

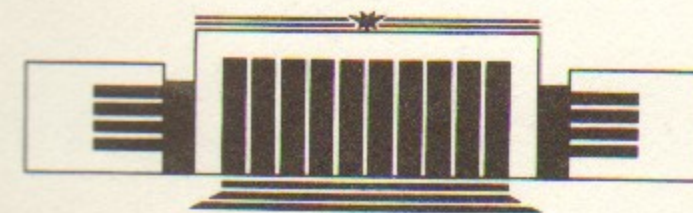


43
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Г. Грозин

**СИСТЕМА REDUCE В ФИЗИКЕ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**
Квантовая хромодинамика

ПРЕПРИНТ 90-62



НОВОСИБИРСК

Система REDUCE
в физике элементарных частиц
Квантовая хромодинамика

А.Г. Грозин

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Настоящий препринт представляет собой четвертую часть пособия по применению языка аналитических вычислений REDUCE для вычисления сечений рассеяния и вероятностей распада в физике элементарных частиц. Он содержит примеры вычислений по теории возмущений в квантовой хромодинамике.

REDUCE IN ELEMENTARY
PARTICLE PHYSICS
Quantum Chromodynamics

A.G. Grozin

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, USSR

ABSTRACT

This preprint is the fourth part of the problem book on using REDUCE for calculations of cross sections and decay probabilities in elementary particle physics. It contains examples of perturbative calculations in quantum chromodynamics.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

1. ДИАГРАММЫ ФЕЙНМАНА В КХД

Введение. Настоящий препринт посвящен применению языка аналитических вычислений REDUCE [1, 2] в квантовой хромодинамике. Он продолжает серию [3]; ссылки на эти препринты обозначаются I-III. Мы ограничимся примерами вычислений в теории возмущений. Существует ряд подходов, в которых предпринимаются попытки выйти за ее рамки (правила сумм, моделирование на решетке). Мы не имеем возможности их здесь рассматривать. Заметим только, что вычислительные методы, применяемые в правилах сумм, основаны на диаграммной технике и близки к методам вычислений в теории возмущений.

В настоящее время существует несколько учебников, полностью [4, 5] или частично [6—11] посвященных КХД. Однако в них недостаточно подробно представлены расчеты конкретных процессов в теории возмущений. Поэтому для более подробного ознакомления с вопросами, обсуждаемыми в этом препринте, читатель должен обратиться к обзорам [12—17] и цитированным в них оригинальным работам. Прекрасное изложение теории групп, ориентированное на применения в квантовой теории поля, содержится в [18].

Кварковые поля q_a имеют цветовой индекс. Число цветов равно 3, но мы будем выписывать все формулы для произвольного числа цветов N_c . Теория симметрична относительно преобразований $q \rightarrow Uq$, где U — унитарные матрицы $N_c \times N_c$ с $\det U = 1$. Эти преобразования образуют группу $SU(N_c)$. Бесконечно малые преобразования $U = 1 + i\alpha^a t^a$, где t^a — генераторы. Из $U^\dagger U = 1 + i\alpha^a(t^{a\dagger} - t^a) = 1$ следует, что t^a эрмитовы; из $\det U = 1 + i\alpha^a \text{Sp } t^a = 1$ следует $\text{Sp } t^a = 0$. Коммутатор $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$, где f^{abc} — структурные константы. Генераторы нормированы условием $\text{Sp } t^a t^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}$.

Цветовая симметрия является локальной. Для этого в лагранжиане свободного кваркового поля $\bar{q}(i\hat{D} - m)q$ обычная производная $\partial_\mu q$ заменяется на ковариантную $D_\mu q = (\partial_\mu - igA_\mu)q$, где $A_\mu = A_\mu^a t^a$ — глюонное поле. Добавляется также лагранжиан этого поля $-\frac{1}{2} \text{Sp } F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, где напряженность поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^a t^a$. Итак, лагранжиан КХД имеет вид

$$L = \bar{q}(i\hat{D} - m)q - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (1)$$

$$D_\mu q = (\partial_\mu - ig A_\mu^a t^a)q, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

Пропагатор кварка имеет такой же вид, как пропагатор электрона (I.3.6), только в нем подразумевается единичная цветовая матрица. Пропагатор глюона имеет такой же вид, как пропагатор фотона (I.3.5), с добавлением δ^{ab} . Вершины, следующие из (1), изображены на рис. 1. На самом деле имеются некоторые тонкости, существенные при наличии глюонных петель. Мы их рассмотрим позднее.

Вычисление цветовых множителей на REDUCE. Задача вычисления любой диаграммы в КХД разбивается на 2 подзадачи: вычисление цветового множителя и остальной части диаграммы. При вычислении цветового множителя кварк-глюонной вершине сопоставляется t^a , а 3-глюонной — if^{abc} ; при вычислении остальной части — другие множители выражений на рис. 1. При этом не надо забывать, что если в цветовой части диаграммы концы 3-глюонной вершины перечислены, например, по часовой стрелке, то и в остальной части их нужно брать в том же порядке. Диаграмму с 4-глюонной вершиной приходится разбивать на три. Цвет-

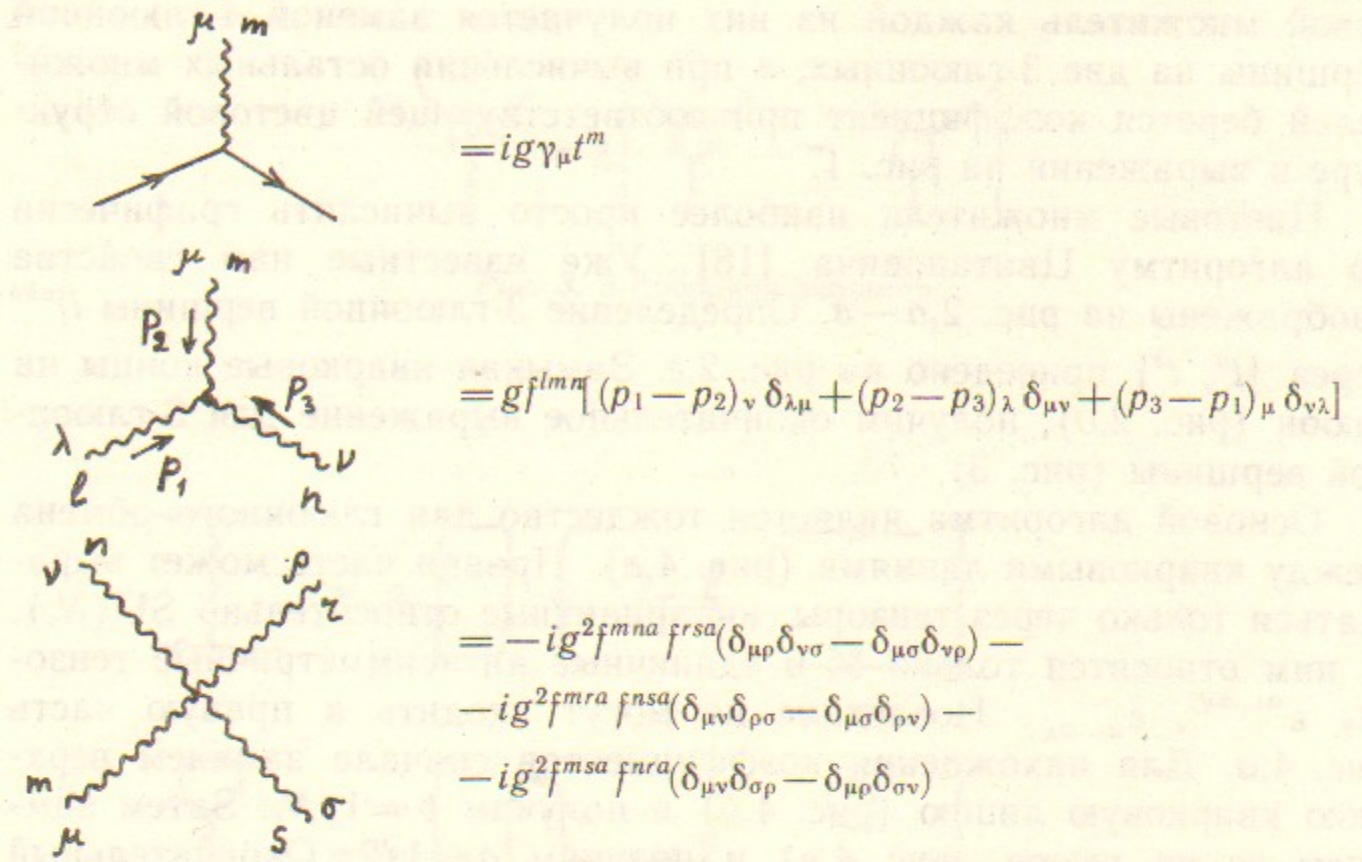


Рис. 1. Правила Фейнмана в КХД.

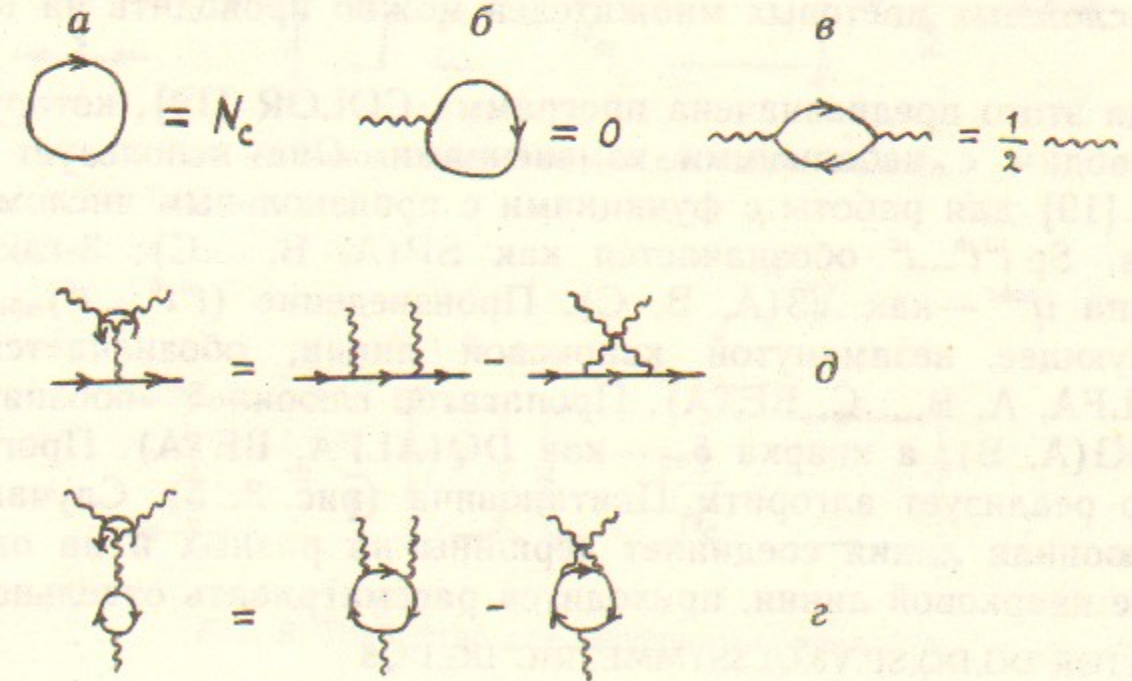


Рис. 2. Свойства генераторов t^a .

товой множитель каждой из них получается заменой 4-глюонной вершины на две 3-глюонных, а при вычислении остальных множителей берется коэффициент при соответствующей цветовой структуре в выражении на рис. 1.

Цветовые множители наиболее просто вычислять графически по алгоритму Цвитановича [18]. Уже известные нам свойства изображены на рис. 2, а—в. Определение 3-глюонной вершины if^{abc} через $[t^a, t^b]$ приведено на рис. 2, г. Замыкая кварковые концы на глюон (рис. 2, д), получим окончательное выражение для 3-глюонной вершины (рис. 3).

Основой алгоритма является тождество для глюонного обмена между кварковыми линиями (рис. 4, а). Правая часть может выражаться только через тензоры, инвариантные относительно $SU(N_c)$. К ним относятся только $\delta_{\alpha\beta}^b$ и единичные антисимметричные тензоры $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{N_c}}$, $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{N_c}}$. Последние не могут входить в правую часть рис. 4, а. Для нахождения коэффициентов сначала замкнем верхнюю кварковую линию (рис. 4, б) и получим $b=1/N_c$. Затем замкнем ее на глюон (рис. 4, в) и получим $a=1/2$. Окончательный вид тождества показан на рис. 5.

Теперь можно сформулировать алгоритм Цвитановича. Он состоит в исключении 3-глюонных вершин (рис. 3) и внутренних глюонных линий (рис. 5). В простых случаях его легко применять вручную. В качестве простейшего примера, посчитаем число глюонов (рис. 6). Еще несколько задач решены на рис. 7. Вычисление более сложных цветовых множителей можно проводить на REDUCE.

Для этого предназначена программа COLOR [19], которую мы и приводим с небольшими изменениями. Она использует пакет LETT [19] для работы с функциями с произвольным числом аргументов. $\text{Sp } t^a t^b \dots t^c$ обозначается как $\text{SP}(A, B, \dots C)$; 3-глюонная вершина if^{abc} — как $\text{V3}(A, B, C)$. Произведение $(t^a t^b \dots t^c)_{\alpha\beta}$, соответствующее незамкнутой кварковой линии, обозначается как $\text{QL}(\text{ALFA}, A, B, \dots C, \text{BETA})$. Пропагатор глюона δ^{ab} обозначается как $\text{DG}(A, B)$, а кварка $\delta_{\alpha\beta}$ — как $\text{DQ}(\text{ALFA}, \text{BETA})$. Программа просто реализует алгоритм Цвитановича (рис. 3, 5). Случаи, когда глюонная линия соединяет вершины на разных и на одной и той же кварковой линии, приходится рассматривать отдельно.

OPERATOR DG,DQ,SP,V3,QL\$SYMMETRIC DG,DQ\$

NG:=NC**2-1\$ % число глюонов

% DG(A,B) и DG(B,A) заменяют индекс B на A

Рис. 3. 3-глюонная вершина.

Рис. 4. Вывод тождества для глюонного обмена.

Рис. 5. Тождество для глюонного обмена.

$$N_g = \text{diagram} = 2 \text{diagram} = 2 \text{diagram} = \text{diagram} - \frac{1}{N_c} \text{diagram} = N_c^2 - 1$$

Рис. 6. Вычисление числа глюонов.

$$\text{diagram} = \frac{1}{2} \left[\text{diagram} - \frac{1}{N_c} \text{diagram} \right] = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \text{diagram} \quad a$$

$$\text{diagram} = \frac{1}{2} \left[\text{diagram} - \frac{1}{N_c} \text{diagram} \right] = -\frac{1}{2N_c} \text{diagram} \quad b$$

$$\text{diagram} = 2 \left[\text{diagram} - \text{diagram} \right] =$$

$$\text{diagram} - \frac{1}{N_c} \text{diagram} - \text{diagram} + \frac{1}{N_c} \text{diagram} =$$

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram} - \frac{1}{N_c} \text{diagram} - \text{diagram} + \frac{1}{N_c} \text{diagram} \right] = \frac{N_c}{2} \text{diagram} \quad b$$

$$\text{diagram} = 8 \left[\text{diagram} - \text{diagram} \right] =$$

$$4 \left[\text{diagram} - \frac{1}{N_c} \text{diagram} - \text{diagram} + \frac{1}{N_c} \text{diagram} \right] =$$

$$2 \left[\text{diagram} - \frac{1}{N_c} \text{diagram} - \text{diagram} + \frac{1}{N_c} \text{diagram} \right] = N_c \text{diagram} \quad z$$

Рис. 7. Примеры применения алгоритма Цвитановича.

% в тех выражениях, которые его содержат.

