

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

СТАТИСТИКА ВОЗВРАТОВ ПУАНКАРЕ  
И СТРУКТУРА СТОХАСТИЧЕСКОГО  
СЛОЯ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

ПРЕПРИНТ 81 - 69



Новосибирск

СТАТИСТИКА ВОЗВРАТОВ ПУАНКАРЕ И СТРУКТУРА  
СТОХАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА<sup>\*)</sup>

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский  
Новосибирск, СССР

А Н Н О Т А Ц И Я

Проведено исследование движения в стохастическом слое вокруг сепаратрисы нелинейного резонанса. Численно определялась интегральная функция распределения  $F(\tau)$  времени возврата  $\tau$  траектории в центр слоя. Найдено, что распределение  $F(\tau) \approx A\tau^{-\rho}$  является степенным, причем показатель степени принимает два разных значения: при  $\tau \leq \tau_0$  значение  $\rho = 1/2$  и при  $\tau \gg \tau_0$ ,  $\rho \approx 3/2$  (время  $\tau_0$  определяется характеристиками слоя).

<sup>\*)</sup> Доклад на IX Международной конференции по нелинейным колебаниям (Киев, 1981).

## I. Введение

В широких предположениях резонанс нелинейных колебаний гамильтоновой системы может быть описан и исследован в приближении маятника (см., например, /I/):

$$H_r(P, \Psi, t) = \frac{P^2}{2M} + \varepsilon V_r \cos \Psi + \varepsilon V [\cos(\nu\Psi - \theta) + \cos(\nu\Psi + \theta)] \quad (I.1)$$

Первые два слагаемых этого резонансного гамильтониана описывают изолированный нелинейный резонанс, причем импульс  $P$  характеризует отклонение невозмущенных переменных действия от их резонансных значений; "масса"  $M$  связана с нелинейностью колебаний и выражается через производные от невозмущенных частот по действиям;  $\varepsilon$  — малый параметр возмущения, а  $V_r$  и  $\Psi$  — амплитуда и фаза резонансной гармоники возмущения, соответственно. Последнее слагаемое в (I.1) описывает взаимодействие данного резонанса с остальными. Для упрощения изложения мы рассматриваем здесь взаимодействие только с двумя резонансами, расположенными симметрично относительно основного резонанса. Фаза возмущения  $\theta = \Omega t + \theta_0$ , а частота  $\Omega$  характеризует отстройку от основного резонанса;  $\nu$  — некоторая, вообще говоря, действительная постоянная, зависящая от геометрии резонансов. В дальнейшем положим  $M = V_r = 1$  и  $\varepsilon V = \eta \sim \varepsilon \ll 1$ . При этом частота фазовых колебаний на резонансе  $\Omega_\Phi = \sqrt{\varepsilon}$ . Основным малым параметром взаимодействия резонансов является отношение  $\lambda^{-1} = \frac{\Omega_\Phi}{\Omega} \ll 1$ . Малость  $1/\lambda$  означает, что резонансы хорошо разделены друг от друга.

Формальный математический анализ "простой" системы (I.1) наталкивается на значительные и все еще непреодолимые трудности, которые были известны уже Пуанкаре. Именно, взаимодействие резонансов приводит к "расщеплению" невозмущенной сепаратрисы каждого из них и образованию в высшей степени сложной гомоклинической структуры. Эти трудности можно, однако, обойти, построив приближенно модифицированное отображение Пуанкаре в плоскости  $\Psi = \pi$  (эллиптическая точка основного резонанса) /I/. Для системы (I.1) отображение имеет вид:

$$\bar{w} = w + \bar{z} \cdot \sin \theta ; \quad \bar{\theta} = \theta + \lambda \cdot \ln \frac{32}{|w|} \quad (I.2)$$

где  $w = \frac{y_r}{\varepsilon} - 1$  — смещение относительно невозмущенной сепаратрисы;  $\theta$  — фаза возмущения в плоскости  $\Psi = \pi$ , а

$$\tilde{\gamma} = -2\pi \frac{\eta}{\varepsilon} \cdot \frac{(2\lambda)^2}{\Gamma(2\nu)} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Omega}{\varepsilon}\right) \quad (I.3)$$

новый малый параметр возмущения.

