один длинный шпур.

Масса электрона в программе принята за 1. Наиболее простую форму дифференциального сечения удалось получить при помощи процедуры ELFRAC [2]:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{4\pi\alpha^2}{s(s-4m^2)} \left[(s-2m^2)^2 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right) + \right.$$

$$+ 4 \frac{s-3m^2}{s-4m^2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{u} \right) + 1 \Big] \xrightarrow{m \rightarrow 0} \pi\alpha^2 \frac{(s^2+t^2+u^2)^2}{s^2t^2u^2}. \quad (14)$$

В системе центра масс (формула Меллера)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(1-v^2)}{4m^2v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[4(1+v^2)^2 - (3+6v^2-v^4) \sin^2 \frac{\theta}{2} + v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (15)$$

При $v \ll 1$ она переходит в формулу Мотта.

В системе покоя одного из электронов, выразим сечение через энергию налетающего электрона $m\gamma$ и передачу энергии $m\Delta$. При помощи процедуры ELFRAC получим

$$\frac{d\sigma}{d\Delta} = \frac{2\pi\alpha^2}{\gamma^2-1} \left[\gamma^2 \left(\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{(\gamma-1-\Delta)^2} \right) - \frac{2\gamma-1}{\gamma-1} \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\gamma-1-\Delta} \right) + 1 \right]. \quad (16)$$

Кинетические энергии электронов после рассеяния равны $m\Delta$ и $m(\gamma-1-\Delta)$. Вследствие тождественности электронов, формула (16) симметрична относительно замены $\Delta \leftrightarrow \gamma-1-\Delta$. Если считать электроном отдачи тот из них, который имеет меньшую энергию, то $\Delta_{\max} = (\gamma-1)/2$.

% $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$

% -----

MASS P1=1,P2=1,P3=1,P4=1;MSHELL P1,P2,P3,P4;

LET P1.P2=S/2-1,P3.P4=S/2-1,

P1.P3=1-T/2,P2.P4=1-T/2,

P1.P4=(S+T)/2-1,P2.P3=(S+T)/2-1;

U:=4-S-T\$OFF GCD;

INDEX L1,L2;MM1:=TL(P1,L1,P3,L2)*TL(P2,L1,P4,L2)/4/T**2;

$$32*PI^2*(2*S^2 + 2*S*T - 8*S + T^2 + 8)$$

$$MM1 := \frac{\quad}{T^2}$$

MM2:= -4*(4*PI)**2*

R(P4)*V(L1)*R(P1)*V(L2)*R(P3)*V(L1)*R(P2)*V(L2)/4/(T*U)\$

ON FACTOR;MM2;OFF FACTOR;

$$32*(S - 2)*(S - 6)*PI^2$$

$$(S + T - 4)*T$$

REMIND L1,L2;ON GCD;MM:=MM1+MM2\$MM:=MM+SUB(T=U,MM)\$


```

ON FACTOR;SIG:=MM/(64*PI*JJ(S,1,1)**2); % d сигма / d t
SIG := (4*(S4 + 2*S3*T - 12*S3 + 3*S2*T2 - 12*S2*T + 52*S2 +
        2*S*T3 - 12*S*T2 + 12*S*T - 96*S + T4 - 8*T3 +
        12*T2 + 16*T + 64)*PI)/((S + T - 4)2*(S - 4)*S*T2)
SUB(M=0,SUB(S=S/M**2,T=T/M**2,SIG)/M**4);OFF FACTOR; % m→0
4*(S2 + S*T + T2)2*PI
-----
(S + T)2*S2*T2
FACTOR FRAC;ELFRAC(SIG,T);ON FACTOR;DF(WS,FRAC(T,2));OFF FACTOR;
(4*FRAC(S + T - 4,2)*PI*(S3 - 8*S2 + 20*S - 16) + 16*FRAC(S
+ T - 4,1)*PI*(-S + 3) + 4*FRAC(T,2)*PI*(S3 - 8*S2 + 20*S
- 16) + 16*FRAC(T,1)*PI*(S - 3) + 4*PI*(S - 4))/(S*(S2
- 8*S + 16))
4*(S - 2)2*PI
-----
(S - 4)*S
% система центра масс
SCM:=4/(1-V**2)$TCM:=-2*V**2/(1-V**2)*(1-C)$
CM:=V**2/(1-V**2)/PI$
SIGCM:=SUB(S=SCM,T=TCM,SIG)*CM$ % d сигма / d омега
LET C**2=1-S**2;SIGCM:=SIGCM$CLEAR C**2;
ON FACTOR;SIGCM;OFF FACTOR;CLEAR SIGCM;
- ((S4*V4 + S2*V4 - 6*S2*V2 - 3*S2 + 4*V4 + 8*V2 + 4)*(V +
1)*(V - 1))/(4*S4*V4)
% система покоя 2
SR2:=2*(1+E)$TR2:=-2*D$R2:=2$
Sigr2:=SUB(S=SR2,T=TR2,SIG)*R2; % d сигма / d дельта
Sigr2 := (2*PI*(D4 - 2*D3*E + 2*D3 + 3*D2*E2 - 2*D*E3 + 3*D*
E - D + E4 - 2*E3 + E2))/(D2*(D2*E2 - D2 - 2
*D*E3 + 2*D*E2 + 2*D*E - 2*D + E4 - 2*E3 + 2*
E - 1))

```

```
OFF FACTOR;ELFRAC(Sigr2,D);CLEAR Sigr2,SIG;
```

```

(2*FRAC(D - E + 1,2)*E2*PI*(E - 1) + 2*FRAC(D - E + 1,1)*PI*
(2*E - 1) + 2*FRAC(D,2)*E2*PI*(E - 1) + 2*FRAC(D,1)*PI*(-
2*E + 1) + 2*PI*(E - 1))/(E3 - E2 - E + 1)

```

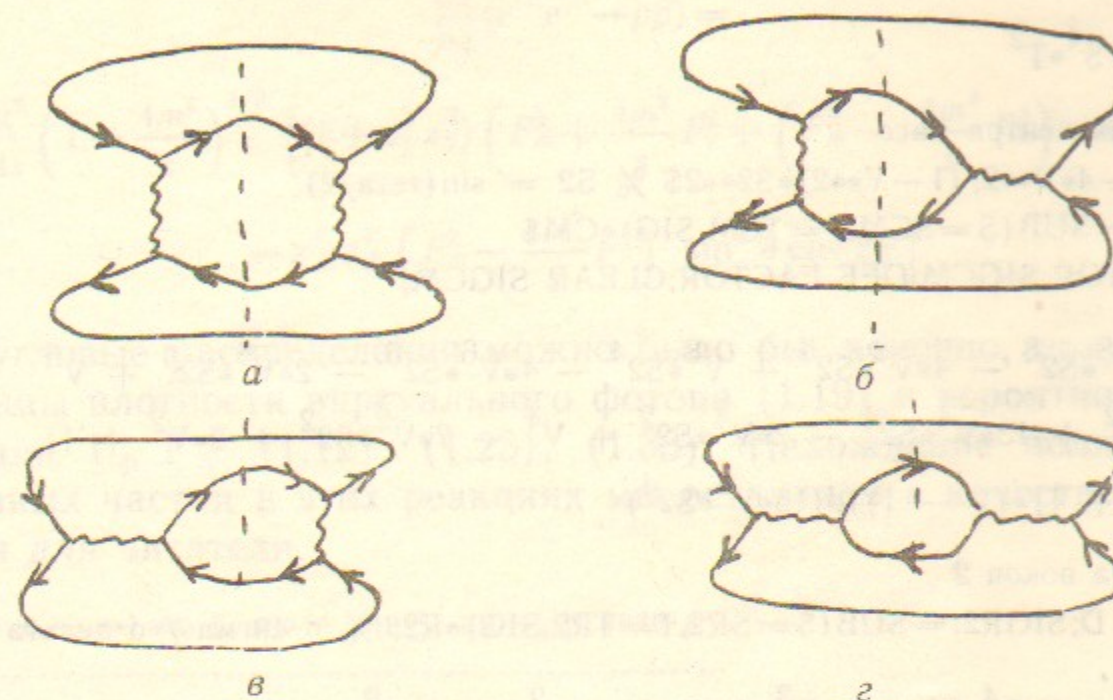


Рис. 6. $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$.

Рассеяние $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ (рис. 6) является *и* каналом той же реакции. В системе центра масс (формула Баба)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(1-v^2)}{16m^2v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[(1+v^2)^2 - (7+2v^2-v^4) v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + (13-2v^2+v^4) v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2} - 4(1+v^2)v^6 \sin^6 \frac{\theta}{2} + 4v^8 \sin^8 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (17)$$

В системе покоя электрона

$$\frac{d\sigma}{d\Delta} = \frac{2\pi\alpha^2}{(\gamma-1)(\gamma+1)^3\Delta^2} \times \\ \times [\gamma^2(\gamma+1)^2 - (2\gamma^2+4\gamma+1)(\gamma+1)\Delta + (3\gamma^2+6\gamma+4)\Delta^2 - 2\gamma\Delta^3 + \Delta^4]. \quad (18)$$

В этом случае может быть передана вся энергия, $\Delta_{\max} = \gamma - 1$.

% e+ e- → e+ e-

% -----

```
MM:=SUB(S=U,MM)$ON FACTOR;SIG:=MM/(64*PI*JJ(S,1,1)**2);
```

```

SIG := (4*(S4 + 2*S3*T - 4*S3 + 3*S2*T2 + 4*S2 + 2*S*T3 - 4*
41

```


$$\frac{S \cdot T + T^4 - 4 \cdot T^3 + 4 \cdot T^2 \cdot \pi / ((S - 4) \cdot S^3 \cdot T^2)}{4 \cdot (S^2 + S \cdot T + T^2)^2 \cdot \pi}$$

$$S^4 \cdot T^2$$

% система центра масс

TCM: = -4 * V ** 2 / (1 - V ** 2) * S2 ** 2 \$ % S2 = sin(тета/2)

SIGCM: = SUB(S = SCM, T = TCM, SIG) * CM \$

ON FACTOR; SIGCM; OFF FACTOR; CLEAR SIGCM;

$$- ((4 \cdot V^8 \cdot S2^8 - 4 \cdot V^8 \cdot S2^6 + V^8 \cdot S2^4 - 4 \cdot V^6 \cdot S2^6 - 2 \cdot V^6 \cdot S2^4 + V^6 \cdot S2^2 + 13 \cdot V^4 \cdot S2^4 - 2 \cdot V^4 \cdot S2^2 + V^4 - 7 \cdot V^2 \cdot S2^2 + 2 \cdot V^2 + 1) \cdot (V + 1) \cdot (V - 1)) / (16 \cdot V^4 \cdot S2^4)$$

% система покоя 2

FACTOR D; Sigr2: = SUB(S = SR2, T = TR2, SIG) * R2; % d сигма / d дельта

$$Sigr2 := (2 \cdot D^4 \cdot \pi - 4 \cdot D^3 \cdot E \cdot \pi + 2 \cdot D^2 \cdot \pi \cdot (3 \cdot E^2 + 6 \cdot E + 4) + 2 \cdot D \cdot \pi \cdot (-2 \cdot E^3 - 6 \cdot E^2 - 5 \cdot E - 1) + 2 \cdot E^2 \cdot \pi \cdot (E^2 + 2 \cdot E + 1)) / (D^2 \cdot (E^4 + 2 \cdot E^3 - 2 \cdot E - 1))$$

CLEAR Sigr2, SIG;

Задача 1. Найти угловые распределения в системе центра масс в реакциях $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, $\pi^+\pi^-$, $p\bar{p}$ с поляризованными e^+ , e^- .

Решение. Используем ортонормированный базис: N0 — единичный вектор вдоль суммарного импульса; N1 — пространственный вектор вдоль оси e^+e^- пучков; N2 — биссектриса между векторами поперечной поляризации e^+ и e^- (угол между ними обозначен ψ). Единичный вектор вдоль направления движения рассеянных частиц NN характеризуется углами θ , ϕ . Сечение вычисляется по формуле (1.1.20). Программа получает (при $m_e = 0$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{4s} \left(1 - \frac{4m^2}{s}\right)^{1/2} \left[(1 + z_{\parallel}^1 z_{\parallel}^2) \left(1 + \frac{4m^2}{s} + \left(1 - \frac{4m^2}{s}\right) \cos^2 \theta\right) - \right.$$

$$\left. - z_{\perp}^1 z_{\perp}^2 \left(1 - \frac{4m^2}{s}\right) \sin^2 \theta \cos 2\varphi \right] \quad (19)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-) = \frac{\alpha^2}{8s} F_{\pi}^2 \left(1 - \frac{4m^2}{s}\right)^{3/2} (1 + z_{\parallel}^1 z_{\parallel}^2 - z_{\perp}^1 z_{\perp}^2 \cos 2\varphi) \sin^2 \theta. \quad (20)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow p\bar{p}) =$$

$$= \frac{\alpha^2}{4s} \left(1 - \frac{4m^2}{s}\right)^{1/2} \left[(1 + z_{\parallel}^1 z_{\parallel}^2) \left(F_m^2 + \frac{4m^2}{s} F_e^2 + \left(F_m^2 - \frac{4m^2}{s} F_e^2\right) \cos^2 \theta\right) - \right.$$

$$\left. - z_{\perp}^1 z_{\perp}^2 \left(F_m^2 - \frac{4m^2}{s} F_e^2\right) \sin^2 \theta \cos 2\varphi \right] \quad (21)$$

Эти угловые распределения можно было бы, конечно, получить из матрицы плотности виртуального фотона (1.19) и вероятностей его распада $\Gamma_{\parallel}$, $\Gamma_{\perp}$ (1.12), (1.23), (1.33). Нахождение поляризаций конечных частиц в этих реакциях мы оставляем в качестве упражнения для читателя.