FOR ALL A,B,U SUCH THAT NOT FREEOF(U,B) LET

DG(A,B)*U = SUB(B=A,U), DG(B,A)*U = SUB(B=A,U),

DQ(A,B)*U = SUB(B=A,U), DQ(B,A)*U = SUB(B=A,U) \$ % DQ аналогично

% их свертки дают число глюонов и кварков

FOR ALL A,B LET DG(A,B)**2 = NG, DQ(A,B)**2 = NC\$

FOR ALL A LET DG(A,A) = NG, DQ(A,A) = NC\$

% 3-глюонная вершина

FOR ALL A,B,C LET V3(A,B,C) = 2*(SP(A,B,C) - SP(C,B,A))\$

% простые шпуры

LET SP() = NC\$ FOR ALL A LET SP(A) = 0\$

FOR ALL A,B LET SP(A,B) = DG(A,B)/2\$

% склеивание кварковых линий

FOR ALL X,Y,Z,&A,&B LET QL(X,&A,Y)*QL(Y,&B,Z) = QL(X,&A,&B,Z)\$

FOR ALL X,&A LET QL(X,&A,X) = SP(&A)\$

% алгоритм Цвитановича: исключение глюонных обменов

FOR ALL &A,&B,&C,&D,X LET SP(&A,X,&B)*SP(&C,X,&D)

= (SP(&A,&D,&C,&B) - SP(&A,&B)*SP(&C,&D)/NC)/2\$

FOR ALL &A,&B,&C,&D,X,A,B LET QL(A,&A,X,&B,B)*SP(&C,X,&D)

= (QL(A,&A,&D,&C,&B,B) - QL(A,&A,&B,B)*SP(&C,&D)/NC)/2\$

FOR ALL &A,&B,&C,&D,X,A,B,C,D LET QL(A,&A,X,&B,B)*QL(C,&C,X,&D,D)

= (QL(A,&A,&D,D)*QL(C,&C,&B,B) - QL(A,&A,&B,B)*QL(C,&C,&D,D)/NC)/2\$

FOR ALL &A,&B,&C,X LET SP(&A,X,&B,X,&C)

= (SP(&B)*SP(&A,&C) - SP(&A,&B,&C)/NC)/2\$

FOR ALL &A,&B,&C,X,A,C LET QL(A,&A,X,&B,X,&C,C)

= (QL(A,&A,&C,C)*SP(&B) - QL(A,&A,&B,&C,C)/NC)/2\$

FOR ALL &A,X LET SP(&A,X)**2

= (SP(&A,&A) - SP(&A)**2/NC)/2\$

END\$



Рис. 8. Цветовые шпуры.

Начнем с простых примеров вычисления цветовых шпуров (рис. 8):

SP(); SP(A,A); SP(A,A,B,B); SP(A,B,A,B);

NC

$$\frac{NC^2 - 1}{2}$$

$$\frac{NC^4 - 2*NC^2 + 1}{4*NC}$$

$$\frac{NC^2 - 1}{4*NC}$$

$$SP(A,A,B,B,C,C); SP(A,A,B,C,B,C); SP(A,B,C,A,B,C);$$

$$\frac{NC^6 - 3*NC^4 + 3*NC^2 - 1}{8*NC^2}$$

$$\frac{NC^4 - 2*NC^2 + 1}{8*NC^2}$$

$$NC^4 - 1$$

$$8*NC^2$$

$$8*NC^2$$

Чем отличается закон Кулона для тяжелых кварка и антикварка в КХД от обычного случая КЭД? Если кварк-антикварковая пара находится в бесцветном состоянии, например, рождена фотоном (не показанным на рис. 9,а), то диаграмма с глюонным обменом отличается от диаграммы без обмена цветовым множителем

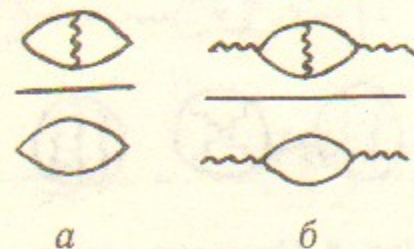


Рис. 9. Взаимодействие кварк-антикварковой пары в синглетном и октетном состояниях.

$C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$. Поэтому они притягиваются по закону Кулона с $\alpha \rightarrow C_F \alpha_s$. Если же кварк-антикварковая пара имеет цвет глюона (рис. 9,б), то дополнительный цветовой множитель $-1/2N_c$ отрицателен; они отталкиваются по закону Кулона с $\alpha \rightarrow -\alpha_s/2N_c$.

$$SP(A,A)/SP(); SP(A,C,B,C)/SP(A,B);$$

$$NC^2 - 1$$

$$2*NC$$

$$1$$

$$2*NC$$

Еще один цветовой шпур (рис. 10,а):

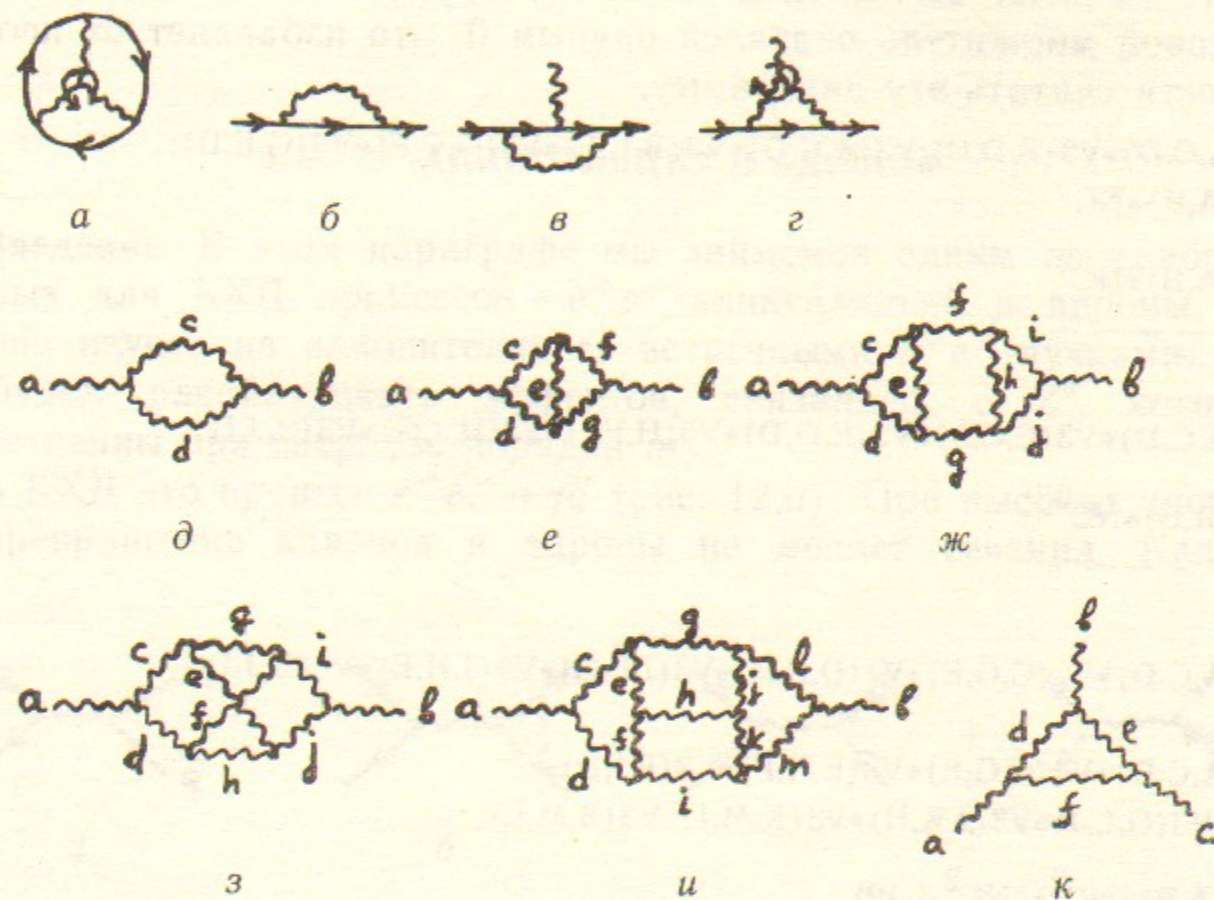


Рис. 10. Примеры применения программы COLOR.

$$SP(A,B,C)*V3(A,B,C);$$

$$NC*(NC^2 - 1)$$

$$4$$

Посмотрим теперь несколько простых примеров с незамкнутой кварковой линией (рис. 10,б—г):

$$QL(X,A,A,Y); QL(X,B,A,B,Y); QL(X,B,C,Y)*V3(A,B,C);$$

$$QL(X,Y)*(NC^2 - 1)$$

$$2*NC$$

$$QL(X,A,Y)$$

$$2*NC$$

$$QL(X,A,Y)*NC$$

$$2$$

Теперь перейдем к диаграммам для поправок к глюонному пропагатору (рис. 10,д—и) и 3-глюонной вершине (рис. 10,к). Некоторые из этих вычислений довольно трудоемки. В одном случае цветовой множитель оказался равным 0, что избавляет от необходимости считать эту диаграмму.

$$V3(A,C,D)*V3(B,D,C); V3(A,C,D)*V3(B,E,F)*V3(G,C,F)*V3(G,E,D);$$

$$DG(A,B)*NC$$

$$DG(A,B)*NC^2$$

$$2$$

$$V3(A,C,D)*V3(E,C,F)*V3(E,G,D)*V3(H,F,I)*V3(H,J,G)*V3(B,J,I);$$

$$DG(A,B)*NC^3$$

$$4$$

$$V3(A,C,D)*V3(C,G,E)*V3(D,F,H)*V3(I,F,G)*V3(J,H,E)*V3(B,J,I);$$

$$0$$

$$V3(A,C,D)*V3(C,G,E)*V3(E,H,F)*V3(F,I,D)*$$

$$V3(G,L,J)*V3(J,K,H)*V3(K,M,I)*V3(B,M,L);$$

$$DG(A,B)*NC^2*(NC^2+12)$$

$$8$$

$$V3(A,D,E)*V3(B,F,D)*V3(C,E,F)/V3(A,B,C);$$

$$NC$$

$$2$$

$$\text{Diagram} = 2 \left[\text{Diagram a} + \text{Diagram б} \right]$$

Рис. 11. Симметричный цветовой тензор.

Наконец, кроме антисимметричного тензора $if^{abc} = = 2 \text{ Sp } (t^a t^b t^c - t^c t^b t^a)$ бывает полезен симметричный тензор $d^{abc} = = 2 \text{ Sp } (t^a t^b t^c + t^c t^b t^a)$ (обозначенный кружочком на рис. 11,а). Вычислим $d^{acd} d^{bcd}$ (рис. 11,б):

OPERATOR S3;FOR ALL A,B,C LET S3(A,B,C)=2*(SP(A,B,C)+SP(C,B,A));

S3(A,C,D)*S3(B,C,D);

DG(A,B)*(NC²-4)

NC

2. e^+e^- -АННИГИЛЯЦИЯ В АДРОНЫ

Введение. В этом параграфе мы займемся одним из наиболее важных для КХД процессов — e^+e^- -аннигиляцией в адроны. Он хорошо изучен на накопителях со встречными e^+e^- -пучками. Мы не будем рассматривать эффектов, связанных с Z^0 , которые существенны при энергиях порядка m_Z .

В КХД это процесс $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ (рис. 12,а). При высоких энергиях превращение кварков в адроны не меняет сечения. Кварки

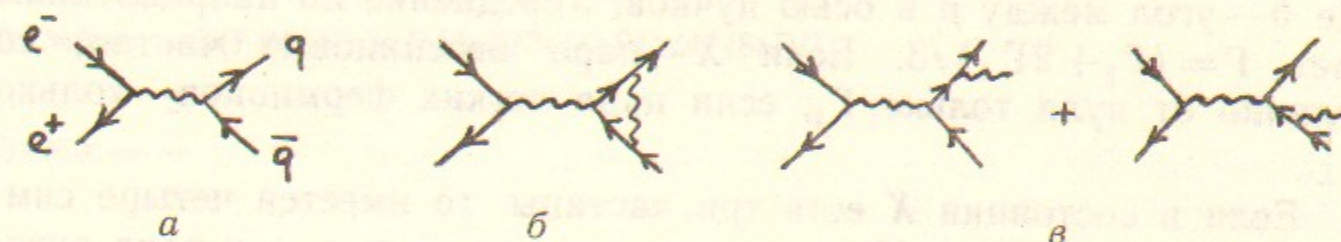


Рис. 12. Диаграммы процесса $e^+e^- \rightarrow$ адроны.

отличаются от мюонов только зарядом и наличием цвета, поэтому

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_c \sum q^2. \quad (1)$$

К этому сечению имеются поправки: интерференция диаграмм рис. 12,а и 12,б, и $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ (рис. 12,в). Как мы покажем далее,

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{3}{4} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \right). \quad (2)$$

Вместо сечений $e^+e^- \rightarrow X$ удобно вычислять пропорциональные им ширины распада виртуального фотона $\gamma^* \rightarrow X$. Он частично поляризован: в случае неполяризованных e^+e^- -пучков — в плоскости, перпендикулярной их оси; при полной поперечной поляризации — по биссектрисе между направлениями поляризации e^+ и e^- ; при полной продольной поляризации — циркулярно (см. II.1).

Если в состоянии X есть две частицы, т. е. один выделенный импульс $\vec{p}$, то $\bar{e}ie_j^*$ можно свернуть с двумя структурами δ_{ij} и $p_i p_j$. В этом случае продольная поляризация ничего не дает. Все определяется двумя величинами $\Gamma_{\parallel}$ и $\Gamma_{\perp}$ (при $\vec{e} \parallel \vec{p}$ и $\vec{e} \perp \vec{p}$). При линейно поляризованном γ^* :

$$4\pi \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \Gamma_{\parallel} \cos^2 \alpha + \Gamma_{\perp} \sin^2 \alpha,$$

где α — угол между $\vec{p}$ и $\vec{e}$; для неполяризованных e^+e^- -пучков

$$4\pi \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \Gamma_{\perp} \cos^2 \theta + \frac{\Gamma_{\parallel} + \Gamma_{\perp}}{2} \sin^2 \theta,$$

где θ — угол между $\vec{p}$ и осью пучков. Усреднение по направлениям дает $\Gamma = (\Gamma_{\parallel} + 2\Gamma_{\perp})/3$. Если X — пара бесспиновых частиц, то отлично от нуля только $\Gamma_{\parallel}$; если пара легких фермионов — только $\Gamma_{\perp}$.

Если в состоянии X есть три частицы, то имеется четыре симметричных структуры (δ_{ij} , $p_{1i} p_{1j}$, $p_{2i} p_{2j}$, $p_{1i} p_{2j} + p_{2i} p_{1j}$) и одна антисимметричная ($p_{1i} p_{2j} - p_{2i} p_{1j}$). Продольная поляризация может приводить к корреляции нормали к плоскости события с осью пучков.

Образовавшийся в реакции кварк, антикварк или глюон большой энергии порождает адронную струю, летящую в том же направлении. Струи экспериментально наблюдаются как группы адронов с большими энергиями и близкими направлениями движения. В основной массе события e^+e^- -аннигиляции являются двухструйными (рис. 12,а); есть небольшая примесь трехструйных событий (рис. 12,в).

Сначала программа вычисляет ширину Γ_0 распада $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ (рис. 13,а) (без учета поправки рис. 13,б). Энергия e^+ и e^- принята за 1, т. е. γ^* имеет энергию 2. В результате подразумевается

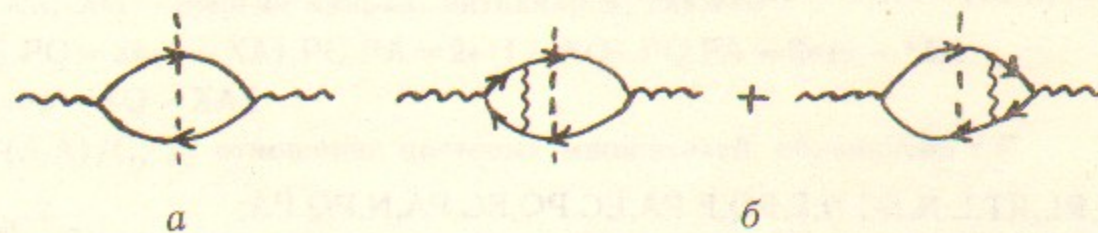


Рис. 13. Квадрированные диаграммы $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$.