Переход к отображению вида (I.2), помимо общего упрощения аналитического и численного исследования системы (I.1), решает две важные задачи. Во-первых, при этом исключаются периодические по возмущению эффекты, вызывающие лишь деформацию, но не расщепление сепаратрисы (подробнее см. в /I/). Во-вторых, появляется естественный малый параметр (I.3), по которому уже можно производить асимптотическое разложение и, в частности, применять весьма эффективный метод усреднения /2/. Поясним в связи с этим, что асимптотическое разложение по исходному малому параметру  $\varepsilon$  не приводит к цели ввиду сингулярности выражения (I.3) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для преодоления этой трудности, казавшейся когда-то весьма принципиальной, оказалось достаточным точно, а не асимптотически, проинтегрировать исходные уравнения движения непрерывной системы (I.1) на полупериоде фазовых колебаний. Впервые это было сделано Мельниковым /3/, который оценил по порядку величины расщепление сепаратрисы, даваемое малым параметром  $\tilde{\gamma}$  (I.3).

Вводя новую переменную  $Y = w/\tilde{\gamma}$  и пренебрегая постоянным сдвигом фазы  $\theta$ , запишем отображение (I.2) в виде

$$\bar{Y} = Y + \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta - \lambda \ln |\bar{Y}| \quad (I.4)$$

Это каноническое отображение, зависящее от единственного параметра  $\lambda \gg 1$  и будет исследоваться ниже.

## 2. Ширина стохастического слоя

Важнейшей характеристикой гомоклинической структуры в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса является ее полная ширина. Ввиду чрезвычайной сложности этой структуры до сих пор не удалось получить строгую оценку ее ширины. Ниже мы кратко воспроизводим приближенное решение этой задачи /1/ путем линеаризации отображения (I.4) по переменной  $Y$  и приведения его к так называемому стандартному отображению

$$\bar{P} = P + K \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{P} \quad (2.1)$$

где  $K = \lambda/y_r$  — параметр, характеризующий в данном случае локальную структуру стохастического слоя в окрестности  $Y \approx y_r$  резонанса  $\lambda \ln y_r = 2\pi r$  ( $r$  — целое);  $P = \lambda(y - y_r)/y_r$  — новый импульс.

Динамика стандартного отображения (2.1) весьма подробно, хотя все еще не полностью, изучена к настоящему времени как численно, так и аналитически (см., например, /I, 4/. В частности, надежно установлено, что граница стохастичности движения с точностью порядка нескольких процентов лежит при  $K \approx 1$ . Отсюда сразу следует, что ширина стохастического слоя ( $|Y| < y_m$ ) приблизительно равна

$$y_m \approx 1; \quad w_m \approx \lambda \tilde{\gamma} \quad (2.2)$$

т.е. в  $\lambda = \Omega/\Omega_\Phi = \Omega/\varepsilon$  раз больше, чем расщепление сепаратрисы. При дополнительном условии  $\varepsilon \ll 1$  точность последней оценки  $\delta y_m/y_m \sim 1/\lambda$  и определяется, в основном, расположением крайнего резонанса с  $y_r \approx 1/I$ . В случае  $\varepsilon \geq \varepsilon$  оценка (2.2) справедлива только по порядку величины /1/ как и все более ранние оценки ширины стохастического слоя (см., например, /5-7/). Отметим, что при  $\varepsilon \geq \varepsilon \lambda^2/\varepsilon^2$  конфигурация стохастического слоя существенно изменяется за счет появления устойчивой области в окрестности  $\Psi = 0$  вследствие динамической фокусировки, которая сохраняется до  $\varepsilon \leq \lambda^2/\varepsilon^2$ .