% $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, $\pi^+\pi^-$, p анти- p

%

V1: = SQRT(1 - 4 * M1 ** 2 / S) \$ V2: = SQRT(1 - 4 * M2 ** 2 / S) \$ % скорости

EE: = SQRT(S) / 2 \$ % энергия

% CT = cos(тета) ST = sin(тета)

% CF = cos(фи) SF = sin(фи)

VECTOR NN; NN: = CT * N1 + ST * (CF * N2 + SF * N3) \$

Q1: = EE * (N0 + V1 * N1) \$ Q2: = EE * (N0 - V1 * N1) \$

Q3: = EE * (N0 + V2 * NN) \$ Q4: = EE * (N0 - V2 * NN) \$

EL1: = - SECOND(ORT([Q1.L, Q2.L])); % продольная поляризация

$$EL1 := (\text{SQRT}(S - 4 \cdot M1^2) \cdot L \cdot N1 \cdot S + \text{SQRT}(S) \cdot L \cdot N0 \cdot S - 4 \cdot \text{SQRT}(S) \cdot L \cdot N0 \cdot M1^2) / (2 \cdot \text{SQRT}(S^2 - 4 \cdot S \cdot M1^2) \cdot M1)$$

EL2: = - SECOND(ORT([Q2.L, Q1.L])) \$

% CP = cos(пси/2) SP = sin(пси/2)

% Для удобства обозначены:

% $Z(1,1) \rightarrow 1$ $Z(1,2) \rightarrow Z^{**2}$ $Z(2,1) \rightarrow Z$ $Z(2,2) \rightarrow Z^{**2}$

% Поэтому можно использовать COEFF для выделения членов: без Z;

% $Z(1,1) \cdot Z(2,1)$; $Z(1,1) \cdot Z(2,2)$; $Z(1,2) \cdot Z(2,1)$; $Z(1,2) \cdot Z(2,2)$

B1: = EL1 + Z ** 2 * (CP * N2 + SP * N3) . L \$ B2: = Z * EL2 + Z ** 2 * (CP * N2 - SP * N3) . L \$

% C = cos(пси)

LET CP ** 2 = (1 + C) / 2, SP ** 2 = (1 - C) / 2, ST ** 2 = 1 - CT ** 2, SF ** 2 = 1 - CF ** 2;


```

LET A1.N0 = -V1*A1.N1, A2.N0 = V1*A2.N1; INDEX L1, L2;
SIG1 := TL(Q1, A1, L1, -Q2, -A2, L2) * TL(Q3, L2, -Q4, L1) / 4 / S ** 2
      * (V2 / V1) / ((8 * PI) ** 2 * S) $ % d sigma / d omega
CLEAR A1.N0; SIG1 := EPOL(A1, B1, SIG1) $
CLEAR A2.N0; SIG1 := EPOL(A2, B2, SIG1) $
ON FACTOR; COEFF(SIG1, Z); OFF FACTOR;

{ (SQRT(S - 4*M2^2) * (S^2 * CT^2 + S^2 - 4*S*CT^2*M2^2 - 4*S*CT^2*M1^2 +
  4*S*M2^2 + 4*S*M1^2 + 16*CT^2*M2^2*M1^2)) / (4*SQRT(S - 4*M1^2)
  ) * S^3,
  (SQRT(S - 4*M2^2) * (S^2 * CT^2 + S^2 - 4*S*CT^2*M2^2 + 4*S*CT^2*M1^2 +
  4*S*M2^2 - 4*S*M1^2 - 16*CT^2*M2^2*M1^2)) / (4*SQRT(S - 4*M1^2)
  ) * S^3,
  - (SQRT(S - 4*M2^2) * SQRT(S^2 - 4*S*M1^2) * (S - 4*M2^2) * (CP*CF -
  SP*SF) * ST*CT*M1) / ((S - 4*M1^2) * S^3),
  (SQRT(S - 4*M2^2) * SQRT(S^2 - 4*S*M1^2) * (S - 4*M2^2) * (CP*CF + SP
  *SF) * ST*CT*M1) / ((S - 4*M1^2) * S^3),
  (SQRT(S - 4*M2^2) * (4*C*S*CT^2*M1^2 - 4*C*S*M1^2 - 16*C*CT^2*M2^2 *
  M1^2 + 2*S^2*CF^2*CT^2 - 2*S^2*CF^2 - S^2*CT^2 + S^2 - 8*S*CF^2 *
  CT^2*M2^2 + 8*S*CF^2*M2^2 + 4*S*CT^2*M2^2 - 4*S*M2^2)) / (4*SQRT
  (S - 4*M1^2) * S^3) }

SIG1 := SUB(M1=0, SIG1) $ ON FACTOR; COEFF(SIG1, Z); OFF FACTOR;

SQRT(S - 4*M2^2) * (S*CT^2 + S - 4*CT^2*M2^2 + 4*M2^2)
{-----,
  4*SQRT(S) * S^2
  SQRT(S - 4*M2^2) * (S*CT^2 + S - 4*CT^2*M2^2 + 4*M2^2)
  -----,
  4*SQRT(S) * S^2
0,
0,
SQRT(S - 4*M2^2) * (S - 4*M2^2) * (2*CF^2 - 1) * (CT + 1) * (CT - 1)
-----}
4*SQRT(S) * S^2

```

```

SIG1 := SUB(M2=0, SIG1) $ ON FACTOR; COEFF(SIG1, Z); OFF FACTOR;

```

```

CT^2 + 1
{-----,
  4*S
  CT^2 + 1
  -----,
  4*S
0,
0,
(2*CF^2 - 1) * (CT + 1) * (CT - 1)
-----}
4*S

CLEAR SIG1;

LET A1.N0 = -V1*A1.N1, A2.N0 = V1*A2.N1;
SIG2 := TL(Q1, A1, L1, -Q2, -A2, L2) * TM(Q3, L2, -Q4, L1) / 4 / S ** 2
      * (V2 / V1) / ((8 * PI) ** 2 * S) $
CLEAR A1.N0; SIG2 := EPOL(A1, B1, SIG2) $
CLEAR A2.N0; SIG2 := EPOL(A2, B2, SIG2) $
ON FACTOR; COEFF(SIG2, Z); OFF FACTOR;

SQRT(S - 4*M2^2) * (S*CT^2 - S - 4*CT^2*M1^2) * (S - 4*M2^2)
{-----,
  8*SQRT(S - 4*M1^2) * S^3
  SQRT(S - 4*M2^2) * (S*CT^2 - S + 4*CT^2*M1^2) * (S - 4*M2^2)
  -----,
  8*SQRT(S - 4*M1^2) * S^3
  - (SQRT(S - 4*M2^2) * SQRT(S^2 - 4*S*M1^2) * (S - 4*M2^2) * (CP*CF -
  SP*SF) * ST*CT*M1) / (2 * (S - 4*M1^2) * S^3),
  (SQRT(S - 4*M2^2) * SQRT(S^2 - 4*S*M1^2) * (S - 4*M2^2) * (CP*CF + SP
  *SF) * ST*CT*M1) / (2 * (S - 4*M1^2) * S^3),
  (SQRT(S - 4*M2^2) * (4*C*CT^2*M1^2 + 2*S*CF^2*CT^2 - 2*S*CF^2 - S *
  CT^2 + S) * (S - 4*M2^2)) / (8*SQRT(S - 4*M1^2) * S^3) }

```


SIG2:=SUB(M1=0,SIG2)\$ON FACTOR;COEFF(SIG2,Z);OFF FACTOR;

$$\frac{\sqrt{S-4M_2^2} \cdot (S-4M_2^2) \cdot (CT+1) \cdot (CT-1)}{8\sqrt{S} \cdot S^2}$$

$$\frac{\sqrt{S-4M_2^2} \cdot (S-4M_2^2) \cdot (CT+1) \cdot (CT-1)}{8\sqrt{S} \cdot S^2}$$

0,
0,

$$\frac{\sqrt{S-4M_2^2} \cdot (S-4M_2^2) \cdot (2CF^2-1) \cdot (CT+1) \cdot (CT-1)}{8\sqrt{S} \cdot S^2}$$

SIG2:=SUB(M2=0,SIG2)\$ON FACTOR;COEFF(SIG2,Z);OFF FACTOR;

$$\frac{(CT+1) \cdot (CT-1)}{8S}$$

$$\frac{(CT+1) \cdot (CT-1)}{8S}$$

0,
0,

$$\frac{(2CF^2-1) \cdot (CT+1) \cdot (CT-1)}{8S}$$

CLEAR SIG2;

LET A1.N0=-V1*A1.N1,A2.N0=V1*A2.N1;

SIG3:=TL(Q1,A1,L1,-Q2,-A2,L2)*TB(Q3,L2,-Q4,L1)/4/S**2
*(V2/V1)/((8*PI)**2*S)\$

CLEAR A1.N0;SIG3:=EPOL(A1,B1,SIG3)\$

CLEAR A2.N0;SIG3:=EPOL(A2,B2,SIG3)\$

ON FACTOR;COEFF(SIG3,Z);OFF FACTOR;

$$\frac{((\sqrt{S-4M_2^2}) \cdot (G^2 \cdot S^2 \cdot CT^2 + G^2 \cdot S^2 - 4G^2 \cdot S \cdot CT^2 \cdot M_1^2 + 4G^2 \cdot S \cdot M_1^2 - 4S \cdot CT^2 \cdot M_2^2 + 4S \cdot M_2^2 + 16CT^2 \cdot M_2^2 \cdot M_1^2)) / (4 \cdot \sqrt{S-4M_1^2} \cdot S^3),$$

$$(\sqrt{S-4M_2^2}) \cdot (G^2 \cdot S^2 \cdot CT^2 + G^2 \cdot S^2 + 4G^2 \cdot S \cdot CT^2 \cdot M_1^2 - 4G^2 \cdot S \cdot M_1^2 - 4S \cdot CT^2 \cdot M_2^2 + 4S \cdot M_2^2 - 16CT^2 \cdot M_2^2 \cdot M_1^2)) / (4 \cdot \sqrt{S-4M_1^2} \cdot S^3),$$

$$- (\sqrt{S-4M_2^2}) \cdot \sqrt{S^2-4S \cdot M_1^2} \cdot (G^2 \cdot S - 4M_2^2) \cdot (CP \cdot CF - SP \cdot SF) \cdot ST \cdot CT \cdot M_1 / ((S-4M_1^2) \cdot S^3),$$

$$(\sqrt{S-4M_2^2}) \cdot \sqrt{S^2-4S \cdot M_1^2} \cdot (G^2 \cdot S - 4M_2^2) \cdot (CP \cdot CF + SP \cdot SF) \cdot ST \cdot CT \cdot M_1 / ((S-4M_1^2) \cdot S^3),$$

$$(\sqrt{S-4M_2^2}) \cdot (4C \cdot G^2 \cdot S \cdot CT^2 \cdot M_1^2 - 4C \cdot G^2 \cdot S \cdot M_1^2 - 16C \cdot CT^2 \cdot M_2^2 \cdot M_1^2 + 2G^2 \cdot S^2 \cdot CF^2 \cdot CT^2 - 2G^2 \cdot S^2 \cdot CF^2 - G^2 \cdot S^2 \cdot CT^2 + G^2 \cdot S^2 - 8S \cdot CF^2 \cdot CT^2 \cdot M_2^2 + 8S \cdot CF^2 \cdot M_2^2 + 4S \cdot CT^2 \cdot M_2^2 - 4S \cdot M_2^2) / (4 \cdot \sqrt{S-4M_1^2} \cdot S^3))$$

SIG3:=SUB(M1=0,SIG3)\$ON FACTOR;COEFF(SIG3,Z);OFF FACTOR;

$$\sqrt{S-4M_2^2} \cdot (G^2 \cdot S \cdot CT^2 + G^2 \cdot S - 4CT^2 \cdot M_2^2 + 4M_2^2)$$

$$4\sqrt{S} \cdot S^2$$

$$\sqrt{S-4M_2^2} \cdot (G^2 \cdot S \cdot CT^2 + G^2 \cdot S - 4CT^2 \cdot M_2^2 + 4M_2^2)$$

$$4\sqrt{S} \cdot S^2$$

0,

0,

$$(\sqrt{S-4M_2^2}) \cdot (G^2 \cdot S - 4M_2^2) \cdot (2CF^2-1) \cdot (CT+1) \cdot (CT-1) / (4\sqrt{S} \cdot S^2))$$

SIG3:=SUB(M2=0,SIG3)\$ON FACTOR;COEFF(SIG3,Z);OFF FACTOR;

$$\left\{ \frac{(CT^2 + 1) * G^2}{4 * S}, \right.$$

$$\left. \frac{(CT^2 + 1) * G^2}{4 * S}, \right.$$

$$0,$$

$$0,$$

$$\left. \frac{(2 * CF^2 - 1) * (CT + 1) * (CT - 1) * G^2}{4 * S} \right\}$$

CLEAR SIG3;

Задача 2. Найти сечение рассеяния поляризованных e и μ .

Решение. Сечение имеет вид $d\sigma/dt = d\sigma_0/dt + P_{ij}z^i z^j$, где $d\sigma_0/dt$ и матрица P найдены в программе. Для двух часто встречающихся корней введены обозначения SQ1 и SQ2. В ультрарелятивистском случае

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2\pi\alpha^2 \frac{s^2 + u^2 + z^i z^j (s^2 - u^2)}{s^2 t^2}.$$