α_s^2 и цветовой множитель N_c . Далее для всех каналов X будет вычисляться $\Gamma(X)/\Gamma_0 = \sigma(X)/\sigma_0$. Затем программа подтверждает, что $\sigma_{\perp}/\sigma_0 = 3/2$, $\sigma_{\parallel}/\sigma_0 = 0$. Угловое распределение двухструйных событий

$$\frac{4\pi}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{4}.$$

% 2 струи

% — — — —

MASS PQ=0,PA=0;MSHELL PQ,PA;

% PQ — импульс кварка, PA — антикварка

LET PQ,PA=2;INDEX M; % полная энергия=2

C:=SP(); % цветовой фактор

C:=NC

GAM0:= -G(F,M,PQ,M,PA)*4/3*(4*PI)/4/(8*PI);

2

GAM0:= -

3

% подразумевается альфа*zq**2*C

% Поляризация

% E — вектор поляризации, EC — сопряженный ему

% N — единичный 3-мерный вектор вдоль PQ

% скалярные произведения с ним 3-мерные

VECTOR E,EC,N;

LET E,EC= -1,E,PQ= -E,N,E,PA=E,N,EC,PQ= -EC,N,EC,PA=EC,N;

R:=G(F,EC,PQ,E,PA)*4*(4*PI)/4/(8*PI)/GAM0;

3*(E,N*N,EC-1)

R:= - - - - -

2

LET E,N=1,EC,N=1;RL:=R; % вдоль E

RL:=0

LET E.N=0,EC.N=0;RT:=R; % поперек E

3
RT:= —
2

CLEAR R,RL,RT,E.N,EC.N,E.PQ,E.PA,EC.PQ,EC.PA,N,PQ.PA;

Трехструйные события. Далее программа вычисляет $\Gamma(\gamma^* \rightarrow q\bar{q}q)/\Gamma_0$ (рис. 14). Энергии кварка, антикварка и глюона обозначены X_q , $X_{\bar{q}}$ и X_g . Диаграмма Далица изображена на

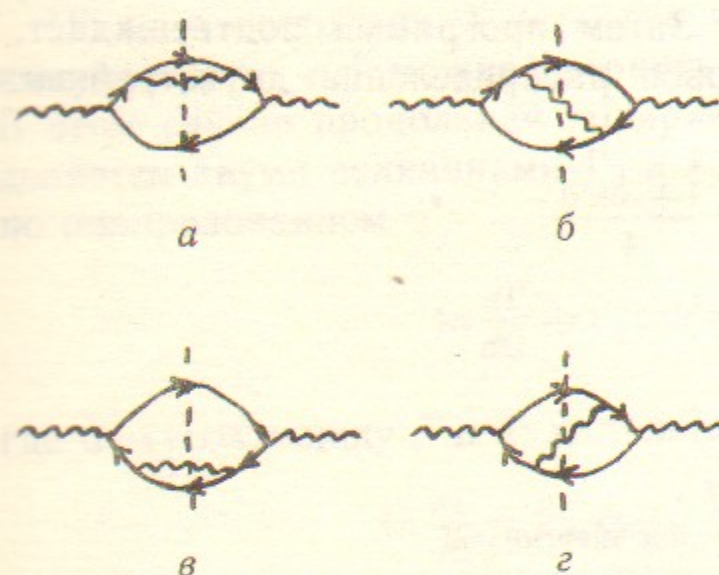


Рис. 14. Квадрированные диаграммы $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}q$. Рис. 15. Диаграмма Далица для процесса $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}q$.

рис. 15; $X_g = 2 - X_q - X_{\bar{q}}$. Есть 4 квадрированных диаграммы; диаграммы рис. 14, в, г получаются из а, б заменой $q \leftrightarrow \bar{q}$. Цветовой множитель, деленный на множитель рис. 13, а, равен $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$. Сечение рождения трех струй

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})} \quad (3)$$

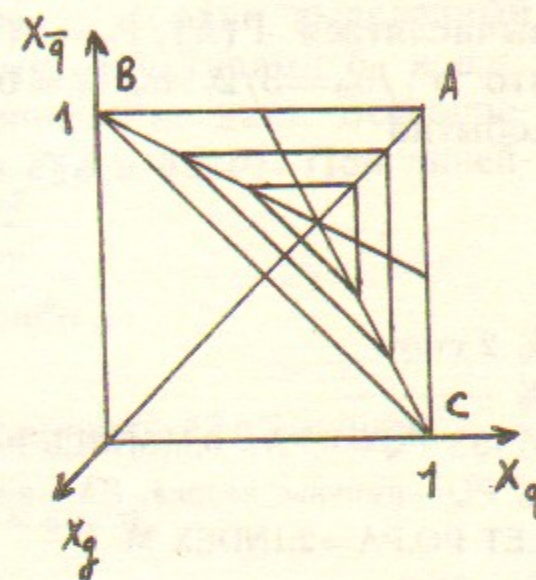
сингулярно на сторонах АВ и АС диаграммы Далица (рис. 15), когда глюон излучается вдоль кварка или антикварка, и особенно в углу А, где глюон мягкий. Интеграл от (3) по диаграмме Далица расходится; далее мы увидим, что эта расходимость компенсируется расходимостью виртуальной поправки рис. 13, б, и получается конечный ответ (2).

% 3 струи

% — — — — —

MASS PG=0;MSHELL PG; % импульс глюона

INDEX L;



% XQ, XA, XG — энергии кварка, антикварка, глюона

LET PG.PQ=2*(1-XA),PG.PA=2*(1-XQ),PQ.PA=2*(1-XG);

XG:=2-XQ-XA\$

C:=SP(A,A)/C; % отношение цветных множителей, обозначено CF

NC²-1

C:= — — —

2*NC

OPERATOR S;FOR ^LL P LET S(P)=G(F,P)/P.P;

R:=(G(F,M)*S(PQ+PG)*G(F,L,PQ,L)*S(PQ+PG)*G(F,M,PA)

-G(F,M,PQ,L)*S(PQ+PG)*G(F,M,PA,L)*S(PA+PG))

*CF*4/3*(4*PI)**2/4/(4*(2*PI)**3)/GAM0\$

% подразумевается альфа-s

% добавление симметричных диаграмм

ON FACTOR;R:=R+SUB(XQ=XA,XA=XQ,R);

(XQ²+XA²)*CF

R:= — — — — —

2*(XQ-1)*(XA-1)*PI

OFF FACTOR;

Программа вычисляет $\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dx_q}$ при $x_q < 1 - \delta$. Это условие можно сформулировать в виде $\vartheta_{qg} > \vartheta_0$, тогда $\delta = x_q(1-x_q) \sin^2 \vartheta_0/2$, или в виде $(p_q + p_g)^2 > \mu^2$, тогда $\delta = \mu^2/4$. Результат имеет вид

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dx_q} = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\frac{1+x_q^2}{1-x_q} \ln \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} \frac{(1-\delta)(3-\delta)}{1-x_q} \right] \quad (4)$$

% распределение по XQ при XA < 1-D

FACTOR LOG;RQ:=DINT(R,XA,0,1-D);

RQ:=(2*LOG(-D)*CF*(XQ²+1)-(2*LOG(-1)*CF)*(XQ²+1)+

CF*(D²-4*D+3))/(4*PI*(XQ-1))

LET LOG(-D)=-LOG(1/D),LOG(-1)=0;RQ:=RQ;

RQ:=-

1

2*LOG(-)*CF*(XQ²+1)+CF*(-D²+4*D-3)

D

4*PI*(XQ-1)

CLEAR LOG(-D),LOG(-1);RQ:=PART(RQ,1,1,2)\$ON FACTOR;RQ;

— (D-1)*(D-3)*CF
OFF FACTOR; CLEAR RQ;

Простая качественная картина развития струи возникает в главном логарифмическом приближении. Первоначальный кварк распадается на кварки, антикварки и глюоны (вместе именуемые партонами) с уменьшающимися виртуальностями. Будем рассматривать этот каскад, пока виртуальности превышают μ^2 . Виртуальность начального кварка может быть любой вплоть до величины порядка Q^2 . Вместо μ^2 вводят величину

$$\Delta\xi = \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2};$$

как мы увидим далее, α_s зависит от характерной виртуальности μ^2 . Начальное распределение кварка при $\xi=0$ ($\mu^2=Q^2$) есть $w_q(x) = \delta(1-x)$, где x — доля энергии струи, несомая кварком. При малых $\Delta\xi$ нужно учесть вероятность распада кварка на кварк и глюон $P(z)\Delta\xi$, где

$$P_{q \rightarrow q}(z) = 2C_F \frac{1+z^2}{1-z}, \quad P_{q \rightarrow g}(z) = 2C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}. \quad (5)$$

Здесь z — доля энергии кварка, несомая кварком (глюоном). С ростом ξ происходят дальнейшие распады. Для нахождения распределений $w_q(x)$, $w_{\bar{q}}(x)$, $w_g(x)$ нужно решить систему кинетических уравнений (Альтарелли — Паризи) с учетом вероятностей распада в единицу $\Delta\xi$: $P_{q \rightarrow q}(z)$, $P_{q \rightarrow g}(z)$ (5), а также $P_{g \rightarrow q}(z)$, $P_{g \rightarrow \bar{q}}(z)$, $P_{g \rightarrow g}(z)$.

Инфракрасно-стабильные величины. Вероятности излучения мягкого глюона, а также распада партона на почти коллинеарную пару, не малы. Поэтому для вычисления величин, чувствительных к таким процессам, необходим учет высших порядков теории возмущений. Эти величины могут также сильно измениться при адронизации. Величины, которые не меняются при излучении глюона нулевой энергии и при расщеплении партона на коллинеарную пару, называются инфракрасно-стабильными. Их можно вычислять в низшем порядке теории возмущений; поправки будут малы. Они также мало изменяются при переходе от партонов к струям примерно коллинеарных адронов.

Например, инфракрасно-стабильной характеристикой формы (степени вытянутости) события является траст (английское слово

thrust переводится как толчок, выпад)

$$T = \max_{\vec{n}} \frac{\sum_i |\vec{p}_i \cdot \vec{n}|}{\sum_i |\vec{p}_i|}. \quad (6)$$

Величины, в которые импульсы частиц входят, скажем, квадратично, инфракрасно-стабильными не являются. Направление $\vec{n}$, при котором достигается максимум в (6), называется осью струй. Траст можно определить и другим, эквивалентным способом:

$$T = \max_{J_1} \frac{|\sum_{i \in J_1} \vec{p}_i| + |\sum_{i \in J_2} \vec{p}_i|}{\sum_i |\vec{p}_i|}. \quad (7)$$

Максимум вычисляется по разбиениям множества частиц на два подмножества J_1 , J_2 (струи), от величины суммарного импульса $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$. Максимум в (7) достигается, когда к одной струе относятся все частицы с $\vec{p} \cdot \vec{n} > 0$, а к другой — с $\vec{p} \cdot \vec{n} < 0$; при таком разбиении, максимум в (6) достигается, когда ось струй $\vec{n}$ направлена по $\vec{P}_1$. Отсюда видна эквивалентность определений (6) и (7).

Траст достигает максимального значения, равного 1, для идеального двухструйного события, и минимального значения, равного 1/2, для сферически-симметричного события с большим числом частиц. Для идеального трехструйного события, максимум в (7) достигается, когда к J_1 относится наиболее энергичная струя, а к J_2 — две других. Он равен энергии этой наиболее энергичной струи, деленной на половину полной энергии. Минимальное значение траста в трехструйном событии равно 2/3, и достигается, когда все струи имеют одинаковую энергию, и, следовательно, летят под равными углами $2\pi/3$ (центр диаграммы Далица). Максимальное значение $T=1$ достигается при коллинеарности двух струй — на границах диаграммы. Изолинии $T=\text{const}$ — треугольники на рис. 15.

Траст двухструйного события $q\bar{q}$ (рис. 13,а) равен 1, что дает

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} = \delta(1-T).$$

Мы будем интересоваться распределением по T при $T < 1$. Оно определяется трехструйными событиями $q\bar{q}g$ (рис. 14). Траст

равен наибольшей из трех энергий: $X_q, X_{\bar{q}}, X_g$. Области, в которых каждая из этих энергий является наибольшей, изображены на рис. 15. Для получения $d\sigma/dT$, нужно проинтегрировать сечения (3) в каждой из этих областей, положив наибольшую энергию равной T , по другой энергии, т. е. вычислить интеграл по треугольнику — изолинии T на рис. 15. Области, где лидирующим являются q и $\bar{q}$, дают одинаковый вклад, поэтому достаточно вычислить один из них и удвоить. Программа получила результат

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{1-T} \left[\frac{2-3T+3T^2}{T} \ln \frac{2T-1}{1-T} - \frac{3}{2} (3T-2)(2-T) \right]. \quad (8)$$

% Траст

RT:=2*SUB(XQ=T,R)+SUB(XQ=2-XA-T,R)\$ % лидирует кварк или глюон

RT:=DINT(RT,XA,2*(1-T),T);

RT:=- (LOG(-2*T+1)*CF*(T³+3*T²-2*T+2)+LOG(-

T+1)*CF*(T³-3*T²+4*T-2)+LOG(2*T-1)*CF*

(-T³+3*T²-4*T+2)+LOG(T-1)*CF*(-T³-

3*T²+2*T-2)+3*T*CF*(3*T²-8*T+4))/(2*T

PI(T-1))

LET LOG(-T/2)=LOG(T/2),LOG(T-1)=LOG(1-T),

LOG(1-2*T)=LOG(2*T-1);

RT:=RT;

RT:=(2*LOG(-T+1)*CF*(3*T²-3*T+2)+2*LOG(2*T-1)*

CF*(-3*T²+3*T-2)+3*T*CF*(-3*T²+8*T-4))/

(2*T*PI*(T-1))

CLEAR LOG(-T/2),LOG(T-1),LOG(1-2*T);

LET LOG(2*T-1)=LOG((2*T-1)/(1-T))+LOG(1-T);RT:=RT;

-2*T+1

RT:=- (2*LOG(- - -)*CF*(3*T²-3*T+2)+3*T*CF*(

T-1

3*T²-8*T+4))/(2*T*PI*(T-1))

CLEAR LOG(2*T-1);RT:=PART(RT,1,1,2)\$ON FACTOR;RT;

3*(3*T-2)*(T-2)*T*CF

OFF FACTOR;CLEAR RT;

Другим примером инфракрасно-стабильных величин являются угловое распределение потока энергии $d\Sigma/d\Omega$, корреляция потоков энергии $d\Sigma/d\Omega_1 d\Omega_2$ и т. д. В них инклюзивные сечения рождения

взвешены с энергиями частиц и просуммированы по их сортам. Угловое распределение отлично от сферически симметричного только при учете поляризации γ^* . Корреляция содержит три структуры ($\delta_{ij}, n_{1i} n_{1j} + n_{2i} n_{2j}, n_{1i} n_{2j} + n_{2i} n_{1j}$); коэффициент при каждой — функция от угла θ между $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Мы несколько упростим задачу — вычислим корреляцию потоков энергии, усредненную по поляризациям γ^* .

События $q\bar{q}$ (рис. 13) дают вклад в корреляцию только при $\theta=0, \pi$. Мы будем интересоваться другими углами, где дают вклад только события $q\bar{q}g$ (рис. 14). Возможны три случая: вдоль направлений $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ летят q и g ; $\bar{q}$ и g ; q и $\bar{q}$. Первые два дают равные вклады. Сечение (3) нужно умножить на энергии этих частиц X_1, X_2 и проинтегрировать, оставляя θ постоянным. Перейдем от переменных X_1, X_2 к $X_1, s = \sin^2 \theta / 2$; тогда $X_2 = (1 - X_1) / (1 - X_1 s)$. Интегрирование дает

$$\frac{d\Sigma}{ds} = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{2s-3}{s^5 c} [2(3-6s+2s^2) \ln c + 3s(2-3s)], \quad (9)$$

где $c = \cos^2 \theta / 2$.