Стохастический слой в окрестности сепаратрисы нелинейных резонансов сохраняется при сколь-угодно малом возмущении ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), хотя его ширина и убывает при этом экспоненциально (I.3). Значение такой стохастической компоненты состоит в том, что в многомерной системе (с числом степеней свободы  $N > 2$ ) пересекающиеся друг с другом стохастические слои нелинейных резонансов образуют систему каналов, по которым траектория движения может уходить сколь-угодно далеко от начального положения. Этот процесс известен под названием диффузии Арнольда и обсуждался уже на одной из предыдущих Международных конференций по нелинейным колебаниям /8/ (см. также /I, 9, 10/). Диффузия Арнольда является, таким образом, универсальной стохастической неустойчивостью в многомерных гамильтоновых системах /1/. Вместе с тем, стохастические слои нелинейных резонансов являются "зародышами" значительно более сильной и опасной глобальной стохастической неустойчивости, которая возникает при увеличении, с ростом возмущения, ширины резонансов и их стохастических слоев и слиянии по-

ледних в сплошную стохастическую компоненту.

### 3. Глобальная структура стохастического слоя

Согласно /I/ стохастический слой нелинейного резонанса можно грубо подразделить на две части:

1) центральная часть  $|y| \leq y_m/4$  (2.2), в которой устойчивая компонента, по-видимому, полностью отсутствует (см. также /II/) или, во всяком случае, ее доля очень мала;

2) периферическая часть ( $y_m/4 \leq |y| \leq y_m$ ), где имеется значительная устойчивая компонента очень сложной иерархической структуры (см. /I/ и ниже, раздел 4). Именно с этой периферической областью и связаны основные трудности изучения движения в стохастическом слое.

На рис. I приведена равновесная функция распределения в слое  $f_0(y/\lambda)$  усредненная по фазе  $\theta$ . Равновесное распределение получено по одной траектории в результате  $T=10^7$  итераций отображения (I.4), размер ячейки гистограммы составлял  $\Delta(y/\lambda) = 10^{-2}$ ;  $\lambda = 9$ . Из рис. I ясно видно, что в области  $|y/\lambda| \leq 0.4$  функция распределения оказывается практически постоянной  $f_0(y/\lambda) \approx 1.1$ . Небольшие отклонения в величине  $f_0$  находятся на уровне статистических флуктуаций. При  $|y/\lambda| > 0.4$  функция  $f_0(y/\lambda)$  уменьшается, причем в интервале  $0.5 \leq |y/\lambda| \leq y_m/4 \approx 1.18$  равновесная функция в среднем хорошо описывается эмпирической формулой (см. рис. I.2):

$$f_0(x) = C x^\delta; \quad x = \frac{y_m - |y|}{\lambda} \quad (3.1)$$

Подгонка по методу наименьших квадратов дает  $\langle \log C \rangle = 0.089$ ;  $\langle \delta \rangle = 0.48 \approx 1/2$ . На рис. 2 приведена функция  $f_0(x)$  в периферической части слоя, прямая соответствует зависимости (3.1) с  $\delta = 1/2$  и  $C = 1.3$ . Колебания  $f_0$  определяются резонансами системы (I.4) ( $y_r = \exp(2\pi r/\lambda)$ ) и зависят от  $\lambda$ , однако, усредненное распределение (3.1) остается, по-видимому, неизменным.

Грубые свойства  $f_0(x)$  могут быть объяснены на основе следующих качественных представлений. Равновесная плотность стохастической траектории на плоскости  $(y, \theta)$  отлична от нуля и постоянна только в стохастической компоненте, т.е. во всей области стохастического слоя кроме островков устойчивости ("дырок"). При проектировании этой плотности на ось  $y$  (усреднение по  $\theta$ )

функция распределения  $f_0(y/\lambda)$  будет понижена в районе дырки. Несколько таких понижений явно видны на рис. I. Так как в центральной части слоя устойчивая компонента практически отсутствует, то в этой области  $f_0(y/\lambda) \approx \text{const}$ , а в периферической части, где мера устойчивой компоненты растет с ростом  $y$ , происходит уменьшение  $f_0$ .