Нахождение поляризации конечных частиц, а также рассмотрение $e\mu$ и $e\mu$ рассеяния, мы оставляем в качестве упражнения для читателя.

```
% e- мю- -> e- мю-
% -----
LET P1.A1=0,P2.A2=0;ON GCD;INDEX L1,L2;
MM:=TL(P1,A1,L1,P3,0*A1,L2)*TL(P2,A2,L1,P4,0*A1,L2)/4/T**2$
REMIND L1,L2;SIG:=MM/(64*PI*JJ(S,M1,M2)**2)$
ARRAY EP1(3),EP2(3);
ET:=EPS(P1,P2,P3,L)$INDEX L:X:=ET**2$REMIND L;
EP1(3):=EP2(3):=ET/SQRT(-X)$CLEAR X,ET;
X:=ORT((P1.L,P2.L,P3.L))$EP1(1):=-SECOND(X)$EP1(2):=THIRD(X)$
SQRT1:=SQRT(-S*T*(S+T-2*(M1**2+M2**2))-T*(M1**2-M2**2)**2)$
SQRT2:=SQRT(S**2-2*S*(M1**2+M2**2)+(M1**2-M2**2)**2)$
EP1(1):=EP1(1)*SQRT2/SQ2;
```

```
EP1(1):=- (2*L.P2*M1^2 - L.PI*S + L.PI*M2^2 + L.PI*M1^2)/(
SQ2*M1)
EP1(2):=EP1(2)*SQRT1/SQ1*SQRT2/SQ2;
EP1(2):= (L.P2*S*T - L.P2*T*M2^2 + L.P2*T*M1^2 - L.PI*S^2 - L.
PI*S*T + 2*L.PI*S*M2^2 + 2*L.PI*S*M1^2 - L.PI*T*M2^2
+ L.PI*T*M1^2 - L.PI*M2^4 + 2*L.PI*M2^2*M1^2 - L.PI*
M1^4 + L.P3*S^2 - 2*L.P3*S*M2^2 - 2*L.P3*S*M1^2 + L.
P3*M2^4 - 2*L.P3*M2^2*M1^2 + L.P3*M1^4)/(SQ1*SQ2)
EP1(3):=EP1(3)*SQRT1/SQ1;
2*EPS(L,P2,P1,P3)
EP1(3):=-----
SQ1
```

```
X:=ORT((P2.L,P1.L,P3.L))$
EP2(1):=-SECOND(X)$EP2(2):=-THIRD(X)$CLEAR X;
EP2(1):=EP2(1)*SQRT2/SQ2$
EP2(2):=EP2(2)*SQRT1/SQ1*SQRT2/SQ2$
EP2(3):=EP2(3)*SQRT1/SQ1$
CLEAR P1.A1;SIG:=EPOL(A1,FOR I:=1:3 SUM Z(P1,I)*EP1(I),SIG)$
CLEAR P2.A2;SIG:=EPOL(A2,FOR I:=1:3 SUM Z(P2,I)*EP2(I),SIG)$
P4:=P1+P2-P3$SIG:=SIG*SQRT2**2/SQ2**2$ON FACTOR;MATRIX PL(3,3);
FOR I:=1:3 DO FOR J:=1:3 DO
WRITE PL(I,J):=DF(SIG,Z(P1,I),Z(P2,J));
```

$$PL(1,1) := - (2*(2*S^3 + S^2*T - 6*S^2*M2^2 - 6*S^2*M1^2 + 6*S*M2^4 + 4*S*M2^2*M1^2 + 6*S*M1^4 - T*M2^4 + 2*T*M2^2*M1^2 - T*M1^4 - 2*M2^6 + 2*M2^4*M1^2 + 2*M2^2*M1^4 - 2*M1^6)*PI)/(T*SQ2^4)$$

$$PL(1,2) := (4*(S^2 + S*T - 2*S*M2^2 - 2*S*M1^2 + M2^4 - 2*M2^2*M1^2 + M1^4)*(S - M2^2 + M1^2)*PI*M2)/(SQ1*SQ2^4)$$

$$PL(1,3) := 0$$

$$PL(2,1) := (4*(S^2 + S*T - 2*S*M2^2 - 2*S*M1^2 + M2^4 - 2*M2^2*M1^2 + M1^4)*(S + M2^2 - M1^2)*PI*M1)/(SQ1*SQ2^4)$$

$$PL(2,2) := - (8*(S^2 + S*T - 2*S*M2^2 - 2*S*M1^2 + M2^4 - 2*M2^2*M1^2 + M1^4)*(S - M2^2 + M1^2)*PI*M2)/(SQ1*SQ2^4)$$

$$*M1^2 + M1^4) * S * T * PI * M2 * M1) / (SQ1^2 * SQ2^4)$$

$$PL(2,3) := 0$$

$$PL(3,1) := 0$$

$$PL(3,2) := 0$$

$$PL(3,3) := - (8 * (S^2 + S * T - 2 * S * M2^2 - 2 * S * M1^2 + M2^4 - 2 * M2^2 * M1^2 + M1^4) * PI * M2 * M1) / (SQ1^2 * SQ2^2)$$

$$SIG := SIG - \text{FOR } I := 1:3 \text{ SUM FOR } J := 1:3 \text{ SUM } PL(I,J) * Z(P1,I) * Z(P2,J);$$

$$SIG := (2 * (2 * S^2 + 2 * S * T - 4 * S * M2^2 - 4 * S * M1^2 + T^2 + 2 * M2^4 + 4 * M2^2 * M1^2 + 2 * M1^4) * PI) / (T^2 * SQ2^2)$$

Задача 3. Рассмотрите поляризационные эффекты в e^-e^- и e^+e^- рассеянии.

3. РАССЕЯНИЕ ФОТОНА НА ЭЛЕКТРОНЕ

$e\gamma \rightarrow e\gamma$. Рассеяние $e\gamma \rightarrow e\gamma$ (эффект Комптона) изображается 4 квадратированными диаграммами рис. 7. Виртуальности электрона

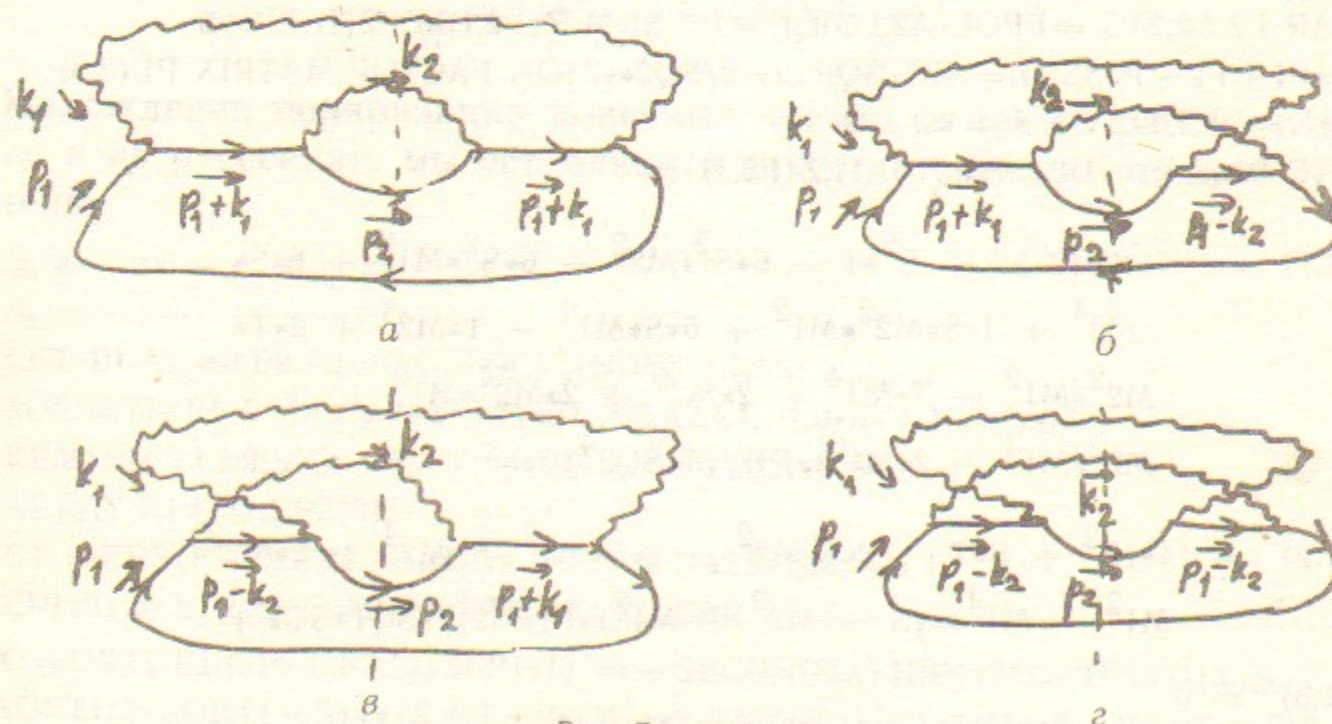


Рис. 7. $e\gamma \rightarrow e\gamma$.

равны $s - m^2$ и $u - m^2$. Введем безразмерные переменные $x = (s - m^2) / m^2$ и $y = (m^2 - u) / m^2$. Вторая пара диаграмм получается из первой заменой $k_1 \leftrightarrow -k_2$, т. е. $s \leftrightarrow u$ или $x \leftrightarrow -y$.

В программе положено $m=1$, степень m легко восстановить по размерности. В сечении подразумевается множитель α^2 . Множитель $1/4$ от усреднения по поляризациям компенсирует множитель 4 из-за перехода от $1/4 \text{ Sp}$ (вычисляет REDUCE) к Sp . Используется пакет KPAK из 1.3. Программа получает

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{m^2} \frac{x^3y - 4x^2(y-1) + xy(y^2 + 4y - 8) + 4y^2}{x^4y^2},$$

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{m^2x^2} \left[\frac{2}{x} (x^2 - 4x - 8) \ln(x+1) + \frac{x^3 + 18x^2 + 32x + 16}{(x+1)^2} \right]. \quad (1)$$

При низких и высоких энергиях (программа использует процедуру BINOM из [2] и аналогичную ей процедуру LOG1(X), вычисляющую ряд $\log(1+x)$)

$$x \rightarrow 0: \quad \sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2} (1-x),$$

$$x \rightarrow \infty: \quad \sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{m^2x} \left[\ln x + \frac{1}{2} - \frac{4}{x} \left(\ln x - \frac{9}{4} \right) \right]. \quad (2)$$

В системе покоя электрона $x = 2\omega_1/m$, $y = 2\omega_2/m$. Из закона сохранения энергии-импульса $p_1 + k_1 = p_2 + k_2$ получаем $(p_1 + k_1 - k_2)^2 = p_2^2$, или $m^2 + 2m\omega_1 - 2m\omega_2 - 2\omega_1\omega_2(1 - \cos\theta) = m^2$, откуда имеем формулу Комптона

$$\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} = \frac{1 - \cos\theta}{m}. \quad (3)$$

Подставляя это в сечение, получим формулу Клейна-Нишины ($m=1$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2} \frac{(1 + \omega + \omega^2)(1 + \cos^2\theta) - (1 + 2\omega)\omega \cos\theta - \omega \cos^3\theta}{(1 + \omega - \omega \cos\theta)^3}. \quad (4)$$

В нерелятивистском пределе она переходит в классическую формулу Томсона

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} (1 + \cos^2\theta). \quad (5)$$

% e гамма -> e гамма

% -----

MASS P1=1,P2=1,K1=0,K2=0;MSHELL P1,P2,K1,K2;

LET P1.P2=1+(X-Y)/2,K1.K2=(X-Y)/2, % X=S-1 Y=1-U


```

P1.K1=X/2,P2.K2=X/2,P1.K2=Y/2,P2.K1=Y/2;
INDEX M,N;
OPERATOR R,S; % удвоенная матрица плотности и пропагатор
FOR ALL P LET R(P)=G(F,P)+1,S(P)=R(P)/(P.P-1);
MM1:=(4*PI)**2* % диаграмма 1
R(P2)*G(F,M)*S(P1+K1)*G(F,N)*R(P1)*G(F,N)*S(P1+K1)*G(F,M);

```

$$MM1 := \frac{32\pi^2(XY + 2X + 4)}{X^2}$$

```

MM2:=(4*PI)**2* % диаграмма 2
R(P2)*G(F,M)*S(P1+K1)*G(F,N)*R(P1)*G(F,M)*S(P1-K2)*G(F,N);

```

$$MM2 := \frac{32\pi^2(X - Y + 4)}{XY}$$

```

% средний квадрат матричного элемента
ON GCD;MM:=MM1+MM2$CLEAR MM1,MM2;MM
:=MM+SUB(X=-Y,Y=-X,MM)$
SIG:=MM/(64*PI*JJ(1+X,1,0)**2); % d сигма / d Y

```

$$SIG := \frac{(2\pi(X^3Y - 4X^2Y + 4X^2 + XY^3 + 4XY^2 - 8XY + 4Y^2))/(X^4Y^2)}{(X^3 + 18X^2 + 32X + 16)\pi}$$

```

MANDEL(1,0,0,1,1+X,U1,U2)$
FOR ALL X,Y LET LOG(X/Y)=LOG(X)-LOG(Y);
SIGT:=DINT(SIG,Y,1-U1,1-U2)$CLEAR U1,U2; % полное сечение
ON FACTOR;FOR ALL X LET LOG(X)=0;SIGT;

```

$$\frac{(X^3 + 18X^2 + 32X + 16)\pi}{(X + 1)^2 X^2}$$

```

FOR ALL X CLEAR LOG(X);SIGT=WS;OFF FACTOR;

```

$$\frac{2(X^2 - 4X - 8)\log(X + 1)\pi}{X^3}$$

% низкие энергии

```

SIGL:=NUM(SIGT)$LET LOG(1+X)=LOG1(X);WEIGHT X=1;WTLEVEL 4;
ON REVPRI;SIGL:=SIGL*BINOM(X,-2)$CLEAR X;SIGL:=SIGL/X**3;

```

$$SIGL := \frac{8\pi(-1 + X)}{3}$$

```

CLEAR LOG(1+X);CLEAR SIGL;

```

% высокие энергии

```

SIGH:=SUB(X=1/X1,SIGT)$SIGH:=NUM(SIGH)$WEIGHT X1=1;WTLEVEL2;
LET LOG(1+X1)=LOG1(X1);SIGH:=SIGH*BINOM(X1,-2);

```

$$SIGH := \pi X_1(1 + 18X_1 - 2\log(X_1) + 8\log(X_1)X_1)$$

```

CLEAR X1;CLEAR LOG(1+X1);CLEAR BINOM,LOG1;OFF REVPRI;
CLEAR SIGH,SIGT;

```

% система покоя электрона

```

X:=2*O$Y:=2*O2$SIGRF:=SIG*Y**2/(4*PI); % d сигма / d омега

```

$$SIGRF := \frac{(O^3O_2 - 2O^2O_2 + O^2 + O*O_2^3 + 2O*O_2^2 - 2O*O_2 + O_2^2)/(2O^4)}{O_2 := O/(1 + O*(1 - C))\$ON FACTOR;SIGRF:=SIGRF;$$

```

O2:=O/(1+O*(1-C))$ON FACTOR;SIGRF:=SIGRF;

```

$$SIGRF := \frac{(C^3O - C^2O^2 - C^2O - C^2 + 2C*O^2 + C*O - O^2 - O - 1)/(2(C*O - O - 1)^3)}{SUB(O=0,SIGRF); % нерелятивистский предел}$$

```

SUB(O=0,SIGRF); % нерелятивистский предел

```

$$\frac{C^2 + 1}{2}$$

```

CLEAR X,Y,O2,SIGRF;

```

$e^+e^- \leftrightarrow 2\gamma$. Квадрат матричного элемента (рис. 8) получается из предыдущего заменой $s \leftrightarrow t$. Обозначим $z = (m^2 - t)/m^2$, $x = s/m^2$. Наиболее простую форму дифференциального сечения удалось найти с помощью процедуры ELFRAC [2]. При вычислении полного сечения следует включить множитель 1/2 из-за тождественности 2 фотонов.