% Корреляция потоков энергии

R:=2*SUB(XQ=X1,XA=2-X1-X2,R)+SUB(XQ=X1,XA=X2,R)\$

% корреляции q-g и q-анти-q

X2:=(1-X1)/(1-X1*S)\$%S= SIN(THETA/2)**2

R:=R*X1*X2*DF(X2,S)\$CLEAR X2; % замена переменных

R:=DINT(R,X1,0,1);

R:=(2*LOG(S-1)*CF*(4*S⁶-30*S⁵+90*S⁴-139*S³+117*

S²-51*S+9)+2*LOG(-1)*CF*(-4*S⁶+30*S⁵-90

*S⁴+139*S³-117*S²+51*S-9)+3*S*CF*(-6*S⁵

+31*S⁴-63*S³+63*S²-31*S+6))/(2*S⁵*PI*(S⁴

-4*S³+6*S²-4*S+1))

LET LOG(S-1)=LOG(1-S),LOG(-1)=0;ON FACTOR;R:=R;

R:=((4*LOG(-(S-1))*S²-12*LOG(-(S-1))*S+6*LOG(

-(S-1))-9*S²+6*S)*(2*S-3)*CF)/(2*(S-1)*S⁵*PI)

OFF FACTOR;CLEAR LOG(S-1),LOG(-1);R/(2*S-3);

(2*LOG(-S+1)*CF*(2*S²-6*S+3)+3*S*CF*(-3*S+2))/

(2*S⁵*PI*(S-1))

REMFAC LOG;CLEAR R;

Поляризационные эффекты. Далее программа вычисляет $\Gamma(\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g)/\Gamma_0$ с учетом поляризации виртуального фотона $\vec{e}$, и получает

$$C_F \frac{3\alpha_s x_q^2(1-|\vec{e} \cdot \vec{n}_q|^2) + x_q^2(1-|\vec{e} \cdot \vec{n}_{\bar{q}}|^2)}{4\pi(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})}, \quad (10)$$

где $\vec{n}_q, \vec{n}_{\bar{q}}$ — единичные векторы в направлении движения $q, \bar{q}$.

Это позволяет получить угловое распределение потока энергии:

$$\frac{4\pi}{\sigma_0} \frac{d\Sigma}{d\Omega} = I_{\parallel} \cos^2 \alpha + I_{\perp} \sin^2 \alpha$$

для линейно поляризованного γ^* , или $I_{\perp} \cos^2 \theta + (I_{\parallel} + I_{\perp})/2 \sin^2 \theta$ для неполяризованных пучков. Оно характеризуется двумя числами $I_{\parallel} = \Sigma_{\parallel}/\sigma_0$, $I_{\perp} = \Sigma_{\perp}/\sigma_0$. Поток энергии, усредненный по углам, $(\Sigma_{\parallel} + 2\Sigma_{\perp})/3$, равен полному сечению σ , умноженному на полную энергию, равную 2:

$$\frac{I_{\parallel} + 2I_{\perp}}{3} = 2 \left(1 + \frac{3}{4} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \right). \quad (11)$$

Сначала рассмотрим главные члены (без α_s). Двухструйные $q\bar{q}$ события (рис. 13,а) дают $I_{\parallel} = 0$. В направлении $\vec{n} \perp \vec{e}$ может лететь q или $\bar{q}$ с энергией 1 и сечением $3/2$, что дает $I_{\perp} = 3$. Это, разумеется, согласуется с (11).

Перейдем к α_s -поправке. Для трехструйных $q\bar{q}g$ событий (рис. 14) программа получает спектры $q, \bar{q}, g$, летящих в направлении $\vec{n} \parallel \vec{e}$:

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dx_q} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dx_{\bar{q}}} = \frac{3}{2} C_F \frac{\alpha_s}{\pi}, \quad \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dx_g} = 6 C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{1-x_g}{x_g}, \quad (12)$$

откуда

$$I_{\parallel} = \frac{9}{2} C_F \frac{\alpha_s}{\pi}. \quad (13)$$

Спектры для $\vec{n} \perp \vec{e}$, аналогичные (12), расходятся. В этом случае дает вклад также поправка к сечению $q\bar{q}$ (рис. 13,б), которая тоже расходится. К счастью, мы можем не вычислять ее, а воспользоваться законом сохранения энергии (с учетом полного сечения) (11), и получить

$$I_{\perp} = 3. \quad (14)$$

% Поляризация

MASS N=1, NQ=1, NA=1; % 3-мерные единичные вектора

LET E.PG = -E.(PQ+PA), EC.PG = -EC.(PQ+PA),

E.PQ = -XQ*E.NQ, EC.PQ = -XQ*EC.NQ,

E.PA = -XA*E.NA, EC.PA = -XA*EC.NA;

R: = - (G(F,EC)*S(PQ+PG)*G(F,L,PQ,L)*S(PQ+PG)*G(F,E,PA)

- G(F,EC,PQ,L)*S(PQ+PG)*G(F,E,PA,L)*S(PA+PG))

*CF*4*(4*PI)**2/4/(4*(2*PI)**3)/GAM0\$

ON GCD,FACTOR;R: = R + SUB(XQ=XA,XA=XQ,NQ=NA,NA=NQ,R);

R: = - (3*(E.NA*NA*EC*XA**2 + E.NQ*NQ*EC*XQ**2 - XQ**2 - XA**2)*CF)

/(4*(XQ-1)*(XA-1)*PI)

OFF FACTOR;MSHELL N,NQ,NA; % косинусы

LET N.NQ = (XA**2 - XG**2 - XQ**2)/(2*XG*XQ),

N.NA = (XQ**2 - XG**2 - XA**2)/(2*XG*XA),

NQ.NA = (XG**2 - XQ**2 - XA**2)/(2*XQ*XA);

QL: = SUB(E=NQ,EC=NQ,R); % кварк вдоль E

3*CF*(XQ+XA-1)

QL: = -----

PI*XQ**2

QL: = DINT(QL,XA,1-XQ,1); QL: = DINT(QL*XQ,XQ,0,1);

3*CF

QL: = -----

2*PI

3*CF

QL: = -----

4*PI

CLEAR XG;XQ:=2-XA-XG\$

GL: = SUB(E=N,EC=N,R); % глюон вдоль E

6*CF*(XG-1)

GL: = -----

PI*XG**2

GL: = DINT(GL,XA,1-XG,1); GL: = DINT(GL*XG,XG,0,1);

6*CF*(XG-1)

GL: = -----

PI*XG

$$\begin{aligned}
& 3*CF \\
GL: &= \frac{---}{PI} \\
IL: &= 2*QL + GL; \\
& 9*CF \\
IL: &= \frac{---}{2*PI}
\end{aligned}$$

Задача. Хиггсовский бозон H может распадаться на gg через вершину $iHF_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$ (через петлю тяжелого кварка, рис. 16). Вычислите вероятность распада $H \rightarrow gg$, а также распадов $H \rightarrow gq\bar{q}$ и



Рис. 16. Распад $H \rightarrow gg$.

$H \rightarrow ggg$. Из них получите $P_{g \rightarrow q}(z)$, $P_{g \rightarrow \bar{q}}(z)$, $P_{g \rightarrow g}(z)$.

3. РАСПАДЫ ЧАРМОНИЯ

Введение. В этом параграфе мы рассмотрим распады состояний чармония $c\bar{c}$ (см. [2] 3.4). Те же формулы применимы (и даже лучше) к распадам боттония $b\bar{b}$. Начнем с простых оценок.

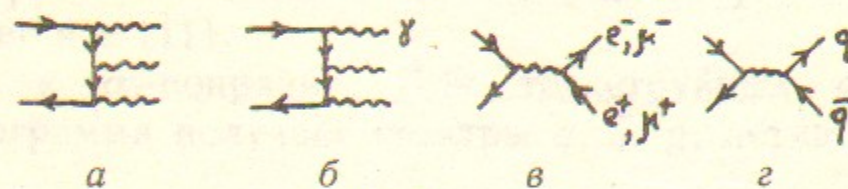


Рис. 17. Распады ψ .

Основным распадом ψ является распад $\psi \rightarrow 3g \rightarrow 3$ струи (рис. 17,а). Его вероятность оценивается как для ортопозитрония (II.4):

$$\Gamma(\psi \rightarrow 3g) \sim \alpha_s^3 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2} \sim m\alpha_s^3 v^3, \quad (1)$$

где v — скорость кварков в ψ (так как потенциал не является кулоновским, мы не можем считать $v \sim \alpha_s$). Существенны также распады $\psi \rightarrow 2g + \gamma \rightarrow 2$ струи + γ (рис. 17,б):

$$\Gamma(\psi \rightarrow 2g + \gamma) \sim \alpha\alpha_s^2 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2} \sim m\alpha\alpha_s^2 v^3, \quad (2)$$

и $\psi \rightarrow e^+e^-, \mu^+\mu^-$ (рис. 17,в)

$$\Gamma(\psi \rightarrow e^+e^-) = \Gamma(\psi \rightarrow \mu^+\mu^-) \sim \alpha^2 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2} \sim m\alpha^2 v^3. \quad (3)$$

Существует также распад $\psi \rightarrow q\bar{q} \rightarrow 2$ струи (рис. 17,г). Его вероятность получается из $\Gamma(\psi \rightarrow e^+e^-)$ умножением на R (п. 2).

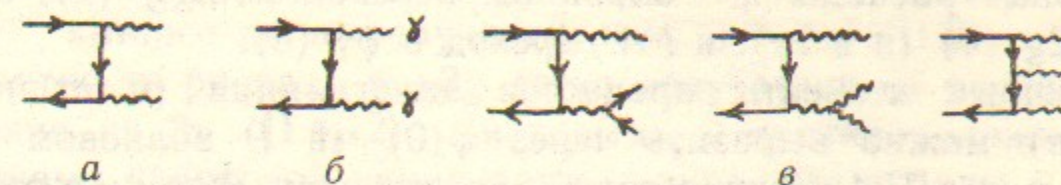


Рис. 18. Распады η_c, χ .

Основным распадом η_c является $\eta_c \rightarrow 2g \rightarrow 2$ струи (рис. 18,а)

$$\Gamma(\eta_c \rightarrow 2g) \sim \alpha_s^2 \frac{|\psi(0)|^2}{m^2} \sim m\alpha_s^2 v^3. \quad (4)$$

Имеется также распад $\eta_c \rightarrow 2\gamma$ (рис. 18,б), оценка вероятности которого получается из (4) заменой α_s на α .

Эти же распады возможны для χ_0, χ_2 :

$$\Gamma(\chi_{0,2} \rightarrow 2g) \sim \alpha_s^2 \frac{|\vec{\nabla} \psi(0)|^2}{m^4} \sim m\alpha_s^2 v^5 \quad (5)$$

и аналогично для $\chi_{0,2} \rightarrow 2\gamma$. Для χ_1 эти распады запрещены по теореме Ландау (2 фотона или глюона не могут иметь момент 1). Он распадается на $q\bar{q}g$ или $3g$ (рис. 18,в). Но оценка $\frac{\alpha_s^3 |\vec{\nabla} \psi(0)|^2}{m^4}$ для этих распадов была бы не совсем верна, так как интеграл по диаграмме Далица логарифмически расходится (в случае $q\bar{q}g$), и в оценку нужно включить большой логарифм. Кроме того, все состояния могут переходить в $\psi\gamma$

$$\Gamma_{E1} \sim d^2 \omega^3 \sim m\alpha v^4, \quad (6)$$

где $d \sim e/mv$ — дипольный момент, $\omega \sim mv^2$.

Основным распадом ψ' является переход в $\psi + 2g$, где $2g$ превращается в адроны (главным образом 2π). Он оценивается аналогично излучению двух E1-фотонов (II.4)

$$\Gamma_{2g} \sim d^4 \omega^5 \sim m\alpha_s'^2 v^6, \quad (7)$$

где $d \sim g/mv$ — хромоэлектрический момент. В эту формулу входит

α'_s от характерной виртуальности $(mv)^2$, а не m^2 , поэтому эта α'_s существенно больше, чем в (1) и других формулах. Кроме того, есть все те же распады, что для ψ (1) — (3), E1-переходы в $\chi\gamma$ (6) и M1-переход в $\eta_c\gamma$

$$\Gamma_{M1} \sim \mu^2 \omega^3 \sim m \alpha v^6, \quad (8)$$

где $\mu \sim dv$ — магнитный момент.

Основные распады η'_c — адронный переход в $\eta_c gg$ (7), аннигиляция в $2g$ (4) (и в 2γ), и M1-переход в $\psi\gamma$ (8).

Матричные элементы процессов аннигиляции (в отличие от переходов) можно выразить через $\psi(0)$ (в P волновом случае $\bar{\nabla}\psi(0)$), как в II.4. Нужно только учесть цвет. Формулу рис. 5 из п. I можно переписать как цветовое соотношение полноты (рис. 19). Вероятность распада, просуммированная по цветам

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sqrt{2} t^a$$

Рис. 19. Цветовое соотношение полноты.

кварка и антикварка, равна сумме синглетного $(1/\sqrt{N_c})$ и октетного $(\sqrt{2} t^a)$ вкладов. Поэтому формула (II.4.18) переписывается в виде

$$\tilde{M} = \sqrt{\frac{m}{N_c}} \frac{\psi(0)}{4m_1 m_2} \text{Sp } M(\hat{p}_1 + m_1) \Gamma(\hat{p}_2 - m_2), \quad (9)$$

где Γ содержит единичную цветовую матрицу, а шпур берется по дираковским и цветовым индексам.

Вершину перехода псевдоскалярного мезона в W или Z через аксиальный ток (без константы связи) принято записывать в виде $i\hat{p}_\mu$. Подставляя в (9) $\Gamma = i\gamma_5$ и $M = \gamma_\mu \gamma_5$, получим

$$f = 2\sqrt{\frac{N_c}{m}} \psi(0). \quad (10)$$

Аналогично, вершину перехода векторного мезона в γ , W или Z через векторный ток (без константы связи) принято записывать в виде $m\hat{e}_\mu$. Подставляя в (9) $\Gamma = \hat{e}$ и $M = \gamma_\mu$, получим то же выражение (10).

Распады ψ . Начнем с простейшего случая $\psi \rightarrow e^+ e^-$, $\mu^+ \mu^-$. Эти

распады были вычислены в п. II.1. Подставляя f_ψ (10) в (II.1.8), получим

$$\Gamma(\psi \rightarrow e^+ e^-) = \Gamma(\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{16}{3} \pi N_c z_c^2 \alpha^2 \frac{|\psi(0)|^2}{m_\psi^2}, \quad (11)$$

где z_c — заряд кварка, а m_ψ — масса ψ . Этот результат можно получить и из формулы Померанчука (II.4), используя сечение $c\bar{c} \rightarrow e^+ e^-$, которое легко получается из $e^+ e^- \rightarrow c\bar{c}$ (II.2).