Отметим, что из-за изменения равновесной функции распределения ( $f_0(y/\lambda) \neq \text{const}$ ) уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), описывающее диффузию по  $y$  при  $\lambda \gg 1$ , содержит также и недиффузионный член /I3/:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial y}; \quad q = - D(y) \frac{\partial f}{\partial y} + Q(y) f \quad (3.2)$$

Функция  $Q(y)$  может быть выражена через  $f_0(y)$  /I2/:

$Q(y) = (D/f_0) \cdot (df_0/dy)$ . В нашем случае из свойств равновесной функции распределения  $f_0$  следует, что в центральной части стохастического слоя  $Q = 0$ , а в периферической:

$$Q = - \frac{\lambda D \cdot \text{sgn}(y)}{2(y_m - |y|)} \quad (3.3)$$

(см. (3.1)). Следует отметить, что при  $Q \neq 0$  нарушается детальное равновесие, т.е. вероятности прямых и обратных переходов не разны между собой. Причиной этого является наличие устойчивых областей в периферической части слоя и, как следствие, зависимость меры стохастической компоненты в интервале  $dy$  от  $y$ . Если ввести новую "равновесную" переменную  $\mu = \int f_0(y') dy'$ , которая есть просто нормированная мера стохастической компоненты, то поток  $q$  становится чисто диффузионным ( $Q \sim \frac{df(\mu)}{d\mu} = 0$ ). В переменной  $\mu$  детальное равновесие восстанавливается, а уравнение ФПК принимает простой вид

$$\frac{\partial f(\mu, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mu} (D(\mu) \frac{\partial f(\mu, t)}{\partial \mu}) \quad (3.4)$$

$$D(\mu) = D(y) \left( \frac{d\mu}{dy} \right)^2 = D(y) f_0^2(y).$$

Подробнее см. в /I3/.

#### 4. Периферическая часть стохастического слоя

Для дальнейшего исследования структуры периферической части стохастического слоя мы использовали статистику возвратов Пуанкаре<sup>\*)</sup>. Этот метод был подсказан работой /I4/, в которой изучалась фактически та же задача, хотя авторы и не говорят об этом явно. Метод состоит в численном определении функции распределения времени возврата ( $\tau$ ) траектории отображения (I.4) в центр стохастического слоя по переменной  $Y$  независимо от значения фазы ( $Y=0$ ,  $\theta$  - произвольно). Для упрощения обработки рассматривалась совместная статистика возвратов в обоих половинах стохастического слоя ( $Y > 0$  и  $Y < 0$ ), движение в которых отличается только сдвигом по фазе ( $\theta \rightarrow \theta + \pi$ ). Время возврата принималось при этом равным (целому) числу итераций отображения (I.4) между двумя последовательными прохождениями через центр слоя  $Y=0$ . Интегральная функция распределения  $F(\tau)$  определялась по одной траектории как отношение числа возвратов  $N_\tau$  через время  $>\tau$  к полному числу возвратов  $N_0$  за все время движения  $T$ .

Гистограммы распределений  $F(\tau)$  для  $\lambda = 1; 3; 5; 7; 10; 30; 100$  при  $T = 10^7$  приведены на рис.3. Видно, что при достаточно малых  $\tau < \tau_c(\lambda)$  распределение  $F(\tau)$  хорошо описывается функцией  $1/\sqrt{\tau}$  ( $\tau > 1$ ) (прямая на рис.3) в согласии с результатами /I4/. Однако при больших  $\tau$  функция  $F(\tau)$  убывает значительно быстрее и может быть грубо аппроксимирована выражением

$$F(\tau) \approx \frac{A(\lambda)}{\tau^\rho} ; \quad \tau \gg \tau_c(\lambda) \quad (4.1)$$

Среднее значение по всем численным данным  $\langle \rho \rangle = 1.45 \pm 0.05 \approx 3/2$ , хотя отдельные значения  $\rho$  заметно различаются, особенно для  $\lambda = 1$  (I.64);  $\lambda = 30$  (I.26);  $\lambda = 100$  (I.27). Эмпирическая зависимость  $A(\lambda)$  приведена на рис.4 и может быть описана выражением  $A(\lambda) \approx 3.5 \lambda$  (прямая на рис.4). Следует отметить, что действительное распределение  $F(\tau, \lambda)$  значительно сложнее (4.1), в частности, кривые с различными  $\lambda$  пересекаются

<sup>\*)</sup>Отметим, что из возвратной теоремы Пуанкаре вовсе не следует квазипериодичность движения как иногда считают. В рассматриваемом случае, например, спектр движения непрерывный.