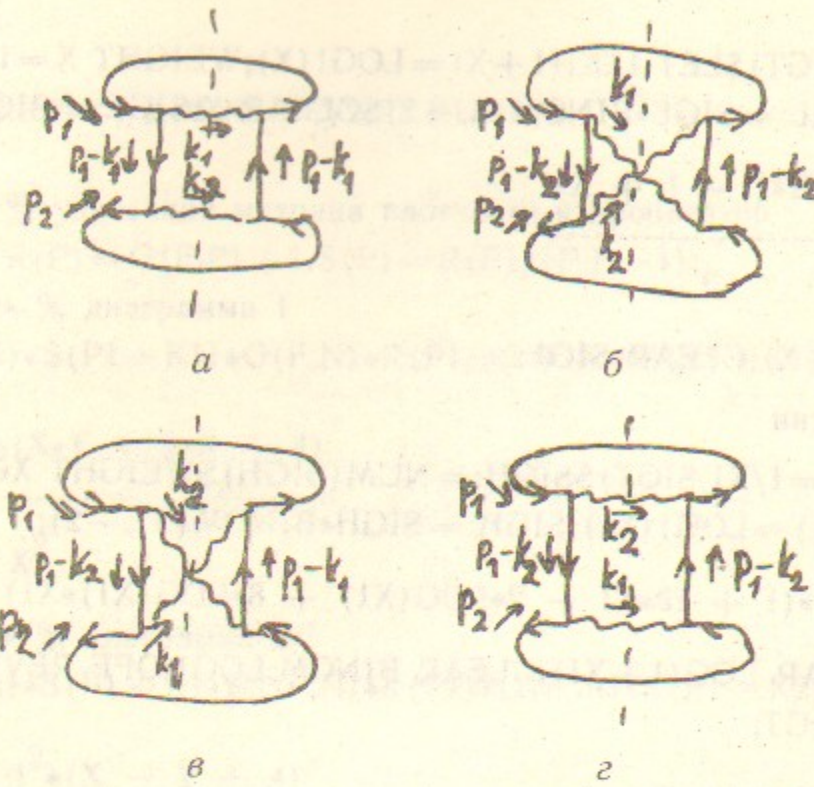


Рис. 8. $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$.

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{8\pi\alpha^2}{m^2x(x-4)} \left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(x-z)^2} - \frac{x^2+4x-8}{4x} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x-z} \right) + \frac{1}{2} \right],$$

$$\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{m^2x^2(x-4)} \left[(x^2+4x-8) \ln \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}} - (x+4) \sqrt{x(x-4)} \right]. \quad (6)$$

В системе центра масс

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(1-v^2)}{4m^2v(1-v^2\cos^2\theta)^2} [1+2v^2-2v^4-2(1+v^2)v^2\cos^2\theta-v^4\cos^4\theta],$$

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2(1-v^2)}{4m^2v} \left[\frac{3-v^4}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} - 2(2-v^2) \right]. \quad (7)$$

Здесь мы сталкиваемся с неприятностью: REDUCE считает, что $\text{SQRT}((1-V**2)**2) = V**2-1$. Включение флага PRECISE [1] не помогает: вопреки описанию, REDUCE не выдает $\text{ABS}(V**2-1)$. В результате знак обоих членов в полном сечении получается неверным.

В нерелятивистском случае

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{2m^2v}, \quad (8)$$

угловое распределение изотропно. В ультрарелятивистском случае

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{m^2\gamma^2} \left(\ln 2\gamma - \frac{1}{2} \right), \quad (9)$$

угловое распределение имеет максимумы вперед и назад с шириной $\theta \sim 1/\gamma$.

Дифференциальное сечение обратного процесса $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$ получается из (6), (7) домножением на $(s-4m^2)/s = v^2$. Полное сечение следует также умножить на 2, т. к. теперь конечные частицы не тождественны.

% e+ e- -> гамма гамма

% -----

X:=-Z\$Y:=S-Z\$SIG:=MM/(64*PI*JJ(S,1,1)**2); % d сигма / d Z

$$\text{SIG} := - (2*(S^3*Z - 3*S^2*Z^2 + 4*S^2*Z - 4*S^2 + 4*S*Z^3 - 4*S*Z^2 - 2*Z^4)*PI)/((S-Z)^2*(S-4)*S*Z^2)$$

OFF FACTOR;FACTOR FRAC;ELFRAC(SIG,Z);REMFAC FRAC;

$$(8*\text{FRAC}(-S+Z,2)*S*PI + 2*\text{FRAC}(-S+Z,1)*PI*(S+4*S-8) + 8*\text{FRAC}(Z,2)*S*PI + 2*\text{FRAC}(Z,1)*PI*(-S^2-4*S+8) + 4*S*PI)/(S^2*(S-4))$$

MANDEL(1,1,0,0,S,T1,T2)\$

SIGT:=DINT(SIG,Z,1-T2,1-T1)/2\$ % полное сечение

FOR ALL X,Y CLEAR LOG(X/Y);

LET LOG(SQRT(S**2-4*S)+S)=

LOG((SQRT(S**2-4*S)+S)/(-SQRT(S**2-4*S)+S))

+LOG(-SQRT(S**2-4*S)+S);

FACTOR LOG;SIGT;

$$-\text{SQRT}(S^2-4*S)-S$$

$$-(2*\text{LOG}(\frac{-\text{SQRT}(S^2-4*S)-S}{\text{SQRT}(S^2-4*S)-S}))*PI*(-S^2-4*S+8)+2*\text{SQRT}(S^2-4*S)-S$$

$$\text{SQRT}(S^2-4*S)*PI*(S+4)/(S^2*(S-4))$$

CLEAR T1,T2;REMFAC LOG;CLEAR LOG(SQRT(S**2-4*S)+S);

% система центра масс

SCM:=4/(1-V**2)\$ZCM:=2*(1-V*C)/(1-V**2)\$CM:=V/PI/(1-V**2)\$

ON FACTOR;SIGCM:=SUB(S=SCM,Z=ZCM,SIG)*CM;OFF FACTOR;


```

SIGCM := - ((C^4*V^4 - 2*C^2*V^4 + 2*C^2*V^2 + 2*V^4 - 2*V^2 - 1)*(
V + 1)*(V - 1))/(4*(C*V + 1)^2*
(C*V - 1)^2*V)

LET LOG(-4/(V-1)) = LOG((1+V)/(1-V)) + LOG(4/(1+V));
SIGTCM := SUB(S=SCM,SIGT)$CLEAR LOG(-4/(V-1));ON FACTOR;
FOR ALL X LET LOG(X)=0;SIGTCM;FOR ALL X
  CLEAR LOG(X);SIGTCM=WS;

(V^2 - 2)*(V + 1)*(V - 1)*PI
-----
2*V
-(V+1)
(V^4-3)*(V+1)*(V-1)*LOG(-----)*PI
V-1
-----
4*V^2

OFF FACTOR;SQRT((1-V**2)**2); % REDUCE неверно извлек корни
V^2 - 1
SIGTCM := - SIGTCM$
SUB(V=0,SUB(LOG((1+V)/(1-V))=2*V,SIGTCM*V))/V; % нерел. случай
PI
-----
2*V
% ультрарел. случай
SUB(V=1,SUB(LOG((1+V)/(1-V))=2*LOG(2*E),SIGTCM/(1-V**2)))/E**2;
PI*(2*LOG(2*E) - 1)
-----
2*E^2
CLEAR SIGCM,SIGTCM;
% гамма гамма -> e+ e-
% -----
JJ(S,1,1)**2/JJ(S,0,0)**2;SUB(S=SCM,WS);

```

S - 4

S

V^2

Задача 1. Исследовать поляризационные эффекты в комптоновском рассеянии.

Решение. Удобно использовать базис, в котором орт n_0 направлен вдоль $k = k_1 + k_2$; n_1 — вдоль $q = k_2 - k_1$; n_2 — вдоль компоненты $p = p_1 + p_2$, ортогональной k ; n_3 — перпендикулярно им всем. Тогда орты n_2, n_3 можно использовать как векторы поляризации обоих фотонов. В программе все импульсы выражены в этом базисе. L1, L2 — векторы продольной поляризации электронов, а T1, T2 — поперечной поляризации в плоскости рассеяния. Поляризация фотонов выражается через параметры Стокса в базисе n_2, n_3 (в плоскости рассеяния и перпендикулярно ей); поляризация электронов — через продольную, поперечную в плоскости рассеяния и перпендикулярную к этой плоскости компоненты. Детали решения читатель может найти в § 87 учебника [3]; мы прямо используем формулу (10) из этого параграфа.

Сечение с учетом поляризаций имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dy d\varphi} = \frac{\alpha^2}{m^2 x^4 y^2} \sum F_{i_1 j_1}^{i_2 j_2} z_{i_1}^1 \xi_{i_1}^1 z_{i_2}^2 \xi_{i_2}^2, \quad (10)$$

где считается $z_0^{1,2} = 1, \xi_0^{1,2} = 1$, а величины $F_{i_1 j_1}^{i_2 j_2}$ вычислены в программе. Сечение рассеяния поляризованного фотона на поляризованном электроне

$$\frac{d\sigma}{dy d\varphi} = \frac{\alpha^2}{m^2 x^4 y^2} F, \quad F = F_{00}^{00} + F_{03}^{00} \xi_3^1 + (F_{12}^{00} z_1^1 + F_{22}^{00} z_2^1) \xi_2^1. \quad (11)$$

Компоненты поляризации конечного фотона

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= \frac{1}{F} (F_{01}^{01} \xi_1^1 + F_{32}^{01} z_3^1 \xi_2^1), \\ \xi_2^2 &= \frac{1}{F} (F_{02}^{02} \xi_2^1 + (F_{10}^{02} + F_{13}^{02} \xi_3^1) z_1^1 + (F_{20}^{02} + F_{23}^{02} \xi_3^1) z_2^1 + F_{31}^{02} z_3^1 \xi_1^1), \\ \xi_3^2 &= \frac{1}{F} (F_{00}^{03} + F_{03}^{03} \xi_3^1 + F_{22}^{03} z_2^1 \xi_2^1), \end{aligned} \quad (12)$$

а электрона

$$z_1^2 = \frac{1}{F} (F_{02}^{10} \xi_2^1 + (F_{10}^{10} + F_{13}^{10} \xi_3^1) z_1^1 + (F_{20}^{10} + F_{23}^{10} \xi_3^1) z_2^1 + F_{31}^{10} z_3^1 \xi_1^1),$$

$$z_2^2 = \frac{1}{F} (F_{02}^{20} \xi_2^1 + (F_{10}^{20} + F_{13}^{20} \xi_3^1) z_1^1 + (F_{20}^{20} + F_{23}^{20} \xi_3^1) z_2^1),$$

$$z_3^2 = \frac{1}{F} ((F_{11}^{30} \xi_1^1 + F_{21}^{30} z_2^1) \xi_1^1 + (F_{30}^{30} + F_{33}^{30} \xi_3^1) z_3^1).$$

(13)

В случае неполяризованных начальных частиц, конечный фотон имеет $\xi_3^2 = F_{00}^{03}/F_{00}^{00}$, а электрон неполяризован. Компоненты $F_{i_1 j_1}^{i_2 j_2}$ с $i_2 \neq 0$ и $j_2 \neq 0$ описывают корреляцию поляризации конечных фотона и электрона.

```
% ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ
% -----
MASS N0=1,N1=1,N2=1,N3=1;MSHELL N0,N1,N2,N3;
LET N0.N1=0,N0.N2=0,N0.N3=0,N1.N2=0,N1.N3=0,N2.N3=0,
    EPS(N3,N2,N1,N0)=1;
VECTOR P1,P2,K1,K2,L1,L2,T1,T2,A;
P1:=(X+Y)/2*N0+(X-Y)/2*N1+SQRT(X*Y-X+Y)*N2/SQRT(X-Y)$
P2:=(X+Y)/2*N0-(X-Y)/2*N1+SQRT(X*Y-X+Y)*N2/SQRT(X-Y)$
K1:=SQRT(X-Y)/2*(N0-N1)$K2:=SQRT(X-Y)/2*(N0+N1)$
L1:=P1-2/X*K1$L2:=P2-2/X*K2$
T1:=SQRT(X*Y-X+Y)/X*(N0-N1)+N2$T2:=SQRT(X*Y-X+
    Y)/X*(N0+N1)+N2$
ARRAY R1(3),R2(3),Q1(3),Q2(3),EP(3,3,3),S(3,3,3,3),F(3,3,3,3);
EP(1,2,3):=EP(2,3,1):=EP(3,1,2):=1$
EP(1,3,2):=EP(3,2,1):=EP(2,1,3):=-1$
NOSPUR F;AP:=1/X-1/Y$AM:=1/X+1/Y$AK:=SQRT(X-Y)$
Q1(0):=-AP$Q1(1):=1/2*AP*AK*G(F,A,N0)$
Q1(2):=-AP*G(F,A)$Q1(3):=AP+AM/2*AK*G(F,N0)$
Q2(0):=Q1(0)$Q2(1):=-Q1(1)$Q2(2):=-Q1(2)$Q2(3):=Q1(3)$
U1:=G(F,P1)+1$U2:=G(F,P2)+1$
R1(0):=U1$R1(1):=U1*G(F,A,L1)$
R1(2):=U1*G(F,A,T1)$R1(3):=U1*G(F,A,N3)$
R2(0):=U2$R2(1):=U2*G(F,A,L2)$
R2(2):=U2*G(F,A,T2)$R2(3):=U2*G(F,A,N3)$
SPUR F; % вычисление шпуров
FOR I1:=0:3 DO FOR I2:=0:3 DO FOR J1:=0:3 DO FOR J2:=0:3 DO
    S(I1,I2,J1,J2):=R1(I1)*Q1(J1)*R2(I2)*Q2(J2);
% заполнение массива F
FOR I1:=0:3 DO FOR I2:=0:3 DO
```

```
<< F(I1,I2,0,0):=FOR J:=0:3 SUM S(I1,I2,J,J);
    FOR J:=1:3 DO F(I1,I2,J,0):=S(I1,I2,J,0)+S(I1,I2,0,J)
        -I*FOR J1:=1:3 SUM FOR J2:=1:3 SUM EP(J,J1,J2)*S(I1,I2,J1,J2);
    FOR J:=1:3 DO F(I1,I2,0,J):=S(I1,I2,J,0)+S(I1,I2,0,J)
        +I*FOR J1:=1:3 SUM FOR J2:=1:3 SUM EP(J,J1,J2)*S(I1,I2,J1,J2);
    Z:=S(I1,I2,0,0)-FOR J:=1:3 SUM S(I1,I2,J,J);
    FOR J1:=1:3 DO FOR J2:=1:3 DO F(I1,I2,J1,J2):=
        S(I1,I2,J1,J2)+S(I1,I2,J2,J1)
        +(IF J1=J2 THEN Z ELSE 0)
        -I*FOR J:=1:3 SUM EP(J1,J2,J)*(S(I1,I2,J,0)-S(I1,I2,0,J));
```

```
>>;
CLEAR S;CLEAR Z;
FOR I1:=0:3 DO FOR I2:=0:3 DO FOR J1:=0:3 DO FOR J2:=0:3 DO
    << Z:=X**2*Y**2*(IF J2=1 OR J2=2 THEN -1 ELSE 1)*F(I1,I2,J1,J2);
        F(I1,I2,J1,J2):=Z;
```

```
>>;
ON FACTOR; % результаты
% сечение
FOR I1:=0:3 DO FOR J1:=0:3 DO IF F(I1,0,J1,0) NEQ 0 THEN
    WRITE I1,J1," ",F(I1,0,J1,0);
```

$$00 \quad X^3*Y - 4*X^2*Y + 4*X^2 + X*Y^3 + 4*X*Y^2 - 8*X*Y + 4*Y^2$$

$$03 \quad 4*(X*Y - X + Y)*(X - Y)$$

$$12 \quad -((X^3*Y + X^2*Y^2 - 4*X^2*Y + 4*X^2 + 4*X*Y^2 - 8*X*Y + 4*Y^2) * (X - Y))/X$$

$$22 \quad \frac{2*SQRT(X*Y-X+Y)*(X*Y-2*X+2*Y)*(X-Y)^2}{SQRT(X-Y)*X}$$

```
% поляризация фотона
```

```
FOR J2:=1:3 DO
```

```
<< WRITE "ФОТОН",J2;
```

```
FOR I1:=0:3 DO FOR J1:=0:3 DO IF F(I1,0,J1,J2) NEQ 0 THEN
```

```
WRITE I1,J1," ",F(I1,0,J1,J2);
```

```
>>;
```

```
ФОТОН 1
```

$$01 \quad 2*(X*Y - 2*X + 2*Y)*X*Y$$

$$32 \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*X}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