Вероятность распада $\psi \rightarrow 3g$ легко получается из распада ортопозитрония на 3γ (II.4.12). Диаграммы с противоположными направлениями кварковой линии дают одинаковые вклады в матричный элемент, поэтому он получается из матричного элемента для позитрония заменой $\alpha \rightarrow \alpha_s$ и домножением на $(1/2\sqrt{N_c}) \text{Sp}(t^a t^b t^c + t^c t^b t^a)$. Цветовой множитель равен

$$X = (\text{SP}(A, B, C) + \text{SP}(C, B, A)) / 2 \text{SON FACTOR}; X ** 2;$$

$$(NC + 2) * (NC + 1) * (NC - 1) * (NC - 2)$$

$$16 * NC$$

Отсюда

$$\Gamma(\psi \rightarrow 3g) = \frac{4}{9} (\pi^2 - 9) \frac{(N_c^2 - 1)(N_c^2 - 4)}{N_c^2} \alpha_s^3 \frac{|\psi(0)|^2}{m_\psi^2}. \quad (12)$$

В распаде $\psi \rightarrow 2g + \gamma$ цветовой множитель

$$X = \text{SP}(A, B) X ** 2;$$

$$NC^2 - 1$$

$$4$$

В вероятности α_s^3 заменяется на $z_c^2 \alpha_s^2$, а множитель тождественности $1/3!$ на $1/2!$

$$\Gamma(\psi \rightarrow 2g + \gamma) = \frac{16}{9} (\pi^2 - 9) \frac{N_c^2 - 1}{N_c} z_c^2 \alpha_s^2 \frac{|\psi(0)|^2}{m_\psi^2}. \quad (13)$$

Распределение по энергиям глюонов дается формулой (II.4.13) (в поляризованном случае (II.4.25)); спектр глюона (или фотона) — (II.4.14) (в поляризованном случае (II.4.26-29)). Распад $\psi \rightarrow 3g$ дает трехструйное конечное состояние. Распределение по трасту

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dT} = \frac{2}{\pi^2 - 9} \frac{1}{T^3(2-T)^3} \left[2T(1-T)(8-12T+5T^2) \ln\left(2\frac{1-T}{T}\right) + (2-T)(2-T^2)(3T-2) \right] \quad (14)$$

существенно отличается от $e^+e^- \rightarrow$ адроны вне ψ .

```
R: = ((1-X1)/(X2*X3))**2 + ((1-X2)/(X1*X3))**2 + ((1-X3)/(X1*X2))**2$
R: = SUB(X1=T, X3=2-T-X2, R)$
R: = DINT(R, X2, 2*(1-T), T)$
R: = SUB(LOG(-T)=LOG(T), LOG(2*T-2)=LOG(2-2*T), R)$
R: = SUB(LOG(2-2*T)=LOG((2-2*T)/T)+LOG(T), R)$
ON FACTOR; FOR ALL X LET LOG(X)=0; R1:=R; % член без LOG
```

$$R1: = \frac{2*(T^2-2)*(3*T-2)}{(T-2)^2*T^3}$$

```
FOR ALL X CLEAR LOG(X); R=R1; % член с LOG
-2*(T-1)
```

$$4*(5*T^2-12*T+8)*(T-1)*\text{LOG}\left(\frac{4*(5*T^2-12*T+8)*(T-1)}{(T-2)^3*T^2}\right)$$

Найдем также угловое распределение потока энергии в распаде поляризованного ψ :

$$\frac{4\pi}{\Gamma} \frac{d\Sigma}{d\Omega} = I_{\parallel} \cos^2 \alpha + I_{\perp} \sin^2 \alpha,$$

$(I_{\parallel} + 2I_{\perp})/3 = 2$ (сохранение энергии). Программа получает

$$I_{\parallel} = \frac{3}{4} \frac{5\pi^2 - 48}{\pi^2 - 9} \approx 1.16 \quad I_{\perp} = \frac{9}{8} \frac{\pi^2 - 8}{\pi^2 - 9} \approx 2.42. \quad (15)$$

```
FL: = -(1-X)/X**2/(2-X)**2*((X**4+3*(2-X)**4)/X/(2-X)*LOG(1-X)
+2*(X**2+3*(2-X)**2))$
```

% В этом случае интегратору нужна помощь. Выделим член с LOG:

```
F1:=SUB(LOG(1-X)=0, FL)$ F2:=DF(FL, LOG(1-X))$
I1:=INT(F1, X)$ I1:=SUB(LOG(X-2)=LOG(2-X), I1)$ % член без LOG
IN ELFRAC$ F2:=ELFRAC(F2, X)*LOG(1-X)$ % Разложение на элем. дроби
FOR ALL N LET FRAC(X-2, N)=0, FRAC(X, N)=1/X**N; F3:=F2$ % /X**N
```

```
FOR ALL N LET FRAC(X-2, N)=1/(X-2)**N; F2:=F2-F3$ % /(2-X)**N
FOR ALL N CLEAR FRAC(X-2, N), FRAC(X, N);
OPERATOR SP; LET SP(0)=0, SP(-1)=-PI**2/6, SP(1)=PI**2/12; % функция
FOR ALL X LET DF(SP(X), X)=LOG(1+X)/X; % Спенса
FOR ALL X LET INT(LOG(1-X)/X, X)=SP(-X),
```

```
INT(LOG(X-1)/X, X)=LOG(X)*LOG(X-1)-SP(X-1);
```

I3:=INT(F3, X)\$ % В следующем интеграле замена переменных $2-X \rightarrow X$

```
F2:=SUB(X=2-X, F2)$ I2:=-INT(F2, X)$ I2:=SUB(X=2-X, I2)$
```

```
FACTOR LOG, SP; ON RAT; IL:=I1+I2+I3; CLEAR I1, I2, I3, F1, F2, F3;
```

```
IL:=- (LOG(-X+2)*LOG(-X+1)+2*LOG(-X+1)*
```

$$\frac{-4*X^4+19*X^3-33*X^2+24*X-6}{X^4-4*X^3+4*X^2} + 3*SP(-X)$$

$$-SP(-X+1)+2*\frac{-X^2+X+3}{X^2-2*X}$$

DF(IL, X)-FL; CLEAR FL; % Проверим:

0

% Необходима осторожность при подстановке нижнего предела

```
IL:=SUB(X=1, IL)-SUB(X=0, SUB(LOG(1-X)=-X-X**2/2, IL));
```

$$5*PI^2-48$$

$$IL:= \frac{5*PI^2-48}{12}$$

IL:=9/(PI**2-9)*IL; IT:=3-IL/2; % Добавляем общие множители

$$3*(5*PI^2-48)$$

$$IL:= \frac{4*(PI^2-9)}{9*(PI^2-8)}$$

$$IT:= \frac{8*(PI^2-9)}{8*(PI^2-9)}$$

$$IT:= \frac{8*(PI^2-9)}{8*(PI^2-9)}$$

$$IT:= \frac{8*(PI^2-9)}{8*(PI^2-9)}$$

ON BIGFLOAT, NUMVAL; IL; IT; % А сколько это численно?

1.162 61659 1

2.418 69170 5

Задача. Вычислите корреляцию потоков энергии в распаде $\psi \rightarrow 3g$.

Распады η_c . Вероятности распадов $\eta_c \rightarrow 2g, 2\gamma$ получаются из распада паразитрония (II.4):

$$\begin{aligned}\Gamma(\eta_c \rightarrow 2g) &= 4\pi \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \alpha_s^2 \frac{|\psi(0)|^2}{m_{\eta_c}^2}, \\ \Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma) &= 16\pi N_c z_c^2 \alpha^2 \frac{|\psi(0)|^2}{m_{\eta_c}^2},\end{aligned}\quad (16)$$

Распады χ . До сих пор мы полностью пренебрегали движением кварков в мезоне, и получили матричный элемент (9), содержащий $\psi(0)$. В P -волновом случае он равен нулю. Поэтому учтем малый относительный импульс в линейном приближении:

$$\tilde{M} = \sqrt{\frac{m}{N_c}} \frac{1}{4m_1 m_2} \text{Sp } M(k) (\hat{p}_1 + \hat{k} + m_1) \Gamma(\hat{p}_2 - \hat{k} - m_2) |_{\text{лин}} \psi(0), \quad (17)$$

где подразумевается, что $\vec{k}\psi(0) = -i\vec{\nabla}\psi(0)$. В этом приближении достаточно считать k чисто пространственным вектором: $pk=0$. Программа получает матричный элемент распада $\chi \rightarrow 2g$. В трехмерном виде он равен

$$\tilde{M} = 4\pi \sqrt{\frac{2}{N_c}} \delta^{ab} \alpha_s [\vec{n} \cdot \vec{e} \vec{n} \cdot \vec{k} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{k} \cdot \vec{e}_1 \vec{e} \cdot \vec{e}_2 + \vec{k} \cdot \vec{e}_2 \vec{e} \cdot \vec{e}_1]. \quad (18)$$

% Масса кварка = 1; N—единичный вектор оси распада

% K1, K2, E1, E2—импульсы и поляризации глюонов

% Операторы R, S определены в II.1

MASS P=1,N=1;MSHELL P,N;VECTOR K,K1,K2,E,E1,E2;

LET P.N=0,P.K=0,P.E=0,P.E1=0,P.E2=0,N.E1=0,N.E2=0;

K1:=P+N\$K2:=P-N\$

M:=G(F,E2)*S(P+K-K1)*G(F,E1)*R(P+K)*G(F,E)*R(-P+K)\$

M:=M+SUB(N=-N,E1=E2,E2=E1,M)\$

M:=SUB(X=0,DF(SUB(K=X*K,M),X));

M:=2*(E.N*K.N*E2.E1-E.E2*K.E1-E.E1*K.E2)

Можно интерпретировать формулу (18) немного по-другому: считать, что вынесен общий множитель $|\vec{\nabla}\psi(0)|$, а $\vec{k}$ —единичный вектор поляризации орбитального момента. Этот матричный элемент относится к состоянию χ с отдельно фиксированной поляризацией орбитального момента $\vec{k}$ и суммарного спина $\vec{e}$. Физические состояния $\chi_{0,1,2}$ соответствуют определенным значениям полного момента. Поэтому матричный элемент (18) нужно свернуть по

индексам K, E с соответствующими волновыми функциями (они рассматривались в [2] (3.4)).

Тензор (18) симметричен по этим индексам, и его свертка с антисимметричной волновой функцией χ_1 равна нулю в соответствии с теоремой Ландау. Для χ_0 программа получает (восстанавливаем массу кварка по размерности, и выражаем результат через массу мезона)

$$\Gamma(\chi_0 \rightarrow 2g) = 48\pi \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \alpha_s^2 \frac{|\vec{\nabla}\psi(0)|^2}{m_\chi^4}. \quad (19)$$

Матричный элемент распада χ_2 с проекцией момента на ось распада $m=0$ оказывается равным нулю. Этот факт использовался в [2] (3.4) для получения угловых распределений. В случае проекции $m=\pm 2$, поляризации глюонов однозначно фиксированы, так что сумма по ним фактически отсутствует. Таким образом, распадаются на $2g$ два спиновых состояния χ_2 из пяти. Программа получает

$$\Gamma(\chi_2 \rightarrow 2g) = \frac{64}{5} \pi \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \alpha_s^2 \frac{|\vec{\nabla}\psi(0)|^2}{m_\chi^4}. \quad (20)$$

Разумеется, можно было бы получить этот результат и с использованием формулы для суммы по состояниям $m=\pm 2$, выведенной в [2] (3.4).

Вероятности распадов $\chi_{0,2} \rightarrow 2\gamma$ можно получить отсюда заменой зарядового множителя $\alpha_s^2 \rightarrow z_c^4 \alpha^2$ и цветового шпура $\frac{1}{4}(N_c^2 - 1) \rightarrow N_c^2$:

$$\begin{aligned}\Gamma(\chi_0 \rightarrow 2\gamma) &= 192\pi N_c z_c^4 \alpha^2 \frac{|\vec{\nabla}\psi(0)|^2}{m_\chi^4}, \\ \Gamma(\chi_2 \rightarrow 2\gamma) &= \frac{256}{5} \pi N_c z_c^4 \alpha^2 \frac{|\vec{\nabla}\psi(0)|^2}{m_\chi^4}.\end{aligned}\quad (21)$$

VECDIM 3;MASS N=1;MSHELL N;VECTOR K,E,E1,E2;LET N.E1=0,N.E2=0;

M:=4*PI*SQRT(2/NC)*(N.K*N.E*E1.E2+K.E1*E.E2+K.E2*E.E1)\$

INDEX K,E;M0:=M*K.E/SQRT(3); % хн0

12*SQRT(2)*E2.E1*PI

M0:=-----

SQRT(NC)*SQRT(3)

CLEAR N.E1,N.E2;M0:=SUB(E1=E1-E1.N*N,E2=E2-E2.N*N,M0)\$

% масса мезона = 2; фазовый объем = 1/(8*PI); 2 тождеств. глюона

INDEX E1,E2;GA:=M0**2*(NC**2-1)/4/2/(8*PI);

GA := $\frac{3*PI*(NC^2-1)}{NC}$

REMIND E1,E2;LET N.E1=0,N.E2=0;

M2:=M*(K.E-3*N.K*N.E)/SQRT(6); % хи2 с m=0

M2 := 0

REMIND K,E;K:=E\$LET N.E=0,E.E1=1,E.E2=1;M2:=M; % хи2 с m=2

M2 := $\frac{8*SQRT(2)*PI}{SQRT(NC)}$

GA:=2/5*M2**2*(NC**2-1)/4/2/(8*PI);

GA := $\frac{4*PI*(NC^2-1)}{5*NC}$

Задача. Вычислите $d\Gamma/dx_1 dx_2$ для распадов $\chi_1 \rightarrow q\bar{q}g$, $3g$. Сходятся ли интегралы по диаграмме Далица? Если нет, то где они обрезаются?

4. РАССЕЯНИЕ КВАРКОВ И ГЛЮОНОВ

В этом параграфе мы вычислим сечения рассеяния партонов (кварков, антикварков и глюонов) друг на друга. Кварки будем считать безмассовыми. Сечения предполагаются усредненными по спиновым и цветовым состояниям начальных частиц и просуммированными по состояниям конечных частиц. Экспериментально эти процессы наблюдаются при столкновении адронов высоких энергий, когда партонизм из одного и другого адрона рассеиваются на большой угол и порождают две струи.

$qq \rightarrow qq$, $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$. Начнем с рассеяния разных кварков $qq' \rightarrow qq'$ (рис. 20,а). Его сечение отличается от сечения $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ (II.2) при $m_e = m_\mu = 0$ только заменой $\alpha \rightarrow \alpha_s$ и добавлением цветового множителя. Этот множитель содержит $1/N_c^2$ от усреднения по цветам двух кварков и цветовой шпур рис. 21,а:

$SP(A,B)*SP(A,B)/NC**2$;

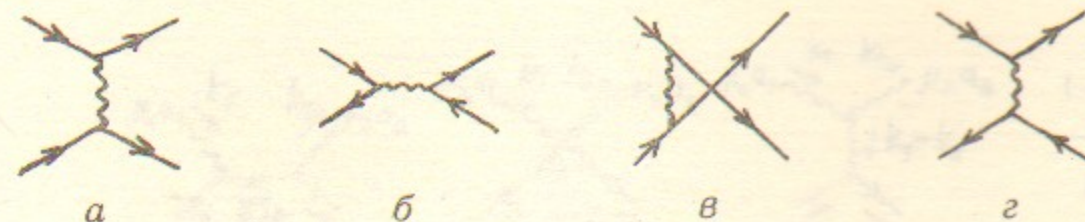


Рис. 20. Диаграммы $qq \rightarrow qq$, $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$.

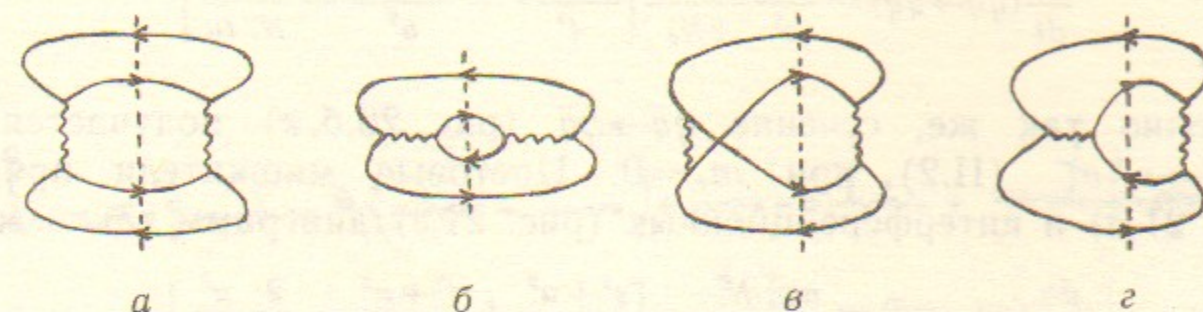


Рис. 21. Квадрированные диаграммы $qq \rightarrow qq$, $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$.