в нескольких точках (рис.3) и как бы стягиваются. Небольшие плато в самом конце некоторых кривых получились из-за малой статистики ( $N_\tau \sim 1$ ).

Начальная зависимость  $F(\tau) \approx 1/\sqrt{\tau}$  естественно объясняется свободной диффузией в центральной части слоя, пока конечная ширина слоя еще не существенна (см., например, /I5/), т.е. для  $\tau \leq \lambda^2$ . Действительно, численные данные показывают, что граница этой области  $\tau_c \approx 0.3 \cdot \lambda^2$ . Если бы зависимость  $F = 1/\sqrt{\tau}$  сохранялась при любых  $\tau$ , то среднее  $\langle \tau \rangle$  расходилось бы /I4/. Однако при  $\tau \gg \tau_c$  показатель  $\rho$   $\approx 1$ , так что  $\langle \tau \rangle$  оказывается конечным:  $\langle \tau \rangle \sim \int F(\tau) \tau d\tau = \sqrt{\tau_c} \sim 1$ . Численные эксперименты дают  $\langle \tau \rangle \approx 3.2 \lambda$  (без случая  $\lambda = 1$ ).

Отметим, что хотя  $\langle \tau \rangle$  конечно,  $\langle \tau^2 \rangle$  расходится при  $\rho = 3/2$ . Это приводит к увеличению флуктуаций, что по-видимому, наблюдалось в /I4/. Например, флуктуации численного значения  $\langle \tau \rangle$  по одной траектории

$$\frac{\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2}{N_0 \langle \tau \rangle^2} \sim \frac{3}{T^{2/3}} \left( \frac{A}{\langle \tau \rangle} \right)^{4/3} \quad (4.2)$$

Поясним, что убывание флуктуаций с  $T$  связано с тем, что  $\langle \tau^2 \rangle \propto \sqrt{\tau_m} \propto N_0^{4/3}$  растет медленнее, чем  $N_0$ . Максимальное время возврата  $\tau_m$  оценивается из условия  $F(\tau_m) \sim N_0^{-1}$ . Оценка (4.2) подтверждается численными данными.

Вид распределения  $F(\tau)$  позволяет высказать некоторые соображения о структуре стохастического слоя. В частности, можно попытаться связать зависимость (4.1) со скоростью диффузии вблизи края стохастического слоя.

Локальные свойства отображения (I.4) и, в частности, коэффициент диффузии по  $Y$  характеризуются параметром  $K = \lambda Y \approx \frac{1}{1-x}$  (см. (2.1)), который зависит только от  $x$ . Предположим, что при  $x \rightarrow 0$   $D_Y(x) = D_x(x) \lambda^2 \sim x^\alpha$ , так что скорость диффузии быстро падает к краю слоя. Тогда в качестве первого грубого приближения можно принять, что время возврата  $\tau$  (при  $\tau \rightarrow \infty$ ) определяется, по порядку величины, среднем временем диффузии из области  $x \rightarrow 0$  до центра слоя. Последнее оценивается как

$\tau \sim x^2/D_x \sim \lambda^2 x^{2-\alpha}$ . Таким образом, возвраты со временем  $\tau$  связаны с попаданием траектории в область  $x \leq (\lambda^2/\tau)^{1/(\alpha-2)}$ . С другой стороны, мера этой области связана с распределением

$F(\tau)$  посредством

$$\mu(x) \sim \frac{N_\tau \cdot \tau(x)}{T} \sim \frac{N_\tau \cdot \tau}{N_0 \langle \tau \rangle} = \frac{F \cdot \tau}{\langle \tau \rangle} \quad (4.3)$$

вследствие эргодичности движения. Наконец, функция  $\mu(x)$  получается из (3.1):

$$\mu(x) = \int_0^x f_0(x) dx \sim x^{1+\delta}$$

Окончательно находим (при  $\alpha > 2$ )

$$F(\tau) \sim \frac{\lambda^\alpha}{\tau^\rho}; \rho = 1 + \frac{1+\delta}{\alpha-2}; \alpha = 2\rho - 1 \quad (4.4)$$

т.е. распределение  $F(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  оказывается степенным, а не экспоненциальным как обычно считается (см., например, /14/). Это связано с тем, что при  $\alpha > 2$  траектория не достигает края слоя ( $X=0$ ) за конечное время. При  $\alpha < 2$  время диффузии поперец слоя конечно и тогда, как известно, распределение  $F(\tau)$  убывает экспоненциально вследствие флуктуаций диффузии. Можно показать, что при  $\alpha = 2$  зависимость  $F(\tau)$  также является экспоненциальной, хотя среднее время диффузии до края слоя оказывается бесконечным.