ФОТОН 2

$$02 (X^2 + Y^2)*(X*Y - 2*X + 2*Y)$$

$$10 - (X*Y - 2*X + 2*Y)*(X + Y)*(X - Y)$$

$$13 \frac{4*(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2}{X}$$

$$20 \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*Y}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

$$23 \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X*Y - 2*X + 2*Y)*(X - Y)^2}{\text{SQRT}(X - Y)*X}$$

$$31 \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*Y}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

ФОТОН 3

$$00 4*(X*Y - X + Y)*(X - Y)$$

$$03 2*(X^2*Y^2 - 2*X^2*Y + 2*X^2 + 2*X*Y^2 - 4*X*Y + 2*Y^2)$$

$$22 \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*X}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

% поляризация электрона

FOR I2:=1:3 DO

<< WRITE "ЭЛЕКТРОН",I2;

FOR I1:=0:3 DO FOR J1:=0:3 DO IF F(I1,I2,J1,0) NEQ 0 THEN

WRITE I1,J1," ",F(I1,I2,J1,0);

>>;

ЭЛЕКТРОН 1

$$02 - (X*Y - 2*X + 2*Y)*(X + Y)*(X - Y)$$

$$10 ((X^4 + X^2*Y^2 - 4*X^2*Y + 4*X^2 + 4*X*Y^2 - 8*X*Y + 4*Y^2)*(X*$$

$$Y - 2*X + 2*Y))/X^2$$

$$13 \frac{4*(X*Y - X + Y)*(X*Y - 2*X + 2*Y)*(X - Y)}{X^2}$$

$$20 (2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X^3*Y + X^2*Y^2 - 4*X^2*Y + 4*X^2 + 4*X*$$

$$Y^2 - 8*X*Y + 4*Y^2)*(X - Y))/(\text{SQRT}(X - Y)*X^2)$$

$$23 2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X^3 + 4*X*Y - 4*X + 4*Y)*$$

$$(X - Y)^2$$

$$\text{SQRT}(X - Y)*X^2$$

$$31 \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*X}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

ЭЛЕКТРОН 2

$$02 \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*Y}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

$$10 (2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X^3*Y + X^2*Y^2 - 4*X^2*Y + 4*X^2 + 4*X*$$

$$Y^2 - 8*X*Y + 4*Y^2)*(X - Y))/(\text{SQRT}(X - Y)*X^2)$$

$$13 2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X^2*Y + 4*X*Y - 4*X + 4*Y)*$$

$$(X - Y)^2$$

$$\text{SQRT}(X - Y)*X^2$$

$$20 - (2*(X^3*Y - 2*X^2*Y + 2*X^2 + 2*X*Y^2 - 4*X*Y + 2*Y^2)*(X*Y$$

$$- 2*X + 2*Y))/X^2$$

$$4*(X*Y - X + Y)*(X*Y - 2*X + 2*Y)*(X - Y)$$

$$23 \frac{4*(X*Y - X + Y)*(X*Y - 2*X + 2*Y)*(X - Y)}{X^2}$$

ЭЛЕКТРОН 3

$$11 \frac{2 * \text{SQRT}(X * Y - X + Y) * (X * Y - 2 * X + 2 * Y) * (X - Y)^2}{\text{SQRT}(X - Y) * X}$$

$$21 \frac{4 * (X * Y - X + Y) * (X - Y)^2}{X}$$

$$30 \ 2 * (X^2 * Y^2 - 2 * X^2 * Y + 2 * X^2 + 2 * X * Y^2 - 4 * X * Y + 2 * Y^2)$$

$$33 \ 4 * (X * Y - X + Y) * (X - Y)$$

% корреляция поляризаций

FOR I2:=1:3 DO FOR J2:=1:3 DO

<< WRITE "КОРРЕЛЯЦИЯ",I2,J2;

FOR I1:=0:3 DO FOR J1:=0:3 DO IF F(I1,I2,J1,J2) NEQ 0 THEN

WRITE I1,J1," ",F(I1,I2,J1,J2);

>>;

КОРРЕЛЯЦИЯ 11

$$11 \frac{(2 * (X^3 * Y^2 - 2 * X^3 * Y + 2 * X^3 - 2 * X^2 * Y + 2 * X * Y^3 - 2 * X * Y^2 + 2 * Y^3)) / X}{Y^3} / X$$

21

$$2 * \text{SQRT}(X * Y - X + Y) * (X * Y - 2 * X + 2 * Y) * (X + Y) * (X - Y)$$

$$\text{SQRT}(X - Y) * X$$

$$30 \frac{2 * \text{SQRT}(X * Y - X + Y) * (X * Y - 2 * X + 2 * Y) * (X - Y)^2}{\text{SQRT}(X - Y) * X}$$

$$\text{SQRT}(X - Y) * X$$

$$2 * \text{SQRT}(X * Y - X + Y) * (X - Y)^2 * Y$$

33

$$\text{SQRT}(X - Y)$$

КОРРЕЛЯЦИЯ 12

$$00 - ((X^3 * Y + X^2 * Y^2 - 4 * X^2 * Y + 4 * X^2 + 4 * X * Y^2 - 8 * X * Y + 4 * Y^2) * (X - Y)) / X$$

$$12 (X^4 * Y - 4 * X^3 * Y + 4 * X^3 + X^2 * Y^3 - 4 * X^2 * Y + 4 * X * Y^3 - 4 * X * Y^2$$

$$+ 4 * Y^3) / X$$

22

$$2 * \text{SQRT}(X * Y - X + Y) * (X * Y - 2 * X + 2 * Y) * (X + Y) * (X - Y)$$

$$\text{SQRT}(X - Y) * X$$

КОРРЕЛЯЦИЯ 13

$$4 * (X * Y - X + Y) * (X - Y)^2$$

02

$$X$$

$$4 * (X * Y - X + Y) * (X * Y - 2 * X + 2 * Y) * (X - Y)$$

10

$$X^2$$

$$13 \frac{(2 * (X^3 * Y - 2 * X^2 * Y + 2 * X^2 + 2 * X * Y^2 - 4 * X * Y + 2 * Y^2) * (X * Y - 2 * X + 2 * Y)) / X^2}{X^2}$$

$$20 \ 2 * \text{SQRT}(X * Y - X + Y) * (X^2 * Y + 4 * X * Y - 4 * X + 4 * Y) * (X - Y)^2$$

$$\text{SQRT}(X - Y) * X^2$$

$$23 \frac{(2 * \text{SQRT}(X * Y - X + Y) * (X^3 * Y + X^2 * Y^2 - 4 * X^2 * Y + 4 * X^2 + 4 * X * Y^2 - 8 * X * Y + 4 * Y^2) * (X - Y)) / (\text{SQRT}(X - Y) * X^2)}{X^2}$$

$$2 * \text{SQRT}(X * Y - X + Y) * (X * Y - 2 * X + 2 * Y) * (X - Y)^2$$

31

$$\text{SQRT}(X - Y) * X$$

КОРРЕЛЯЦИЯ 21

11

$$2 * \text{SQRT}(X * Y - X + Y) * (X * Y - 2 * X + 2 * Y) * (X + Y) * (X - Y)$$

$$\text{SQRT}(X - Y) * X$$

$$21 - (X^4 * Y - 4 * X^3 * Y + 4 * X^3 + X^2 * Y^3 - 4 * X^2 * Y + 4 * X * Y^3 - 4 * X * Y^2 + 4 * Y^3) / X$$

$$30 - \frac{4*(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2}{X}$$

$$33 - (X*Y - 2*X + 2*Y)*(X + Y)*(X - Y)$$

КОРРЕЛЯЦИЯ 22

$$00 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X*Y - 2*X + 2*Y)*(X - Y)^2}{\text{SQRT}(X - Y)*X}$$

$$03 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*X}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

$$12 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X*Y - 2*X + 2*Y)*(X + Y)*(X - Y)}{\text{SQRT}(X - Y)*X}$$

$$22 - (2*(X^3*Y^2 - 2*X^3*Y + 2*X^3 - 2*X^2*Y + 2*X*Y^3 - 2*X*Y^2 + 2*Y^3))/X$$

КОРРЕЛЯЦИЯ 23

$$02 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X*Y - 2*X + 2*Y)*(X - Y)^2}{\text{SQRT}(X - Y)*X}$$

$$10 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X^3 + 4*X*Y - 4*X + 4*Y)*(X - Y)^2}{\text{SQRT}(X - Y)*X^2}$$

$$13 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X^3*Y + X^2*Y^2 - 4*X^2*Y + 4*X^2 + 4*X*Y^2 - 8*X*Y + 4*Y^2)*(X - Y))/(\text{SQRT}(X - Y)*X^2)}{4*(X*Y - X + Y)*(X*Y - 2*X + 2*Y)*(X - Y)}$$

$$20 - \frac{X^2}{X^2}$$

$$23 - ((X^4 + X^2*Y^2 - 4*X^2*Y + 4*X^2 + 4*X*Y^2 - 8*X*Y + 4*Y^2)*(X*Y - 2*X + 2*Y))/X^2$$

$$31 - ((X^3*Y + X^2*Y^2 - 4*X^2*Y + 4*X^2 + 4*X*Y^2 - 8*X*Y + 4*Y^2)*(X - Y))/X$$

КОРРЕЛЯЦИЯ 31

$$02 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*Y}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

$$10 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*X}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

$$13 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X*Y - 2*X + 2*Y)*(X - Y)^2}{\text{SQRT}(X - Y)*X}$$

$$23 - ((X^3*Y + X^2*Y^2 - 4*X^2*Y + 4*X^2 + 4*X*Y^2 - 8*X*Y + 4*Y^2)*(X - Y))/X$$

$$31 - (X^2 + Y^2)*(X*Y - 2*X + 2*Y)$$

КОРРЕЛЯЦИЯ 32

$$01 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*X}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

$$32 - 2*(X*Y - 2*X + 2*Y)*X*Y$$

КОРРЕЛЯЦИЯ 33

$$11 - \frac{2*\text{SQRT}(X*Y - X + Y)*(X - Y)^2*Y}{\text{SQRT}(X - Y)}$$

$$21 - (X*Y - 2*X + 2*Y)*(X + Y)*(X - Y)$$

$$30 - 4*(X*Y - X + Y)*(X - Y)$$

$$33 - X^3*Y - 4*X^2*Y + 4*X^2 + X*Y^3 + 4*X*Y^2 - 8*X*Y + 4*Y^2$$

Задача 2. Найти сечение двухфотонной аннигиляции поляризованных e^+e^- в системе центра масс.

Решение. Действуем аналогично задаче 1 из п.2. Полное сечение отличается от неполяризованного случая множителем $1 - \bar{z}^1 \cdot \bar{z}^2$, что естественно, т. к. аннигиляция происходит только в состоянии с $S=0$.

```
% e+ e- -> гамма гамма
% -----
VECTOR P1,P2,K1,K2,L1,L2,A1,A2,N;
N:=CT*N1+ST*(CF*N2+SF*N3)$
P1:=G*(N0+V*N1)$P2:=G*(N0-V*N1)$
K1:=G*(N0+N)$K2:=G*(N0-N)$
L1:=G*(V*N0+N1)$L2:=G*(V*N0-N1)$
LET CP**2=(1+C)/2,SP**2=(1-C)/2,
    ST**2=1-CT**2,SF**2=1-CF**2;
SPUR F;INDEX L1,L2;
MM1:=(4*PI)**2*
    V(L1)*R(P1,A1)*V(L1)*S(P1-K1)*V(L2)*R(-P2,-A2)*V(L2)$
MM2:=(4*PI)**2*
    V(L1)*R(P1,A1)*V(L2)*S(P1-K2)*V(L1)*R(-P2,-A2)*V(L2)$
A1:=Z(1,1)*L1+Z(1,2)*(CP*N2+SP*N3)$MM1:=MM1$MM2:=MM2$
A2:=Z(2,1)*L2+Z(2,2)*(CP*N2-SP*N3)$MM1:=MM1$MM2:=MM2$
ON GCD;G:=1/SQRT(1-V**2)$FACTOR Z;
MM:=MM1+MM2$CLEAR MM1,MM2;MM:=MM+SUB(CT=-CT,CF=-CF,
    SF=-SF,MM)$
SIG:=MM/(64*PI**2*4/(1-V**2)*V); % D СИГМА / D ОМЕГА
SIG:=-(Z(2,2)*Z(1,2)*C*V*(V**4*CT**2-2*V**2*CT**2+2*V**2+CT**2-
    -2)+SQRT(-V**2+1)*Z(2,2)*Z(1,1)*V*ST*CT*
    (V**2*CP*CF-V**2*SP*SF+CP*CF-SP*SF)-(SQRT(-
    V**2+1)*Z(2,2)*I*V*ST*CT)*(V**2*CP*SF+V**2*SP*CF
    +CP*SF+SP*CF)-(SQRT(-V**2+1)*Z(2,1)*Z(
    1,2)*V*ST*CT)*(V**2*CP*CF+V**2*SP*SF+CP*CF+
    SP*SF)+Z(2,1)*Z(1,1)*V*(V**4*CT**2-2*V**2*CT**2+
    2*V**2+CT**2-2)+SQRT(-V**2+1)*Z(1,2)*I*V*
    ST*CT*(V**2*CP*SF-V**2*SP*CF+CP*SF-SP*CF)+V*(
```

$$-V^4 \cdot CT^2 + 2 \cdot V^2 \cdot CT^2 - 2 \cdot V^2 - CT^2 + 2) / (4 \cdot (V^4 \cdot CT^2 - V^2 \cdot CT^2 - V^2 + 1))$$

```
SF:=SIN(F)$CF:=COS(F)$SIG:=SIG$SIG:=DINT(SIG,F,0,2*PI)$
LET LOG(V**2+V)=LOG((1+V)/(1-V))+LOG(V-V**2),
    LOG(-V**2-V)=LOG(V**2+V),LOG(V**2-V)=LOG(V-V**2);
SIG:=DINT(SIG,CT,-1,1)$
CLEAR LOG(V**2+V),LOG(-V**2-V),LOG(V**2-V);
REMFAC Z;FOR ALL X LET LOG(X)=0;ON FACTOR;SIG;OFF FACTOR;
```

$$(Z(2,2)*Z(1,2)*C + Z(2,1)*Z(1,1) - 1)*(V + 1)*(V - 1)*PI$$

V

```
FOR ALL X CLEAR LOG(X);ON FACTOR;SIG-WS;OFF FACTOR;
```

$$\frac{((Z(2,2)*Z(1,2)*C + Z(2,1)*Z(1,1) - 1)*(3*V^2 - 1)*LOG(- (V + 1) - (V - 1)))*PI}{(2*V^2) * (V - 1)}$$