$NC^2 - 1$

$4*NC^2$

Отсюда сечение

$$\frac{d\sigma}{dt}(qq' \rightarrow qq') = \frac{\pi\alpha_s^2}{s^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} \frac{s^2 + u^2}{t^2}. \quad (1)$$

Точно так же, сечение $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$ (рис. 20,б) получается из $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (II.2) при $m_e = m_\mu = 0$. Цветовой шпур (рис. 21,б) такой же:

$$\frac{d\sigma}{dt}(q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}') = \frac{\pi\alpha_s^2}{s^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} \frac{t^2 + u^2}{s^2}. \quad (2)$$

Несколько сложнее получить сечение рассеяния одинаковых кварков $qq \rightarrow qq$. Оно описывается двумя диаграммами рис. 20,а, в. Имеется 4 квадрированных диаграммы: две прямых (типа рис. 21,а) и две интерференционных (типа рис. 21,в). Диаграммы в парах получаются друг из друга заменой $t \leftrightarrow u$. Эти вклады мы вычисляли в II.2. Цветовой множитель для прямых диаграмм такой же, как для $qq' \rightarrow qq'$; для интерференционных

$SP(A,B,A,B)/NC**2$;

$$\frac{N_c^2 - 1}{4 \cdot N_c^3}$$

Отсюда сечение

$$\frac{d\sigma}{dt}(qq \rightarrow qq) = \frac{\pi \alpha_s^2}{s^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} - \frac{2}{N_c} \frac{s^2}{tu} \right]. \quad (3)$$

Точно так же, сечение $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ (рис. 20, б, г) получается из $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ (II.2) при $m_e = 0$. Цветовые множители прямых (рис. 21, а) и интерференционных (рис. 21, г) диаграмм такие же:

$$\frac{d\sigma}{dt}(q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}) = \frac{\pi \alpha_s^2}{s^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{t^2 + u^2}{s^2} - \frac{2}{N_c} \frac{u^2}{st} \right]. \quad (4)$$

$qg \rightarrow qg$, $q\bar{q} \leftrightarrow gg$. В этих процессах уже начинают существенно сказываться отличия КХД от КЭД. Диаграммы процесса $qg \rightarrow qg$ изображены на рис. 22. Среди них есть диаграмма с 3-глюонной вершиной. Но еще более существенное отличие состоит в том, что тождество Уорда для матричного элемента сложнее, чем в КЭД. Поэтому нельзя при суммировании по поляризациям глюона включать временную и продольную, т. е. использовать $2\rho_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$.

Выведем это тождество Уорда. Для 3-глюонной вершины $V_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(k_1, k_2, k_3) = if^{a_1a_2a_3} V_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3)$,

$$V_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3) = ig[(k_2 - k_1)_{\mu_3} \delta_{\mu_1\mu_2} + (k_3 - k_2)_{\mu_1} \delta_{\mu_2\mu_3} + (k_1 - k_3)_{\mu_2} \delta_{\mu_3\mu_1}]$$

мы имеем

$$V_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(k_1, k_2, k_3) k_{3\mu_3} = if^{a_1a_2a_3} ig[(k_1^2 - k_2^2) \delta_{\mu_1\mu_2} - k_{1\mu_1} k_{1\mu_2} + k_{2\mu_1} k_{2\mu_2}]. \quad (5)$$

Это приводит к тождествам для вставки во внутреннюю и во внешнюю глюонную линию (в фейнмановской калибровке), изображенным на рис. 23, а, б. На них в первых членах отдельно выделена цветовая структура $if^{a_1a_2a_3}$. В последних членах мы ввели новый объект — вершину взаимодействия дух-глюон (рис. 24). Штриховая линия изображает распространение духа — фиктивной скалярной безмассовой частицы с цветом как у глюона, вводимой для упрощения суммирования по поляризациям глюонов.

Вооружившись этими сведениями, мы легко выведем тождество Уорда для амплитуды $qg \rightarrow qg$ (рис. 25). Здесь три первых члена (в которых отдельно изображена цветовая структура) сокращают-

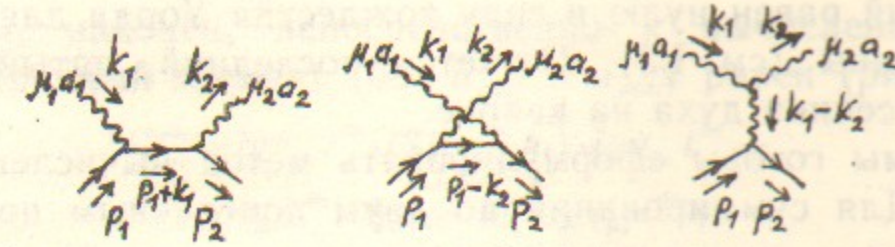


Рис. 22. Диаграммы $qg \rightarrow qg$.

$$\begin{aligned} \text{a} \quad & \text{gluon line} = g \text{ (ghost loop) } \otimes (\text{gluon line} - \text{gluon line}) + \text{gluon line} \otimes \text{gluon line} + \text{gluon line} \otimes \text{gluon line} \\ \text{б} \quad & \text{gluon line} = -g \text{ (ghost loop) } \otimes \text{gluon line} + \text{gluon line} \otimes \text{gluon line} + \text{gluon line} \otimes \text{gluon line} \end{aligned}$$

Рис. 23. Тождество Уорда для вставки глюона во внутреннюю и внешнюю глюонные линии.

$$a \text{ (ghost line) } \rightarrow b \text{ (ghost line)} = i \frac{\delta^{ab}}{p^2} \quad \text{and} \quad \text{ghost-gluon vertex} = -gf^{a_1a_2b} p_{2\mu}$$

Рис. 24. Правила Фейнмана для духов.

$$\text{gluon loop} = \text{gluon exchange} + \text{gluon exchange} + \text{gluon exchange} = g(-\text{gluon exchange} + \text{gluon exchange} - \text{gluon exchange}) \otimes \text{gluon line} + \text{gluon line} \otimes \text{gluon line} = \text{gluon loop}$$

Рис. 25. Тождество Уорда для амплитуды $qg \rightarrow qg$.

я; четвертый равен нулю в силу тождества Уорда для кварк-глюонной вершины (см. I.3). Остается последний, пятый член — амплитуда рассеяния духа на кварке.

Теперь мы готовы сформулировать метод вычисления $\Sigma_{\perp}|M|^2$ (рис. 26). Для суммирования по двум поперечным поляризациям каждого глюона нужно использовать

$$2\rho_{\mu\nu}^{\perp}(k) = -\delta_{\mu\nu} + (k_{\mu}a_{\nu} + k_{\nu}a_{\mu})/ka,$$

где a_{μ} — произвольный вектор с $a^2=0$. Действительно, для любого продольного вектора $v_{\mu} = xk_{\mu} + ya_{\mu}$ получится $\rho_{\mu\nu}^{\perp}v_{\nu} = 0$. На рис. 26

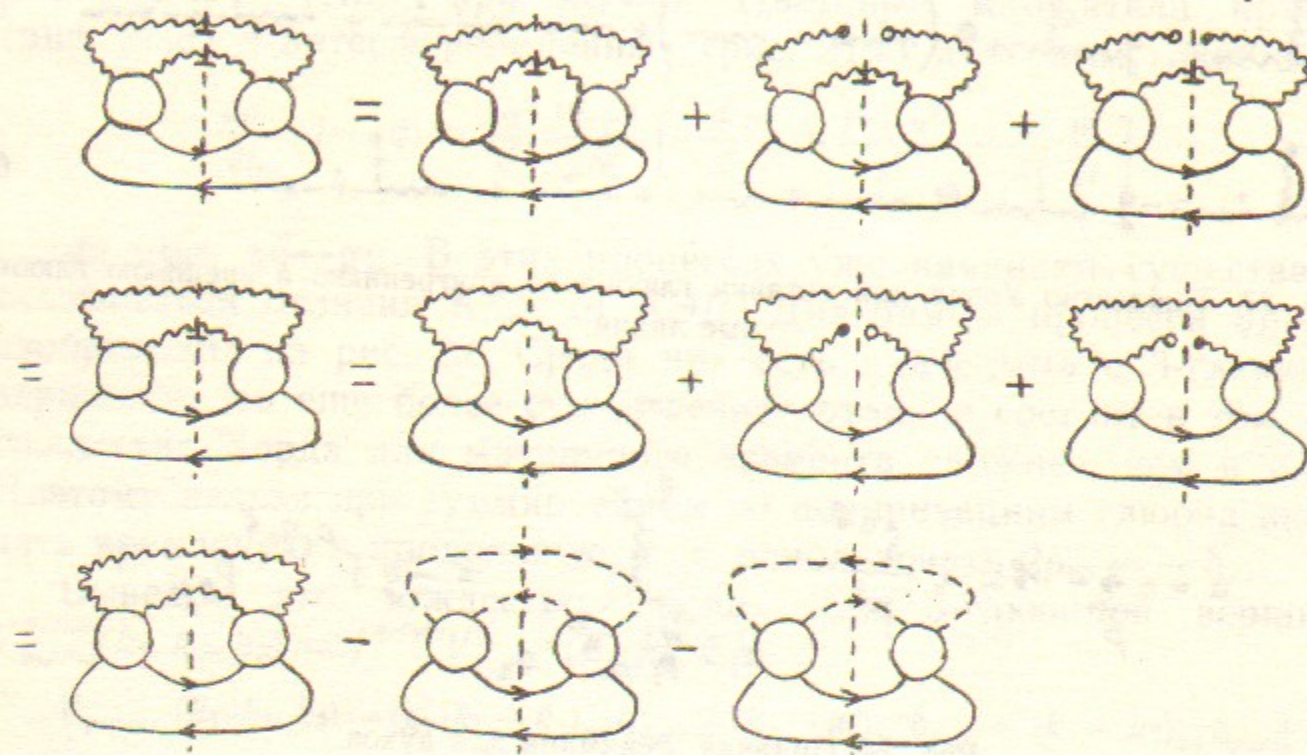


Рис. 26. Суммирование по поляризациям глюонов в процессе $qg \rightarrow qg$.

суммирование с $2\rho_{\mu\nu}^{\perp}$ изображено глюонной линией со знаком $\perp$, умножение на k_{μ} — жирной точкой, а на a_{μ}/ka — пустой точкой. Глюонная линия без знака $\perp$ обозначает суммирование по всем поляризациям $2\rho_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$. При раскрытии $\rho_{\mu\nu}^{\perp}$ первого глюона, добавочные слагаемые дают 0, так как в силу рис. 25, жирная точка проносится через M и дает 0, действуя на $\rho_{\mu\nu}^{\perp}$. Для второго глюона, жирная точка проносится по циклу, меняя знак при пересечении штриховой линии (так как $2\rho_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$) и уничтожается с пустой точкой, давая 1.

Итак, сумма по поперечным поляризациям глюонов $\Sigma_{\perp}|M|^2$ равна сумме по всем поляризациям $\Sigma|M|^2$ минус суммы $\Sigma|M|^2$ для рассеяния духа и антидуха. Попутно мы доказали независимость результата от произвольных векторов a для обоих глюонов.

Перейдем, наконец, непосредственно к вычислению сечения $qg \rightarrow qg$. Матричный элемент (без $\bar{u}_{p_2\sigma_2}$ и $u_{p_1\sigma_1}$) равен (рис. 22)

$$M_{\mu_1\mu_2}^{a_1a_2} = ig\gamma_{\mu_2} t^{a_2} \cdot iS(p_1 + k_1) \cdot ig\gamma_{\mu_1} t^{a_1} + \\ + ig\gamma_{\mu_1} t^{a_1} \cdot iS(p_1 - k_2) \cdot ig\gamma_{\mu_2} t^{a_2} + \\ + V_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(k_1, -k_2, k_2 - k_1) \cdot (-i)D_{\mu_3\nu}^{a_3b}(k_1 - k_2) \cdot ig\gamma_{\nu} t^b. \quad (6)$$

Выделим в нем симметричную и антисимметричную цветовые структуры:

$$M_{\mu_1\mu_2}^{a_1a_2} = \frac{1}{2} [t^{a_1}, t^{a_2}] + (-ig^2)(\gamma_{\mu_2} S(p_1 + k_1) \gamma_{\mu_1} + \gamma_{\mu_1} S(p_1 - k_2) \gamma_{\mu_2}) + \\ + \frac{1}{2} [t^{a_1}, t^{a_2}] (-ig^2) (-\gamma_{\mu_2} S(p_1 + k_1) \gamma_{\mu_1} + \gamma_{\mu_1} S(p_1 - k_2) \gamma_{\mu_2} + \\ + \frac{2i}{g} \frac{V_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, -k_2, k_2 - k_1) \gamma_{\mu_3}}{(k_1 - k_2)^2}). \quad (7)$$

Эти члены не интерферируют при возведении в квадрат. Цветовые множители равны

ON GCD;

AB1:=QL(X,A,B,Y)\$BA1:=QL(X,B,A,Y)\$

AB2:=QL(Y,A,B,X)\$BA2:=QL(Y,B,A,X)\$

CS:=(AB1+BA1)/2*(BA2+AB2)/2/(NC*NG); % симметричная структура

$$NC^2 - 2$$

$$CS := \frac{NC^2 - 2}{8 * NC^2}$$

$$8 * NC^2$$

CA:=(AB1-BA1)/2*(BA2-AB2)/2/(NC*NG); % антисимметричная

$$1$$

$$CA := \frac{1}{8}$$

$$8$$

Прочие множители в $|M|^2 = \frac{1}{4} \Sigma|M|^2$ равны (разумеется, симметричная структура совпадает с $e\gamma \rightarrow e\gamma$ (II.3) при $m_e=0$; в программе используется пакет GPACK (I.1))

MASS P1=0,P2=0,K1=0,K2=0;MSHELL P1,P2,K1,K2;

LET P1.K1=S/2,P2.K2=S/2,P1.P2=-T/2,K1.K2=-T/2,

P1.K2=-U/2,P2.K1=-U/2;

VECTOR M1,M2,M3;OFF GCD;OPERATOR R,S,D,V;

```

VECTOR !=P,! =K1,! =K2,! =K3,! =M1,! =M2,! =M3;NOSPUR F;
FOR ALL P LET R(P)=G(F,P),D(P)=1/P.P,S(P)=R(P)*D(P);
FOR ALL M1,M2,M3,K1,K2,K3 LET V(M1,M2,M3,K1,K2,K3)= % 3g вершина
(K2-K1).M3*M1.M2+(K3-K2).M1*M2.M3+(K1-K3).M2*M3.M1;
A1:=R(M2)*S(P1+K1)*R(M1)$A2:=R(M1)*S(P2-K1)*R(M2)$INDEX M3;
MS:=A1+A2$MA:=-A1+A2-2*D(K1-K2)*R(M3)*
V(M1,M2,M3,K1,-K2,K2-K1)$
MCS:=GCON(F,MS)$MCA:=GCON(F,MA)$ % сопряженные
SPUR F;INDEX M1,M2;
MMS:=(4*PI)**2*R(P2)*MS*R(P1)*MCS; % симметричная структура
MMS := - 32*PI^2*(S^2+2*S*T+2*T^2+2*T*U+U^2)
S*U
MMA:=(4*PI)**2*R(P2)*MA*R(P1)*MCA; % антисимметричная
MMA := -(32*PI^2*(2*S^3*T-7*S^3*U+5*S^2*T^2-2*S^2*T*U-4*
S^2*U^2+3*S*T^2*U-2*S*T*U^2-7*S*U^3-2*T^4+
5*T^2*U^2+2*T*U^3))/(S*T^2*U)

```

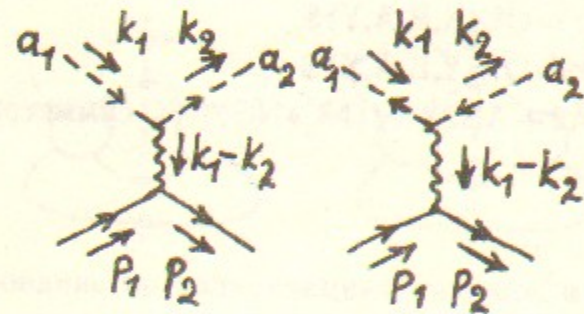


Рис. 27. Диаграммы $qh \rightarrow qh$, $qh \rightarrow qh$ (h — дух).

Отсюда нужно еще вычесть $\frac{1}{4} \Sigma |M|^2$ для рассеяния духа и антидуха (рис. 27). Для духа, например, матричный элемент

$$-gf^{a_1 a_2 a_3} k_{2\mu} \cdot (-i) D_{\mu\nu}(k_1 - k_2) \cdot ig\gamma_\nu t^{a_3} = \frac{1}{2} [t^{a_1}, t^{a_2}] \cdot 2ig^2 \frac{\hat{k}_2}{(k_1 - k_2)^2}. \quad (8)$$

Так что эти вклады вычитаются из антисимметричной структуры.

MMH:=4*(4*PI)**2*D(K1-K2)**2* % вклад духа и антидуха
(R(P2)*R(K2)*R(P1)*R(K2)+R(P2)*R(K1)*R(P1)*R(K1));

$$\begin{aligned}
 MMH &:= - \frac{64*S*U*PI^2}{T^2} \\
 U &:= -S-T\$ON GCD;MMS:=MMS;MMA:=MMA-MMH; \\
 MMS &:= - \frac{32*PI^2*(2*S^2+2*S*T+T^2)}{S*(S+T)} \\
 MMA &:= - \frac{32*PI^2*(8*S^4+16*S^3*T+14*S^2*T^2+6*S*T^3+T^4)}{S*T^2*(S+T)}
 \end{aligned}$$

Итак, мы получили $\overline{|M|^2}$ в виде $C_s A_s + C_a A_a$. Присмотревшись к A_a , мы обнаружим, что этот член сильно упрощается, если из него вычесть A_s . Поэтому запишем $\overline{|M|^2} = (C_s + C_a) A_s + C_a (A_a - A_s)$. Вспоминая, что

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\overline{|M|^2}}{16\pi s^2},$$

получим окончательный результат

$$\frac{d\sigma}{dt}(qg \rightarrow qg) = \frac{\pi\alpha_s^2}{s^2} (s^2 + u^2) \left[\frac{1}{t^2} - \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} \frac{1}{su} \right]; \quad (9)$$

CLEAR U;CS:=CS+CA;CA:=CA;

$$\begin{aligned}
 CS &:= - \frac{NC^2 - 1}{4*NC^2} \\
 CA &:= - \frac{1}{8} \\
 SA &:= (MMA - MMS)/(16*PI); SS:=MMS/(16*PI); \\
 SA &:= - \frac{8*PI*(2*S^2+2*S*T+T^2)}{T^2}
 \end{aligned}$$

$$SS := \frac{2\pi i (2S^2 + 2S \cdot T + T^2)}{S(S+T)}$$

$$SUB(T = -S - U, SS);$$

$$\frac{2\pi i (S^2 + U^2)}{S \cdot U}$$

Для процесса $q\bar{q} \rightarrow gg$, $|M|^2$ отличается от случая $qg \rightarrow qg$ заменой $t \leftrightarrow s$ и изменением множителей усреднения по цвету $1/N_c N_g \rightarrow 1/N_c^2$:

$$\frac{d\sigma}{dt}(q\bar{q} \rightarrow gg) = \frac{\pi \alpha_s^2}{s^2} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} (t^2 + u^2) \left[\frac{1}{s^2} - \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} \frac{1}{tu} \right]. \quad (10)$$

При интегрировании этого сечения не надо забывать о тождественности двух глюонов. Сечение обратного процесса $gg \rightarrow q\bar{q}$ получается из $q\bar{q} \rightarrow gg$ (10) заменой $1/N_c^2 \rightarrow 1/N_g^2$:

$$\frac{d\sigma}{dt}(gg \rightarrow q\bar{q}) = \frac{\pi \alpha_s^2}{s^2} \frac{N_c}{N_c^2 - 1} (t^2 + u^2) \left[\frac{1}{s^2} - \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} \frac{1}{tu} \right]. \quad (11)$$

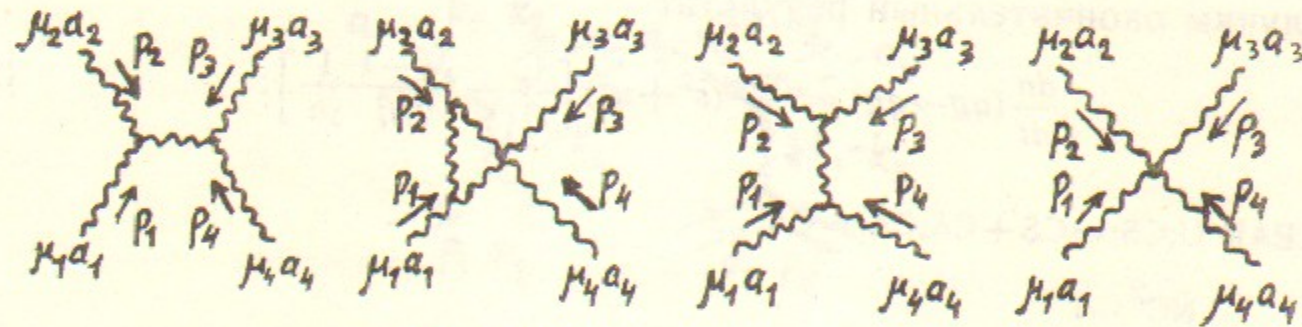


Рис. 28. Диаграммы $gg \rightarrow gg$.

$gg \rightarrow gg$. Это наиболее сложный из процессов рассеяния $2 \rightarrow 2$ в КХД. Начнем с вывода тождества Уорда для его амплитуды (рис. 28) (для симметрии, мы считаем все импульсы входящими):

$$M_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) =$$

$$= if^{a_1 a_2 b} if^{a_3 a_4 b} \left[V_{\mu_1 \mu_2 \nu}(p_1, p_2, -p_1 - p_2) V_{\mu_3 \mu_4 \nu}(p_3, p_4, -p_3 - p_4) \frac{-i}{(p_1 + p_2)^2} + \right.$$

$$\left. + T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \right] + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4), \quad (12)$$

где

$$T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = ig^2 (\delta_{\mu_1 \mu_3} \delta_{\mu_2 \mu_4} - \delta_{\mu_1 \mu_4} \delta_{\mu_2 \mu_3})$$

— коэффициент при выбранной цветовой структуре в 4-глюонной вершине. Используя тождество (5), имеем

$$M_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) p_{1\mu_1} = if^{a_1 a_2 b} if^{a_3 a_4 b} \times$$

$$\times \left[V_{\nu}(-p_2) V_{\mu_3 \mu_4 \nu}(p_3, p_4, -p_3 - p_4) \frac{-i}{(p_1 + p_2)^2} p_{2\mu_2} + \right.$$

$$+ V_{\mu_2}(p_1 + p_2) V_{\mu_4}(-p_3) \frac{i}{(p_1 + p_2)^2} p_{3\mu_3} +$$

$$+ V_{\mu_2}(p_1 + p_2) V_{\mu_3}(-p_4) \frac{i}{(p_1 + p_2)^2} p_{4\mu_4} +$$

$$+ ig((p_4 - p_2)_{\mu_3} \delta_{\mu_4 \mu_2} + (p_2 - p_3)_{\mu_4} \delta_{\mu_2 \mu_3} + (p_3 - p_4)_{\mu_2} \delta_{\mu_3 \mu_4}) \left. \right] +$$

$$+ (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4), \quad (13)$$

где $V_{\mu}(p) = igp_{\mu}$ — дух-глюонная вершина без цветового множителя. С учетом тождества Якоби $if^{a_1 a_2 b} if^{a_3 a_4 b} = if^{a_1 a_3 b} if^{a_2 a_4 b} - if^{a_1 a_4 b} if^{a_2 a_3 b}$, последние члены сокращаются, и остается тождество рис. 29. На этом рисунке присутствует пропагатор духа, который уже был показан на рис. 24.

Нам потребуется и тождество Уорда для амплитуды рассеяния глюона на духе. Оно показано на рис. 30; его вывод оставляем в качестве самостоятельного упражнения.

Теперь мы готовы вычислить сумму по поперечным поляризациям глюонов $\sum_{\perp} |M|^2$ (рис. 31). Жирная точка пронесется насквозь, превращая глюонную линию в духовую; когда она пересекает штриховую линию, меняется знак. Из-за этого диаграммы с одной духовой петлей имеют знак минус, а с двумя — плюс. 24 диаграммы с четырьмя промежуточными духовыми линиями можно объединить в 6, если ввести полные амплитуды рассеяния дух-(анти)духа (рис. 32). Диаграммы, отличающиеся перестановкой духовых линий, входят в них с противоположными знаками. Поэтому духи являются фермионами.

В матричном элементе есть три цветовой структуры. Диаграммы для одной из них изображены на рис. 33. Остальные две получаются заменами $2 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$. В квадрированном матричном элементе есть поэтому 9 цветовой структуры. Они делятся на 2 типа: прямые (рис. 34,а) и интерференционные (рис. 34,б). Достаточно

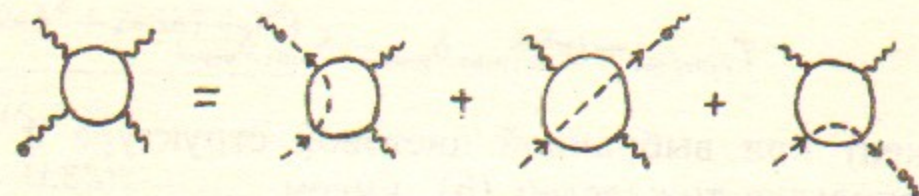


Рис. 29. Тождество Уорда для амплитуды $gg \rightarrow gg$.



Рис. 30. Тождество Уорда для амплитуды $gh \rightarrow gh$.



Рис. 32. Амплитуда $hh \rightarrow hh$.

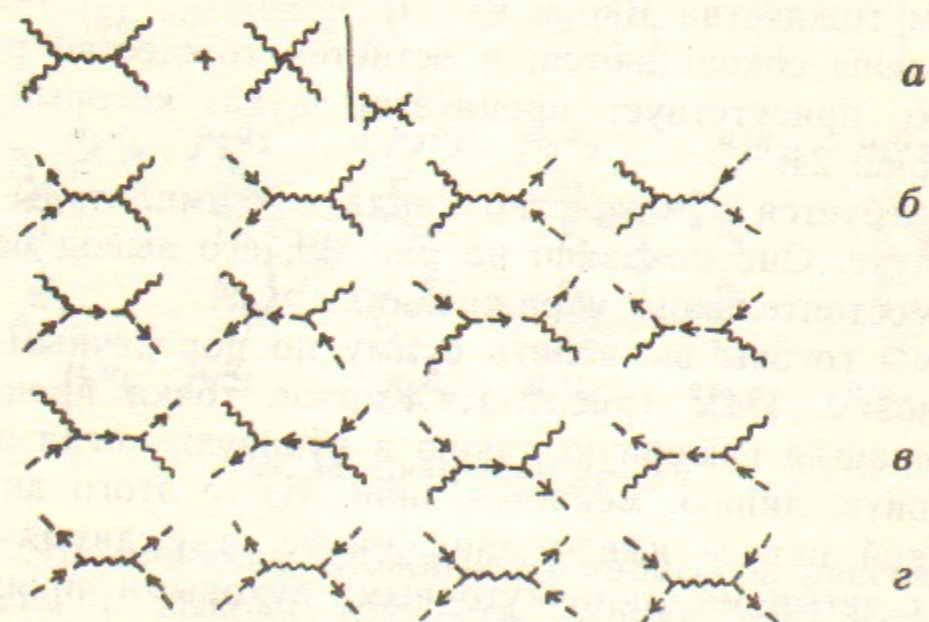


Рис. 33. Диаграммы для одной из цветовых структур. На рисунке *a* имеется в виду член 4-глюонной вершины, имеющий ту же цветовую структуру.

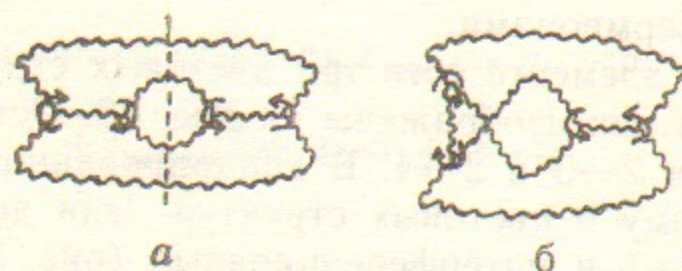


Рис. 34. Типы квадрированных диаграмм.

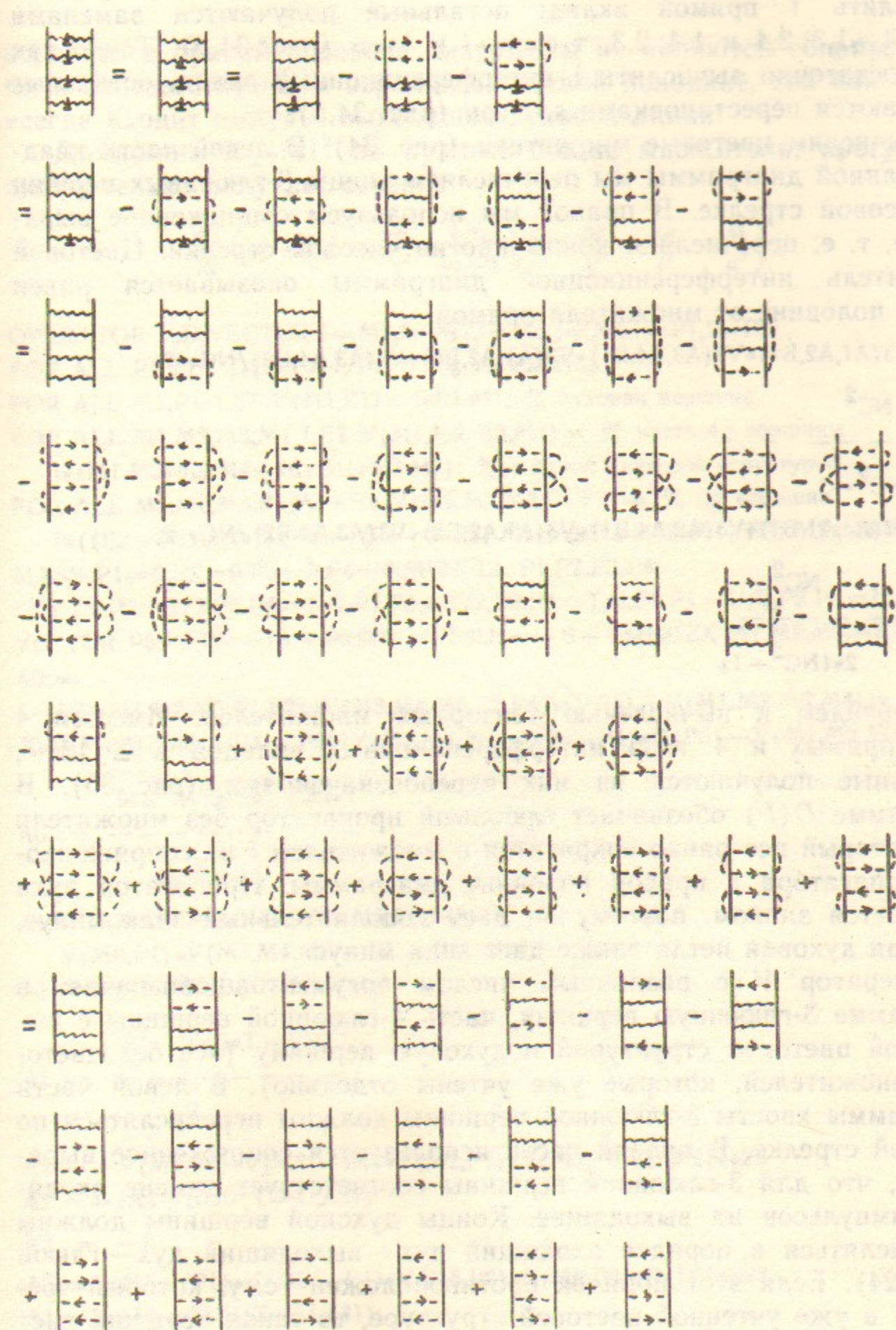


Рис. 31. Суммирование по поляризациям глюонов в процессе $gg \rightarrow gg$. Из-за большого числа диаграмм, обозначения несколько упрощены по сравнению с рис. 26.