4. АННИГИЛЯЦИЯ ПОЗИТРОНИЯ

Введение. Позитроний — это связанное состояние электрона и позитрона. В нерелятивистском приближении, он отличается от атома водорода только заменой массы электрона m на приведенную массу $m/2$. В частности, энергии связи и волновые функции в нуле (S волновых состояний) равны

$$E_n = -\frac{m\alpha^2}{4n^2}, \quad |\psi_n(0)|^2 = \frac{(m\alpha)^3}{8\pi n^3}. \quad (1)$$

Релятивистские поправки к энергиям (1) (тонкая структура) порядка $m\alpha^4$. Состояние позитрония характеризуется главным квантовым числом n , орбитальным моментом l и полным спином $s=0$ или 1 ; l и s складываются в полный момент j . Как мы видели в [2] 7, состояния позитрония имеют определенную пространственную $P = (-1)^{l+1}$ и зарядовую $C = (-1)^{l+s}$ четность. Позитроний с $s=0$ называется парапозитронием, а с $s=1$ — ортопозитронием.

Состояния с $C=+1$ могут аннигилировать в четное число фотонов (с наибольшей вероятностью 2), а с $C=-1$ — в нечетное (с наибольшей вероятностью 3). Матричный элемент аннигиляции в 2γ содержит e^2 , а вероятность α^2 . Кроме того, чтобы аннигилировать, электрон и позитрон должны оказаться на расстоянии $\sim 1/m$, малом по сравнению с размером позитрония $\sim 1/m\alpha$. Поэтому вероятность аннигиляции содержит вероятность нахождения на таких расстояниях $\sim |\psi(0)|^2/m^3$. Наконец, она содержит m по размерности:

$$\Gamma_{2\gamma} \sim \alpha^2 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2} \sim m\alpha^5. \quad (2)$$

Вероятность аннигиляции в 3γ

$$\Gamma_{3\gamma} \sim \alpha^3 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2} \sim m\alpha^6. \quad (3)$$

Эти формулы применимы к состояниям с $l=0$, у которых $\psi(0) \neq 0$. На самом деле в оценки входит $\psi(r)$ при $r \sim 1/m$, для состояний с моментом l , у которых $\psi(r) \sim r^l$, $\psi(r) \sim \left(\frac{\nabla}{m}\right)^l \psi(0) \sim \alpha^l \psi_{l=0}(0)$

$$\Gamma_{2\gamma} \sim \alpha^2 \frac{\left|\left(\frac{\nabla}{m}\right)^l \psi(0)\right|^2}{m^2} \sim m\alpha^{2l+5}, \quad \Gamma_{3\gamma} \sim \alpha^3 \frac{\left|\left(\frac{\nabla}{m}\right)^l \psi(0)\right|^2}{m^2} \sim m\alpha^{2l+6}. \quad (4)$$

Время жизни основного состояния ($n=1$) пара- и ортопозитрония определяется аннигиляцией (2), (3). Возбужденные состояния ($n>1$) могут переходить в нижележащие с излучением фотона. Поэтому необходимо выяснить, какой процесс более вероятен. Вероятности электрических дипольных переходов

$$\Gamma_{E1} \sim d^2 \omega^3 \sim m\alpha^5, \quad (5)$$

где $d \sim er$ — дипольный момент, $r \sim 1/m\alpha$, $\omega \sim m\alpha^2$. Вероятности электрических квадрупольных переходов отличаются от (5) множителем $(kr)^2 \sim \alpha^2$, а магнитных дипольных — $v^2 \sim \alpha^2$:

$$\Gamma_{E2} \sim \Gamma_{M1} \sim m\alpha^7. \quad (6)$$

Исключением являются $M1$ переходы $S \rightarrow S$. Они происходят с переворотом спина; из-за ортогональности радиальных функций с разными n , ненулевой матричный элемент возникает лишь при уче-

те релятивистской поправки $\sim v \sim \alpha$:

$$\Gamma_{M1}(S \rightarrow S) \sim m\alpha^9. \quad (7)$$

В этом случае более вероятен переход с излучением двух $E1$ фотонов:

$$\Gamma_{2E1} \sim d^4 \omega^5 \sim m\alpha^8. \quad (8)$$

Все состояния с $n>1$, кроме $2S$, могут испытывать $E1$ переходы (5). Они и будут главным механизмом распада, кроме nS состояний парапозитрония, для которых вероятность аннигиляции в 2 фотона (2) того же порядка. Состояния $2S$ пара- и ортопозитрония в основном аннигилируют в 2γ (2) и 3γ (3), т. к. наиболее вероятный переход — двухфотонный, и он имеет меньшую вероятность (8).

Вероятности аннигиляции S состояний позитрония $\Gamma_{2\gamma}$, $\Gamma_{3\gamma}$ можно получить из сечений $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$, 3γ при малых относительных скоростях v . В системе покоя позитрона, на него налетает поток электронов $v(dn/d^3\vec{v})d^3\vec{v}$ со скоростью $\vec{v}$ в элементе объема пространства скоростей $d^3\vec{v}$. Умножая его на сечение $\sigma_0(e^+e^- \rightarrow 2\gamma)$ аннигиляции e^+e^- со спином 0 в 2γ и интегрируя по $d^3\vec{v}$, получим вероятность аннигиляции в единицу времени $\Gamma_{2\gamma}$. При малых скоростях сечение ведет себя как $1/v$, так что интегрирование дает просто $n(v\sigma_0)_{v \rightarrow 0}$, где $n = |\psi(0)|^2$ — полная плотность электронов в точке, где находится позитрон. Обычно вычисляется сечение $\sigma(e^+e^- \rightarrow 2\gamma)$, усредненное по спинам начальных частиц. Поскольку аннигилировать в 2γ может 1 спиновое состояние из 4, $\sigma = (1/4)\sigma_0$. Поэтому мы имеем формулу Померанчука

$$\Gamma_{2\gamma} = 4 |\psi(0)|^2 (v\sigma_{2\gamma})_{v \rightarrow 0}. \quad (9)$$

Аналогично, аннигилировать в 3γ могут 3 спиновых состояния из 4, $\sigma(e^+e^- \rightarrow 3\gamma) = (3/4)\sigma_1(e^+e^- \rightarrow 3\gamma)$, и

$$\Gamma_{3\gamma} = \frac{4}{3} |\psi(0)|^2 (v\sigma_{3\gamma})_{v \rightarrow 0}. \quad (10)$$

В п.5 мы получили $\sigma_{2\gamma} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2v}$, откуда

$$\Gamma_{2\gamma} = 4\pi\alpha^2 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2} = \frac{m\alpha^5}{2n^3}. \quad (11)$$

Сейчас мы выведем формулу Ора — Пауэлла $\sigma_{3\gamma} = (4/3) \times (\pi^2 - 9)\alpha^3/m^2v$, и

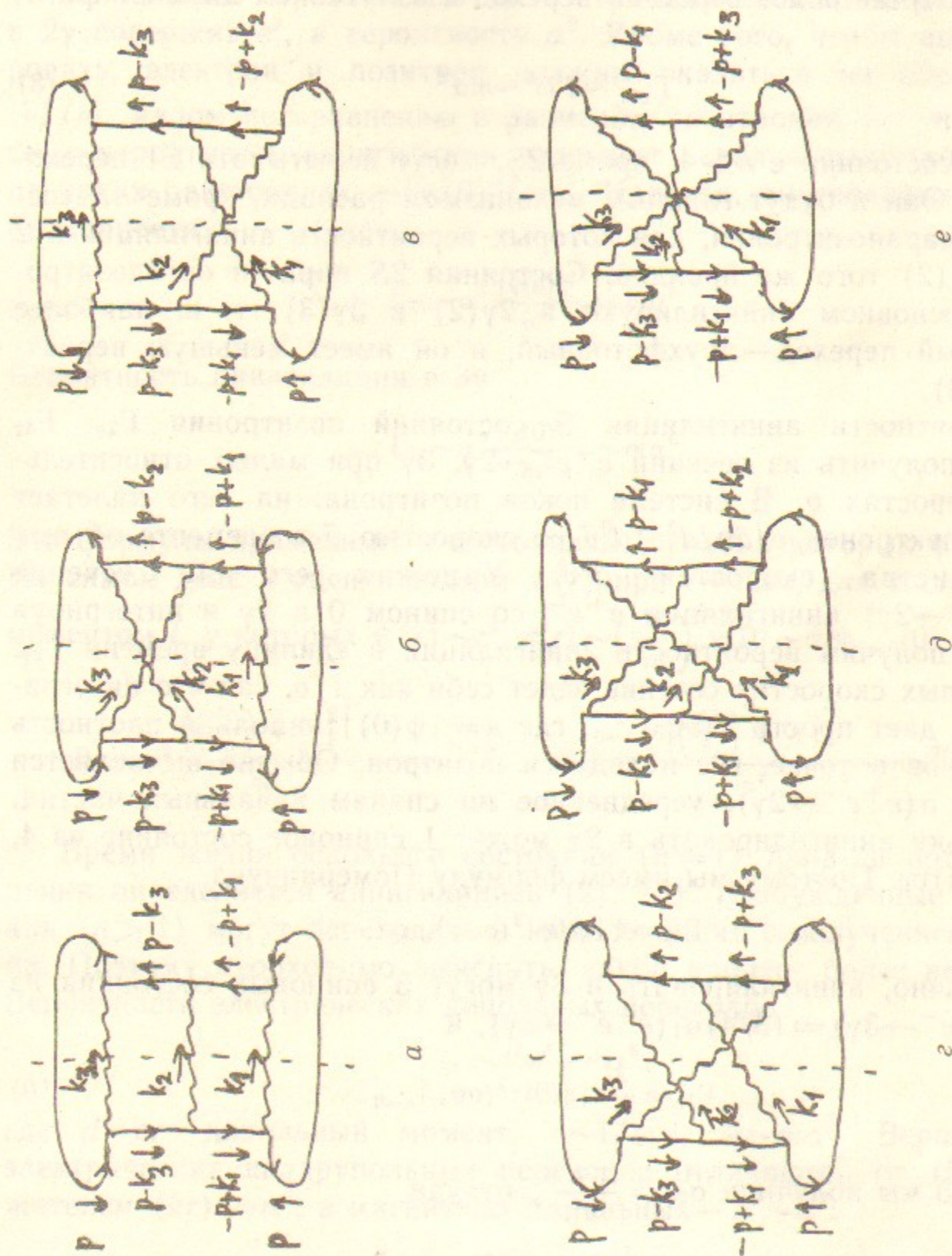


Рис. 9. $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$.

$$\Gamma_{3\gamma} = \frac{16}{9} (\pi^2 - 9) \alpha^3 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2} = \frac{2(\pi^2 - 9)}{9\pi} \frac{m\alpha^6}{n^3}. \quad (12)$$

$e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ при низких энергиях. Имеются 6 диаграмм $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$, отличающихся перестановками фотонов. Поэтому квадрированных диаграмм 36. Их можно получить перестановками фотонов из 6 квадрированных диаграмм рис. 9, в которых порядок фотонов в левой части фиксирован. Диаграмма рис. 9в обращении направления электронной линии (что не меняет шпура) приводится к виду рис. 9б с переставленными фотонами; аналогично, диаграмма рис. 9д приводится к рис. 9г. Поэтому можно не учитывать диаграммы рис. 9(в, д), а удвоить вклады рис. 9(б, г).

Примем массу электрона за 1, и обозначим энергии фотонов x_1, x_2, x_3 . Диаграмма Далица изображена на рис. 10; $x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

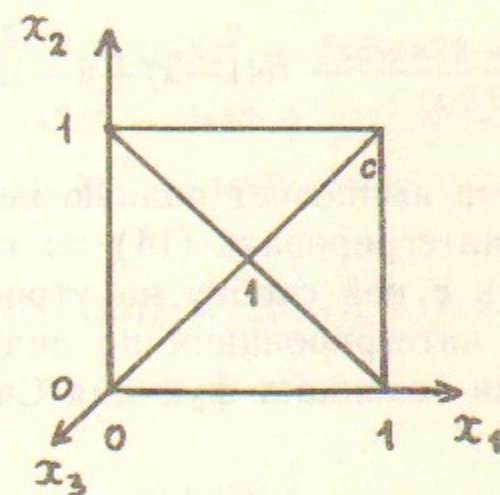


Рис. 10. Диаграмма Далица.