вычислить 1 прямой вклад; остальные получаются заменами 1,2; 3,4 → 1,3; 2,4 и 1,4; 2,3, т.е. $s \leftrightarrow t$ и $s \leftrightarrow u$ (рис. 34,а). Точно так же, достаточно вычислить 1 интерференционный вклад, остальные получаются перестановками s , t и u (рис. 34,б).

Вычислим цветовые множители (рис. 34). В левой части квадратированной диаграммы мы перечисляем концы 3-глюонных вершин по часовой стрелке. В правой мы используем сопряженное выражение, т.е. перечисляем концы против часовой стрелки. Цветовой множитель интерференционной диаграммы оказывается равен минус половине от множителя прямой.

$$C1 := V3(A1, A2, B1) * V3(A3, A4, B1) * V3(A1, A2, B2) * V3(A3, A4, B2) / NG^{**2};$$

$$C1 := \frac{NC^2}{NC^2 - 1}$$

$$C2 := V3(A3, A1, B1) * V3(A2, A4, B1) * V3(A1, A2, B2) * V3(A3, A4, B2) / NG^{**2};$$

$$C2 := \frac{NC^2}{2 * (NC^2 - 1)}$$

Перейдем к вычислению тензорных множителей. Имеется 4 типа прямых и 4 типа интерференционных вкладов в $\Sigma_{\perp} |M|^2$, остальные получаются из них переобозначениями (рис. 35). В программе $D(P)$ обозначает глюонный пропагатор без множителя $-i$, который все равно сократится с множителем i из сопряженного пропагатора в правой половине диаграммы. Пропагатор духа отличается знаком, поэтому он дает дополнительный знак минус. Каждая духовая петля также дает знак минус.

Оператор V с различным числом аргументов обозначает в программе 3-глюонную вершину, часть 4-глюонной вершины с выбранной цветовой структурой и духовую вершину (все без цветых множителей, которые уже учтены отдельно). В левой части диаграммы хвосты 3-глюонной вершины должны перечисляться по часовой стрелке. В правой части используется сопряженное выражение, что для 3-глюонной вершины соответствует замене входящих импульсов на выходящие. Концы духовой вершины должны перечисляться в порядке входящий дух — выходящий дух — глюон (рис. 24). Если этот порядок противоположен тому, который требуется в уже учтенной цветовой структуре, то такая вершина дает знак минус. Кроме того, как это видно из вывода рис. 31, духовые

вершины в правой половине диаграммы не являются сопряженными к соответствующим вершинам в левой половине, так как в них всегда входит импульс выходящей духовой линии.

Домножив $\Sigma_{\perp} |M|^2$ на нужные общие множители, программа окончательно получает сечение

$$\frac{d\sigma}{dt}(gg \rightarrow gg) = \frac{\pi \alpha_s^2}{s^2} \frac{4N_c^2}{N_c^2 - 1} \left(3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{su}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right); \quad (14)$$

```
OPERATOR V,D; VECTOR !=M1,! =M2,! =M3,! =M4,! =P1,! =P2;
FOR ALL P1 LET D(P1)=1/P1.P1; % пропагатор
FOR ALL M1,P1 LET V(M1,P1)=I*P1.M1; % духовая вершина
FOR ALL M1,M2,M3,M4 LET V(M1,M2,M3,M4)= % часть 4g вершины
    I*(M1.M3*M2.M4-M1.M4*M2.M3); % с одной цветовой структурой
FOR ALL M1,M2,M3,P1,P2 LET V(M1,M2,M3,P1,P2)= % 3g вершина
    I*((P2-P1).M3*M1.M2-(P1+2*P2).M1*M2.M3+(2*P1+P2).M2*M3.M1);
MASS P1=0,P2=0,P3=0,P4=0; MSHELL P1,P2,P3,P4;
LET P1.P2=S/2,P3.P4=S/2,P1.P3=T/2,P2.P4=T/2,P1.P4=U/2,P2.P3=U/2;
VECTOR P5,P6; P5:=P1+P2$P6:=P5$U:=-S-T$INDEX M1,M2,M3,M4,M5,M6;
A0:=
(-I*V(M1,M2,M5,P1,P2)*V(M3,M4,M5,P3,P4)*D(P5)+V(M1,M2,M3,M4))*
(I*V(M1,M2,M6,-P1,-P2)*V(M3,M4,M6,-P3,-P4)*D(P6)-V(M1,M2,M3,M4));
```

$$A0 := \frac{9*S^2 + 50*S*T + 50*T^2}{2*S^2}$$

$$A1 := V(M5, -P2) * V(M3, M4, M5, P3, P4) * \\ V(M6, P1) * V(M3, M4, M6, -P3, -P4) * D(P5) ** 2 \$ \\ A1 := 2 * (A1 + SUB(T=U, A1));$$

$$A1 := \frac{S^2 - 10*S*T - 10*T^2}{S^2}$$

$$A2 := -V(M2, P5) * V(M3, -P4) * V(M2, P1) * V(M3, P6) * D(P5) ** 2 \$ \\ A2 := 4 * (A2 + SUB(T=U, A2));$$

$$A2 := -2$$

$$A3 := V(M5, -P1) * V(M5, -P4) * V(M6, P2) * V(M6, P3) * D(P5) ** 2 \$ \\ A3 := 2 * (A3 + SUB(T=U, A3));$$

$$A3 := \frac{S^2 + 2*ST + 2*T^2}{2*S^2}$$

$$A0 := A0 + A1 + A2 + A3; \text{CLEAR } A1, A2, A3;$$

$$A0 := \frac{4*(S^2 + 4*ST + 4*T^2)}{S^2}$$

$$\text{ON GCD; } A0 := A0 + \text{SUB}(S=T, T=S, A0) + \text{SUB}(S=U, A0); \text{OFF GCD;}$$

$$A0 := (4*(4*S^6 + 12*S^5*T + 15*S^4*T^2 + 10*S^3*T^3 + 15*S^2*T^4 + 12*S*T^5 + 4*T^6)) / (S^2*T^2*(S^2 + 2*ST + T^2))$$

$$P5 := P1 + P3$$

$$B0 := (-I*V(M3, M1, M5, P3, P1)*V(M2, M4, M5, P2, P4)*D(P5) + V(M3, M1, M2, M4)) * (I*V(M1, M2, M6, -P1, -P2)*V(M3, M4, M6, -P3, -P4)*D(P6) - V(M1, M2, M3, M4));$$

$$B0 := \frac{3*(5*S^2 + 14*ST + 5*T^2)}{2*ST}$$

$$B1 := -V(M3, P5)*V(M4, -P2)*D(P5)*V(M6, P1)*V(M3, M4, M6, -P3, -P4)*D(P6)$$

$$B1 := 4*(B1 + \text{SUB}(S=T, T=S, B1));$$

$$B1 := \frac{S^2 + T^2}{S*T}$$

$$B2 := V(M2, -P4)*V(M3, P5)*D(P5)*V(M2, P1)*V(M3, P6)*D(P6)$$

$$B2 := 4*(B2 + \text{SUB}(S=T, T=S, B2));$$

$$B2 := 0$$

$$B3 := V(M5, -P1)*V(M5, -P4)*D(P5)*V(M6, P2)*V(M6, P3)*D(P6)$$

$$B3 := B3 + \text{SUB}(S=T, T=S, B3);$$

$$B3 := \frac{S^2 + 2*ST + T^2}{2*ST}$$

$$B0 := B0 + B1 + B2 + B3; \text{CLEAR } B1, B2, B3;$$

$$B0 := \frac{4*(2*S^2 + 5*ST + 2*T^2)}{S*T}$$

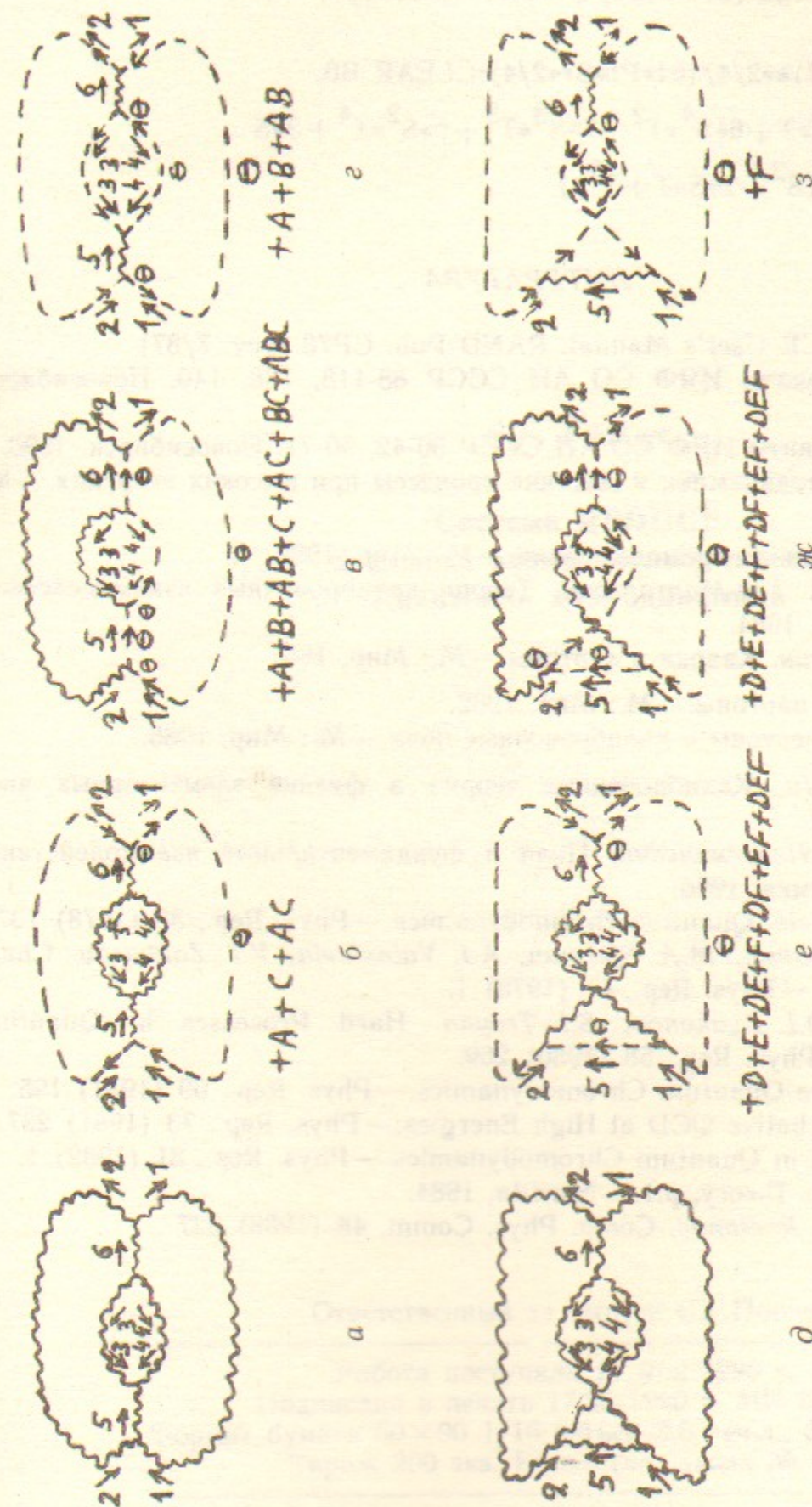


Рис. 35. Квадрированные диаграммы. На рисунках а, б подразумевается, что включен и член 4-глюонной вершины (рис. 33, а). На рисунках в—г добавляются симметричные диаграммы, получаемые перестановками $A = (1 \leftrightarrow 2)$, $B = (3 \leftrightarrow 4)$, $C = (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4)$ (первые 2 приводят к $t \leftrightarrow u$, третья не меняет результата). На рисунках е—з добавляются симметричные диаграммы, получаемые перестановками $D = (2 \leftrightarrow 3)$, $E = (1 \leftrightarrow 4)$, $F = (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4)$ (первые 2 приводят к $s \leftrightarrow t$, третья не меняет результата).

```

ON GCD;B0:=2*(B0+SUB(S=U,B0)+SUB(T=U,B0));
B0 := -72
A0:=(A0-B0/2)*(4*PI)**2/4/(64*PI*S**2/4);CLEAR B0;
A0:=(4*PI*(S6+3*S5*T+6*S4*T2+7*S3*T3+6*S2*T4+3*S
*T5+T6))/(S4*T2*(S2+2*S*T+T2))

```

ЛИТЕРАТУРА

1. A.C. Hearn. REDUCE User's Manual. RAND Pub. CP78 (rev. 7/87)
2. А.Г. Грозин. Препринты ИЯФ СО АН СССР 88-118, 136, 140. Новосибирск, 1988.
3. А.Г. Грозин. Препринты ИЯФ СО АН СССР 90-42, 90-71. Новосибирск, 1990.
4. И.В. Андреев. Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях. — М.: Наука, 1981.
5. Ф. Индурайн. Квантовая хромодинамика. — М.: Мир, 1982.
6. М.Б. Волошин, К.А. Тер-Мартirosян. Теория калибровочных взаимодействий. — Энергоатомиздат, 1984.
7. Ф. Хелзен, А. Мартин. Кварки и лептоны. — М.: Мир, 1987.
8. Ф. Клоуз. Кварки и партоны. — М.: Мир, 1982.
9. К. Хуанг. Кварки, лептоны и калибровочные поля. — М.: Мир, 1985.
10. Т.-П. Ченг, Л.-Ф. Ли. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. — М.: Мир, 1987.
11. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский. Поля и фундаментальные взаимодействия. — Киев: Наукова думка, 1986.
12. W. Marciano, H. Pagels. Quantum chromodynamics. — Phys. Rep., 36 (1978) 137.
13. V.A. Novikov, L.B. Okun, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov. Charmonium and gluons. — Phys. Rep., 41 (1978) 1.
14. Yu.L. Dokshitzer, D.I. Dyakonov, S.I. Troyan. Hard Processes in Quantum Chromodynamics. — Phys. Rep., 58 (1980) 269.
15. E. Reya. Perturbative Quantum Chromodynamics. — Phys. Rep., 69 (1981) 195.
16. A.H. Mueller. Perturbative QCD at High Energies. — Phys. Rep., 73 (1981) 237.
17. G. Altarelli. Partons in Quantum Chromodynamics. — Phys. Rep., 81 (1982) 1.
18. P. Cvitanovic. Group Theory, p.1. — Nordita, 1984.
19. A.P. Kryukov, A.Ya. Rodionov. Comp. Phys. Comm. 48 (1988) 327.

А.Г. Грозин

Система REDUCE в физике элементарных частиц Квантовая хромодинамика

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 11 мая 1990 г.
Подписано в печать 17.05 1990 г. МН 08626
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3,6 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 62

Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротационном аппарате Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.