В программе L обозначает левую часть, общую для всех квадрированных диаграмм рис. 9. В L включены общие множители, нужные для получения $\frac{d\Gamma}{dx_1 dx_2}$: 4 — переход от $(1/4)Sp$ к Sp ; $1/4$ — усреднение по спинам электрона и позитрона; $e^6 = (4\pi\alpha)^3$; $1/4(2\pi)^3$ — множитель из фазового объема; $1/4J$, где $J = v$ — инвариантный поток; $(4/3)|\psi(0)|^2 v$ из формулы Померанчука (10) (множитель $\alpha^3|\psi(0)|^2$ подразумевается). Левая часть L домножается на правые части диаграмм рис. 9, вычисляются шпуры, и производится суммирование по перестановкам X_1, X_2, X_3 . Результат может быть записан в простой симметричной форме (формула Ора — Пауэлла)

$$\frac{d\Gamma}{dx_1 dx_2} = \frac{32}{3} \frac{\alpha^3 |\psi(0)|^2}{m^2} \left[\left(\frac{1-x_1}{x_2 x_3} \right)^2 + \left(\frac{1-x_2}{x_1 x_3} \right)^2 + \left(\frac{1-x_3}{x_1 x_2} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

При интегрировании этой формулы каждое конечное состояние будет встречаться 3! раз, отличающихся перестановками 3 фотонов. Поскольку фотоны тождественны, следует учитывать только одно из них, т. е. поделить интеграл на 3!.

Затем программа получает $\frac{d\Gamma}{dx_1}$ интегрированием (13) по X_2 от $1-x_1$ до 1 (рис. 10). Неопределенный интеграл, вычисленный REDUCEом, содержит $\text{LOG}(x_1 + x_2 - 2)$, но мы знаем, что положительной величиной является $2 - x_1 - x_2$. Спектр фотонов имеет вид

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{32}{9} \frac{\alpha^3 |\psi(0)|^2}{m^2 x(2-x)^2} \times \left[-2 \frac{(1-x)(8-12x+5x^2)}{x(2-x)} \ln(1-x) + 8-12x+7x^2-2x^3 \right]. \quad (14)$$

Наконец, программа вычисляет полную вероятность распада Γ . Несколько проще не интегрировать (14) по x_1 , а вернуться к формуле (13), и заменить в ней скобку на утроенный первый член в силу симметричности интегрирования по диаграмме Далица. При втором интегрировании возникает функция Спенса

$$\text{Sp}(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy. \quad (15)$$

Интегратор REDUCEа не умеет брать интегралы, выражающиеся через $\text{Sp}(x)$, поэтому нужно задать подстановку. Очевидно, $\text{Sp}(0) = 0$; оказывается, $\text{Sp}(-1) = -\pi^6/6$. Полная ширина равна

$$\Gamma = \frac{16}{9} (\pi^2 - 9) \alpha^3 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2}. \quad (16)$$

% e+ e- → 3 гамма при малых энергиях

% -----

MASS P=1,K1=0,K2=0,K3=0;MSHELL P,K1,K2,K3;

VECTOR E1,E2,E3;

LET P.K1=X1,P.K2=X2,P.K3=X3,

K1.K2=2*(1-X3),K1.K3=2*(1-X2),K2.K3=2*(1-X1);

NOSPUR F;

L:=R(-P)*GG(E1)*S(K1-P)*GG(E2)*S(P-K3)*GG(E3)*R(P)

4/4(4*PI)**3/(4*(2*PI)**3)/4*4/3

% подразумевается альфа**3*пси(0)**2

SPUR F;INDEX E1,E2,E3;

GA1:=L*GG(E3)*S(P-K3)*GG(E2)*S(K1-P)*GG(E1)\$

GA2:=L*GG(E2)*S(P-K2)*GG(E3)*S(K1-P)*GG(E1)\$

GA3:=L*GG(E2)*S(P-K2)*GG(E1)*S(K3-P)*GG(E3)\$

GA4:=L*GG(E1)*S(P-K1)*GG(E2)*S(K3-P)*GG(E3)\$

CLEAR L;GA:=GA1+2*GA2+2*GA3+GA4\$CLEAR GA1,GA2,GA3,GA4;

GA:=GA+SUB(X1=X2,X2=X3,X3=X1,GA)+SUB(X1=X3,X2=X1,X3=X2,GA)

+SUB(X2=X3,X3=X2,GA)+SUB(X1=X3,X3=X1,GA)

+SUB(X1=X2,X2=X1,GA)\$

X3:=2-X1-X2\$ON GCD;GA:=GA;

GA:=(16*(X1^4+2*X1^3*X2-4*X1^3+3*X1^2*X2^2-9*X1^2*X2+7
*X1^2+2*X1*X2^3-9*X1*X2^2+13*X1*X2-6*X1+
X2^4-4*X2^3+7*X2^2-6*X2+2))/(X1^2*X2^2*(X1^2+
2*X1*X2-4*X1+X2^2-4*X2+4))

K:=GA/

((1-X1)/(X2*X3))**2+((1-X2)/(X1*X3))**2+((1-X3)/(X1*X2))**2);

32

K:=----

3

FACTOR LOG;GA:=INT(GA,X2)/6; % тождественность

GA:=(32*LOG(X1+X2-2)*X2*(5*X1^4+5*X1^3*X2-27*X1^3-
17*X1^2*X2+54*X1^2+20*X1*X2-48*X1-8*X2+16)
+32*LOG(X2)*X2*(-5*X1^4-5*X1^3*X2+27*X1^3+17*
X1^2*X2-54*X1^2-20*X1*X2+48*X1+8*X2-16)+
32*(-X1^6+8*X1^5+3*X1^4*X2^2-27*X1^4+X1^3*X2^3-
16*X1^3*X2^2+50*X1^3-6*X1^2*X2^3+38*X1^2*X2^2-54*
*X1^2+12*X1*X2^3-44*X1*X2^2+32*X1-8*X2^3+20*
*X2^2-8))/(9*X1^2*X2*(X1^4+X1^3*X2-8*X1^3-6*
X1^2*X2+24*X1^2+12*X1*X2-32*X1-8*X2+16))


```
GA:=SUB(LOG(X1+X2-2)=LOG(2-X1-X2),GA)$
GA:=SUB(X2=1,GA)-SUB(X2=1-X1,GA); % d гамма / d X1

GA:=(64*LOG(-X1+1)*(5*X1^3-17*X1^2+20*X1-8)+32*
X1*(-2*X1^4+11*X1^3-26*X1^2+32*X1-16))/(9*X1^2*
(X1^3-6*X1^2+12*X1-8))

ON FACTOR;DF(GA,LOG(1-X1));SUB(LOG(1-X1)=0,GA);OFF FACTOR;
```

```
64*(5*X1^2-12*X1+8)*(X1-1)
```

```
-----
9*(X1-2)^3*X1^2
```

```
32*(2*X1^3-7*X1^2+12*X1-8)
```

```
-----
9*(X1-2)^2*X1
```

```
% Полная вероятность распада
```

```
GA:=K/6*3*((1-X3)/(X1*X2))*2$
```

```
GA:=INT(GA,X2)$GA:=SUB(X2=1,GA)-SUB(X2=1-X1,GA)$
```

```
OPERATOR SP;LET SP(0)=0,SP(-1)=-PI**2/6;
```

```
FOR ALL X LET INT(LOG(1-X)/X,X)=SP(-X);
```

```
GA:=INT(GA,X1);
```

```
GA:=(32*LOG(-X1+1)*(X1-1)+16*X1*(-2*SP(-X1)-
X1))/(3*X1)
```

```
GA:=SUB(X1=1,GA)-SUB(X1=0,SUB(LOG(1-X1)=-X1,GA));
```

```
16*(PI^2-9)
```

```
GA:=-----
```

```
9
```

Матричные элементы для позитрония. Существует более удобный подход, в котором вычисляются матричные элементы процессов с участием связанных состояний, например, позитрония. Для большей общности, рассмотрим нерелятивистское связанное состояние фермиона и антифермиона с массами m_1 и m_2 (например, $e^- \mu^+$). Их можно считать покоящимися друг относительно друга: $p_1 = m_1 v$, $p_2 = m_2 v$, $v^2 = 1$. Суммирование по их спинам можно производить при помощи соотношения полноты (рис. 11). В нем первый член соответствует псевдоскалярному состоянию ($s=0$), а

Рис. 11. Споровое соотношение полноты.

второй — векторному ($s=1$). Суммирование идет по 3 поляризациям e , ортогональным v . Можно распространить его на все 4 поляризации: $\hat{e} \dots \hat{e} \rightarrow -\gamma_\mu \dots \gamma_\mu$, т. к. временная поляризация $e=v$ вклада не дает.

Докажем это соотношение, подставляя слева и справа полный набор γ матриц:

```
MASS V=1;MSHELL V;VECTOR A,U1,U2,V1,V2,M;
```

```
NOSPUR F;RP:=G(F,V)+1$RM:=G(F,V)-1$GA:=G(F,A)$GM:=G(F,M)$
```

```
ARRAY GU(4),GV(4);
```

```
GU(0):=1$GU(1):=GA$GU(2):=G(F,U1)$GU(3):=G(F,U1,A)$
```

```
GU(4):=G(F,U1,U2)$
```

```
FOR I:=0:4 DO GV(I):=SUB(U1=V1,U2=V2,GU(I));
```

```
SPUR F;
```

```
FOR I:=0:4 DO FOR J:=0:4 DO
```

```
<< X:=GU(I)*RM*GV(J)*RP;
```

```
Y1:=GU(I)*RM*GA*RP;Y2:=GV(J)*RP*GA*RM;Y:=-Y1*Y2/2;
```

```
Y1:=GU(I)*RM*GM*RP;Y2:=GV(J)*RP*GM*RM;
```

```
INDEX M;Y:=Y-Y1*Y2/2;REIND M;
```

```
IF X NEQ Y THEN
```

```
<< NOSPUR F;WRITE GU(I),",",GV(J),":",X,"",Y;SPUR F;>>
```

```
>>;
```

Вероятность распада, просуммированная (а не усредненная) по начальным поляризациям, равна плотности потока $|\psi(0)|^2 v$ на сечение $\Sigma |M|^2 / 4J d\Phi$, где инвариантный поток $J = m_1 m_2 v$:

$$d\Gamma = \frac{|\psi(0)|^2 v}{4J} \text{Sp } M m_1 (\hat{v} + 1) \bar{M} m_2 (\hat{v} - 1) =$$

$$= \frac{1}{32} \sum |\psi(0)|^2 \text{Sp } M (\hat{v} + 1) \Gamma (\hat{v} - 1) |^2. \quad (17)$$

В этой сумме разделены вклады псевдоскалярного ($\Gamma = i\gamma_5$) и векторного ($\Gamma = \hat{e}$) состояний. Мы хотим записать ее в стандартном виде $\sum |\tilde{M}|^2 / 2m \, d\Phi$, где $m = m_1 + m_2$, а $\tilde{M}$ — матричный элемент распада связанного состояния:

$$\tilde{M} = \frac{\sqrt{m}}{4m_1 m_2} \psi(0) \text{Sp } M(\hat{p}_1 + m_1) \Gamma (\hat{p}_2 - m_2). \quad (18)$$

Еще раз напомним: для псевдоскалярного состояния $\Gamma = i\gamma_5$, а для векторного — $\Gamma = \hat{e}$, где e — его вектор поляризации. Поскольку всегда $\Gamma \hat{v} = -\hat{v} \Gamma$, можно упростить (18):

$$\tilde{M} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \psi(0) \text{Sp } M(\hat{p} + m) \Gamma. \quad (19)$$

Однако в таком случае уже нельзя вставлять в сумму временную поляризацию $e = v$.

Отметим, что в ультрарелятивистском случае $(\hat{p} + m) \Gamma \rightarrow i\hat{p}\gamma_5$, $\hat{p}\hat{e}_\perp$ для псевдоскалярного и поперечно поляризованного векторного связанного состояния. В случае продольной поляризации

$$e_\parallel = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}} (m\hat{n} - (\varepsilon/m)\hat{p}),$$

где $\hat{n}$ — временной орт лабораторной системы,

$$(\hat{p} + m)\hat{e}_\parallel = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}} (\varepsilon\hat{p} - m^2\hat{n} + \varepsilon m - m\hat{p}\hat{n}) \rightarrow \hat{p}.$$

Такой вариант формулы (19) широко применяется в КХД для вычисления матричных элементов процессов с ультрарелятивистскими мезонами.

Парапозитроний. В программе n обозначает единичный пространственный вектор в направлении движения первого фотона. Матричный элемент можно записать в трехмерном виде

$$M = 8\sqrt{2} \pi \alpha \psi(0) \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 \times \vec{n}. \quad (20)$$

Поляризации рождающихся фотонов скоррелированы: если один из них линейно поляризован, то другой линейно поляризован в перпендикулярном направлении; если один циркулярно поляризован, то другой циркулярно поляризован с противоположной проекцией момента на $\vec{n}$, т. е. с той же спиральностью. Можно ввести эффективную вершину распада ортопозитрония (обозначим его

поле φ) на 2 фотона

$$2\sqrt{2} \pi \alpha \psi(0) \cdot \varphi F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (21)$$

из которой воспроизводится (20).

Возведение матричного элемента в квадрат и домножение на необходимые множители (не забудьте о тождественности 2 фотонов!) дает полную вероятность

$$\Gamma = 4\pi\alpha^2 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2}. \quad (22)$$

% ПАРАПОЗИТРОНИЙ

% -----

MASS P=1,N=I;MSHELL P,N;LET P,N=0;

VECTOR K1,K2,E1,E2;K1:=P+N\$K2:=P-N\$

M:=2**(3/2)*I*4*PI*G(F,E2)*S(P-K1)*G(F,E1)*R(P)*G(F,A)\$

% подразумевается альфа*пси(0)

M:=M+SUB(N=-N,E1=E2,E2=E1,M);

M:=8*SQRT(2)*EPS(N,P,E2,E1)*PI

INDEX E1,M*K1.E1;REMIND E1; % тождество Уорда

0

INDEX E1,E2;GA:=M*M/4/(8*PI)/2;

GA:=4*PI

Ортопозитроний. Программа вычисляет матричный элемент распада ортопозитрония на 3 фотона. Можно ввести эффективную вершину распада. Обозначим поле ортопозитрония $\mathcal{A}_\mu$. Тогда возможны 2 структуры: $\mathcal{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ и $\mathcal{F}_{\mu\nu} F_{\nu\rho} F_{\rho\sigma} F_{\sigma\mu}$, где $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$. Вместо второй из них можно выбрать $\mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\rho\sigma}$, где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$. Прямой проверкой убеждаемся, что матричный элемент соответствует сумме этих структур:

$$\frac{(2\pi\alpha)^{3/2} \psi(0)}{x_1 x_2 x_3} (\mathcal{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\rho\sigma}). \quad (23)$$

Дальнейшие вычисления проведем в трехмерной форме. Матричный элемент

$$M = 4(2\pi\alpha)^{3/2} \psi(0) [\vec{e} \cdot \vec{e}_1 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 - \vec{e}_2 \times \vec{n}_2 \cdot \vec{e}_3 \times \vec{n}_3) + \vec{e} \cdot \vec{e}_1 \times \vec{n}_1 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \times \vec{n}_3 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{n}_2) + \text{цикл}] \quad (24)$$

Возведение в квадрат со сверткой по e_1, e_2, e_3 дает вероятность распада поляризованного ортопозитрония

$$\frac{d\Gamma}{dx_1 dx_2} = 16\alpha^3 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2} \left[\left(\frac{1-x_1}{x_2 x_3} \right)^2 (1 - |\vec{e} \cdot \vec{n}_1|^2) + \left(\frac{1-x_2}{x_1 x_3} \right)^2 (1 - |\vec{e} \cdot \vec{n}_2|^2) + \left(\frac{1-x_3}{x_1 x_2} \right)^2 (1 - |\vec{e} \cdot \vec{n}_3|^2) \right]. \quad (25)$$

Усреднение по $\vec{e}$ дает нам формулу (13). Заметим, что вероятность распада (25) обращается в 0 для линейно-поляризованного позитрония, когда все 3 фотона летят вдоль $\vec{e}$. Это объясняется тем, что проекция момента позитрония на e равна 0, а сумма проекций моментов фотонов $\pm 1 \pm 1 \pm 1$ не может быть нулевой.

Спектрально-угловое распределение фотонов должно иметь вид

$$4\pi \frac{d\Gamma}{dx d\Omega} = \frac{d\Gamma_{\parallel}}{dx} |\vec{e} \cdot \vec{n}|^2 + \frac{d\Gamma_{\perp}}{dx} (1 - |\vec{e} \cdot \vec{n}|^2). \quad (26)$$

Его усреднение по $\vec{e}$ или по углам дает (14):

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{1}{3} \left(\frac{d\Gamma_{\parallel}}{dx} + 2 \frac{d\Gamma_{\perp}}{dx} \right). \quad (27)$$

Найдем спектр фотонов, летящих вдоль $\vec{e}$:

$$\frac{d\Gamma_{\parallel}}{dx} = \frac{16}{9} \frac{\alpha^3 |\psi(0)|^2 (1-x)}{m^2 x^3 (2-x)^2} \times \left[-\frac{x^4 + 3(2-x)^4}{x(2-x)} \ln(1-x) - 2(x^2 + 3(2-x)^2) \right]. \quad (28)$$

Он обращается в 0 при $x \rightarrow 1$, т. к. в этом случае все 3 фотона должны лететь вдоль $\vec{e}$.

% ОРТОПОЗИТРОНИЙ

% -----

MASS P=1,K1=0,K2=0,K3=0;MSHELL P,K1,K2,K3;VECTOR P,E,E1,E2,E3;

LET K1.K2=2*(1-X3),K1.K3=2*(1-X2),K2.K3=2*(1-X1),

P.K1=X1,P.K2=X2,P.K3=X3,

P.E1=0,P.E2=0,P.E3=0,P.E=0,K3.E=-K1.E-K2.E,

K1.E1=0,K2.E1=-K3.E1,

K2.E2=0,K3.E2=-K1.E2,

K3.E3=0,K1.E3=-K2.E3;

M:=(8*PI)**(3/2)

*GG(E3)*S(K3-P)*GG(E2)*S(P-K1)*GC(E1)*R(P)*GG(F)\$

M:=M

+SUB(K1=K2,E1=E2,X1=X2,K2=K3,E2=E3,X2=X3,

K3=K1,E3=E1,X3=X1,M)

+SUB(K1=K3,E1=E3,X1=X3,K2=K1,E2=E1,X2=X1,

K3=K2,E3=E2,X3=X2,M)

+SUB(K1=K2,E1=E2,X1=X2,K2=K1,E2=E1,X2=X1,M)

+SUB(K1=K3,E1=E3,X1=X3,K3=K1,E3=E1,X3=X1,M)

+SUB(K2=K3,E2=E3,X2=X3,K3=K2,E3=E2,X3=X2,M)\$

X3:=2-X1-X2\$ON GCD,M:=M;

M:=- (16*SQRT(PI)*SQRT(2)*PI*(2*E.E3*E2.E1*X1*X2 - 2*E.E3

*E2.E1*X1 - 2*E.E3*E2.E1*X2 + 2*E.E3*E2.E1 - E.

E3*E2.K1*E1.K3 - 2*E.E2*E3.E1*X1² - 2*E.E2*E3.E1

*X1*X2 + 4*E.E2*E3.E1*X1 + 2*E.E2*E3.E1*X2 - 2*E

.E2*E3.E1 - E.E2*E3.K2*E1.K3 - 2*E.E1*E3.E2*X1.

X2 + 2*E.E1*E3.E2*X1 - 2*E.E1*E3.E2*X2² + 4*E.E1

*E3.E2*X2 - 2*E.E1*E3.E2 - E.E1*E3.K2*E2.K1 + E.

K2*E3.E2*E1.K3*X1 + E.K2*E3.E1*E2.K1*X1 - E.K2*

E3.E1*E2.K1 + E.K2*E3.K2*E2.E1*X1 - E.K2*E3.K2*

E2.E1 - E.K1*E3.E2*E1.K3*X2 + E.K1*E3.E2*E1.K3 -

E.K1*E3.E1*E2.K1*X2 - E.K1*E3.K2*E2.E1*X2 + E.

K1*E3.K2*E2.E1)/(X1*X2*(X1 + X2 - 2))

OPERATOR F,H;VECTOR J=P,J=V,J=M,J=N;

FOR ALL P,V,M,N LET F(P,V,M,N)=P.M*V.N-P.N*V.M,

H(P,V,M,N)=EPS(P,V,M,N);

INDEX L1,L2,M1,M2;

MF:=F(P,E,M1,M2)*F(K1,E1,M1,M2)*F(K2,E2,L1,L2)*F(K3,E3,L1,L2)

+F(P,E,M1,M2)*F(K2,E2,M1,M2)*F(K1,E1,L1,L2)*F(K3,E3,L1,L2)

+F(P,E,M1,M2)*F(K3,E3,M1,M2)*F(K1,E1,L1,L2)*F(K2,E2,L1,L2);

MF:=- 4*(2*E.E3*E2.E1*X1² + 4*E.E3*E2.E1*X1*X2 - 6*E.E3*

E2.E1*X1 + 2*E.E3*E2.E1*X2² - 6*E.E3*E2.E1*X2 +

4*E.E3*E2.E1 + E.E3*E2.K1*E1.K3*X1 + E.E3*E2.K1*

E1.K3*X2 - 2*E.E3*E2.K1*E1.K3 + 2*E.E2*E3.E1*X2²

- 2*E.E2*E3.E1*X2 - E.E2*E3.K2*E1.K3*X2 + 2*E.

E1*E3.E2*X1² - 2*E.E1*E3.E2*X1 - E.E1*E3.K2*E2.

K1*X1)


```

MH:=H(P,E,M1,M2)*F(K1,E1,M1,M2)*H(K2,E2,L1,L2)*F(K3,E3,L1,L2)
+H(P,E,M1,M2)*F(K2,E2,M1,M2)*H(K1,E1,L1,L2)*F(K3,E3,L1,L2)
+H(P,E,M1,M2)*F(K3,E3,M1,M2)*H(K1,E1,L1,L2)*F(K2,E2,L1,L2);

MH:=4*(2*E.E3*E2.E1*X1^2+8*E.E3*E2.E1*X1*X2-10*E.E3*E2.
E1*X1+2*E.E3*E2.E1*X2^2-10*E.E3*E2.E1*X2+8*E.
E3*E2.E1+E.E3*E2.K1*E1.K3*X1+E.E3*E2.K1*E1.K3*
X2-4*E.E3*E2.K1*E1.K3-4*E.E2*E3.E1*X1^2-4*E.E2
*E3.E1*X1*X2+8*E.E2*E3.E1*X1+2*E.E2*E3.E1*X2^2+
2*E.E2*E3.E1*X2-4*E.E2*E3.E1-E.E2*E3.K2*E1.K3*
X2-2*E.E2*E3.K2*E1.K3+2*E.E1*E3.E2*X1^2-4*E.E1
*E3.E2*X1*X2+2*E.E1*E3.E2*X1-4*E.E1*E3.E2*X2^2+
8*E.E1*E3.E2*X2-4*E.E1*E3.E2-E.E1*E3.K2*E2.K1*
X1-2*E.E1*E3.K2*E2.K1+2*E.K2*E3.E2*E1.K3*X1+2
*E.K2*E3.E1*E2.K1*X1-2*E.K2*E3.E1*E2.K1+2*E.K2*
E3.K2*E2.E1*X1-2*E.K2*E3.K2*E2.E1-2*E.K1*E3.E2*
E1.K3*X2+2*E.K1*E3.E2*E1.K3-2*E.K1*E3.E1*E2.K1*
X2-2*E.K1*E3.K2*E2.E1*X2+2*E.K1*E3.K2*E2.E1)

K:=M/(MF+MH);

2*SQRT(PI)*SQRT(2)*PI
K:=-
X1*X2*(X1+X2-2)

VECDIM 3;
MASS N1=1,N2=1,N3=1;MSHELL N1,N2,N3;VECTOR E,E1,E2,E3;INDEX L;
M:=K*4*X1*X2*X3*
(E.E1*(E2.E3-EP(L,E2,N2)*EP(L,E3,N3))
+EP(E,E1,N1)*(EP(E2,E3,N3)+EP(E3,E2,N2)))$
M:=SUB(E1=E1-E1.N1*N1,E2=E2-E2.N2*N2,E3=E3-E3.N3*N3,M)$
M:=M
+SUB(N1=N2,E1=E2,N2=N3,E2=E3,N3=N1,E3=E1,M)
+SUB(N1=N3,E1=E3,N2=N1,E2=E1,N3=N2,E3=E2,M)$
VECTOR EC;LET E.EC=1;INDEX E1,E2,E3;
GA:=M*SUB(E=EC,M)/4/(4*(2*PI)**3)$
LET N1.N2=(X3**2-X1**2-X2**2)/(2*X1*X2),
N1.N3=(X2**2-X1**2-X3**2)/(2*X1*X3),
N2.N3=(X1**2-X2**2-X3**2)/(2*X2*X3);
LET N3.E=-(X1*N1.E+X2*N2.E)/X3,N3.EC=-(X1*N1.EC+X2*N2.EC)/X3;

```

```

GA:=GA;
GA:=-
(16*(E.N2*EC.N2*X1^2*X2^2+2*E.N2*EC.N2*X1*X2^3-2*E.
N2*EC.N2*X1*X2^2+2*E.N2*EC.N2*X2^4-4*E.N2*
EC.N2*X2^3+2*E.N2*EC.N2*X2^2+E.N2*EC.N1*X1^3*
X2+2*E.N2*EC.N1*X1^2*X2^2-2*E.N2*EC.N1*X1^2*
X2+E.N2*EC.N1*X1*X2^3-2*E.N2*EC.N1*X1*X2^2+
E.N2*EC.N1*X1*X2+E.N1*EC.N2*X1^3*X2+2*E.N1
*EC.N2*X1^2*X2^2-2*E.N1*EC.N2*X1^2*X2+E.N1*EC.
N2*X1*X2^3-2*E.N1*EC.N2*X1*X2^2+E.N1*EC.N2*
X1*X2+2*E.N1*EC.N1*X1^4+2*E.N1*EC.N1*X1^3*X2
-4*E.N1*EC.N1*X1^3+E.N1*EC.N1*X1^2*X2^2-2*E.
N1*EC.N1*X1^2*X2+2*E.N1*EC.N1*X1^2-2*X1^4-
4*X1^3*X2+8*X1^3-6*X1^2*X2^2+18*X1^2*X2-14*
X1^2-4*X1*X2^3+18*X1*X2^2-26*X1*X2+12*X1
-2*X2^4+8*X2^3-14*X2^2+12*X2-4)/(X1^2*
X2^2*(X1^2+2*X1*X2-4*X1+X2^2-4*X2+4))

K:=GA/
(((1-X1)/(X2*X3))**2*(1-N1.E*N1.EC)
+((1-X2)/(X1*X3))**2*(1-N2.E*N2.EC)
+((1-X3)/(X1*X2))**2*(1-N3.E*N3.EC));
K:=16
GL:=SUB(E=N1,EC=N1,GA);% первый фотон вдоль E
GL:=(64*(X1^4*X2-X1^4+3*X1^3*X2^2-7*X1^3*X2+4*X1^3+4*
X1^2*X2^3-15*X1^2*X2^2+18*X1^2*X2-7*X1^2+2*X1*
X2^4-12*X1*X2^3+24*X1*X2^2-20*X1*X2+6*X1-2
*X2^4+8*X2^3-12*X2^2+8*X2-2))/(X1^4*X2^2*(X1^2
+2*X1*X2-4*X1+X2^2-4*X2+4))
FACTOR LOG;GL:=INT(GL,X2)/6$
GL:=SUB(LOG(X1+X2-2)=LOG(2-X1-X2),GL)$
GL:=SUB(X2=1,GL)-SUB(X2=1-X1,GL);

```


$$GL := - (64 * \text{LOG}(-X1 + 1) * (X1^5 - 7 * X1^4 + 24 * X1^3 - 42 * X1^2 + 36 * X1 - 12) + 128 * X1 * (-X1^4 + 6 * X1^3 - 14 * X1^2 + 15 * X1 - 6)) / (3 * X1^4 * (X1^3 - 6 * X1^2 + 12 * X1 - 8))$$

ON FACTOR; DF(GL, LOG(1 - X1)); SUB(LOG(1 - X1) = 0, GL);

$$64 * (X1^4 - 6 * X1^3 + 18 * X1^2 - 24 * X1 + 12) * (X1 - 1)$$

$$3 * (X1 - 2)^3 * X1^4$$

$$128 * (X1^2 - 3 * X1 + 3) * (X1 - 1)$$

$$3 * (X1 - 2)^2 * X1^3$$

Задача. Исследуйте поляризацию фотона в распаде поляризованного ортопозитрония.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hearn A.C. REDUCE User's Manual. Rand Corporation, 1987.
2. Грозин А.Г. Препринты ИЯФ 88-118, 136, 140, 1988.
3. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Пятаевский Л.П. Квантовая электродинамика. Наука, 1989.
4. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. Наука, 1981.
5. Грозин А.Г. Препринт ИЯФ 90-42, 1990.

А.Г. Грозин

Система REDUCE
в физике элементарных частиц.
Квантовая электродинамика

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 26 июня 1990 г.
Подписано в печать 2.07.90 г. МН 02369
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3,8 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 71

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротаприте Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.