Если использовать приведенные выше эмпирические значения  $\rho = 3/2$ ;  $\delta = 1/2$ , то  $\alpha = 5$ ;  $\lambda = 2$ . Полученное значение  $\alpha$  существенно превышает  $\alpha \approx 2.6$ , найденное в /1/ путем непосредственного измерения скорости диффузии, однако, большие флуктуации делают последнее значение недостоверным. С другой стороны, значение  $\delta = 1/2$  также нельзя, по-видимому, считать окончательным, во всяком случае, при  $X \rightarrow 0$ . Более того, из данных /1/ можно сделать заключение, что  $f_0(x) \rightarrow 0.5$  при  $x \rightarrow 0$ . Это не противоречит рис. I за исключением области  $|y/\lambda| > 1.1$ , где зависимость  $f_0(x) \sim \sqrt{x}$  может объясняться, например, изгибанием края слоя. Тогда  $\delta = 0$ , а  $\alpha = 4$ .

Значение  $\lambda = 2$  отличается от эмпирического  $\lambda = 1$ , хотя это различие и нельзя считать твердо установленным из-за значительного разброса точек на рис. 4. Более того, если отбросить случаи с  $\lambda = 1$  (слишком мало) и  $\lambda = 30; 100$  (недостаточное время счета для выхода на асимптотику (4.1)), то оставшиеся 4 случая дают  $A \approx \lambda^{1.76}$ . Этот вопрос, таким образом, требует дальнейшего исследования.

Несмотря на некоторую неопределенность численных результатов и оценок, можно считать установленным, как нам кажется, что флуктуации времени возврата траектории в стохастическом слое убывают во всяком случае неэкспоненциально. Этот результат остается, по-видимому, справедливым и для других типов границы между стохастической и устойчивой компонентами. В частности, проведенные нами численные эксперименты с отображением (1.4) с заменой  $\lambda \ln |y|$  на  $\lambda^2/|y|$  показали, что и в этом случае распределение  $F(\tau)$  имеет вид (4.1) с близким показателем  $\langle \rho \rangle = 1.71 \pm 0.11$ .

Л и т е р а т у р а :

1. B.V.Chirikov, Physics Reports 52 (1979) 263.
2. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, М., 1974.
3. В.К.Мельников. ДАН СССР 142: 3 (1962) 542; Труды Московского мат.общества 12. (1963) 3.
4. J.M.Greene, J. Math. Phys. 20 (1979) 1183.
5. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко, ЖЭТФ, 54 (1968) 1590.
6. Б.В.Чириков, Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, препринт 267, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.
7. A.B.Rechester, T.H.Stix, Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 587.
8. Г.В.Гадияк, Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, Труды 7-й Международной конференции по нелинейным колебаниям (Берлин, 1975), т.П, I, с.315.
9. J.L.Tennyson, M.A.Lieberman, A.J.Lichtenberg, in Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction, A.I.P. Conf. Proc. No 57, 1979, p. 272.
10. B.V.Chirikov, J.Ford, F.Vivaldi, ibid, p. 323.
- II. A.J.Lichtenberg, M.A.Lieberman, R.H.Cohen, Fermi Acceleration Revisited, preprint UCB/ERL M80/36, College of Engineering, University of California, Berkeley, 1980.
12. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, Физическая кинетика, Наука, М., 1979.
13. Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский. Диффузия при многократном прохождении нелинейного резонанса, препринт 80-2II, ИЯФ СО АН СССР, 1980.
14. S.R.Channon, J.L.Lebowitz, Numerical Experiments in Stochasticity and Heteroclinic Oscillation, Annals of the New York Academy of Sciences 357 (1980) 108.
15. А.А.Боровков, Теория вероятностей, Наука, М., 1976.

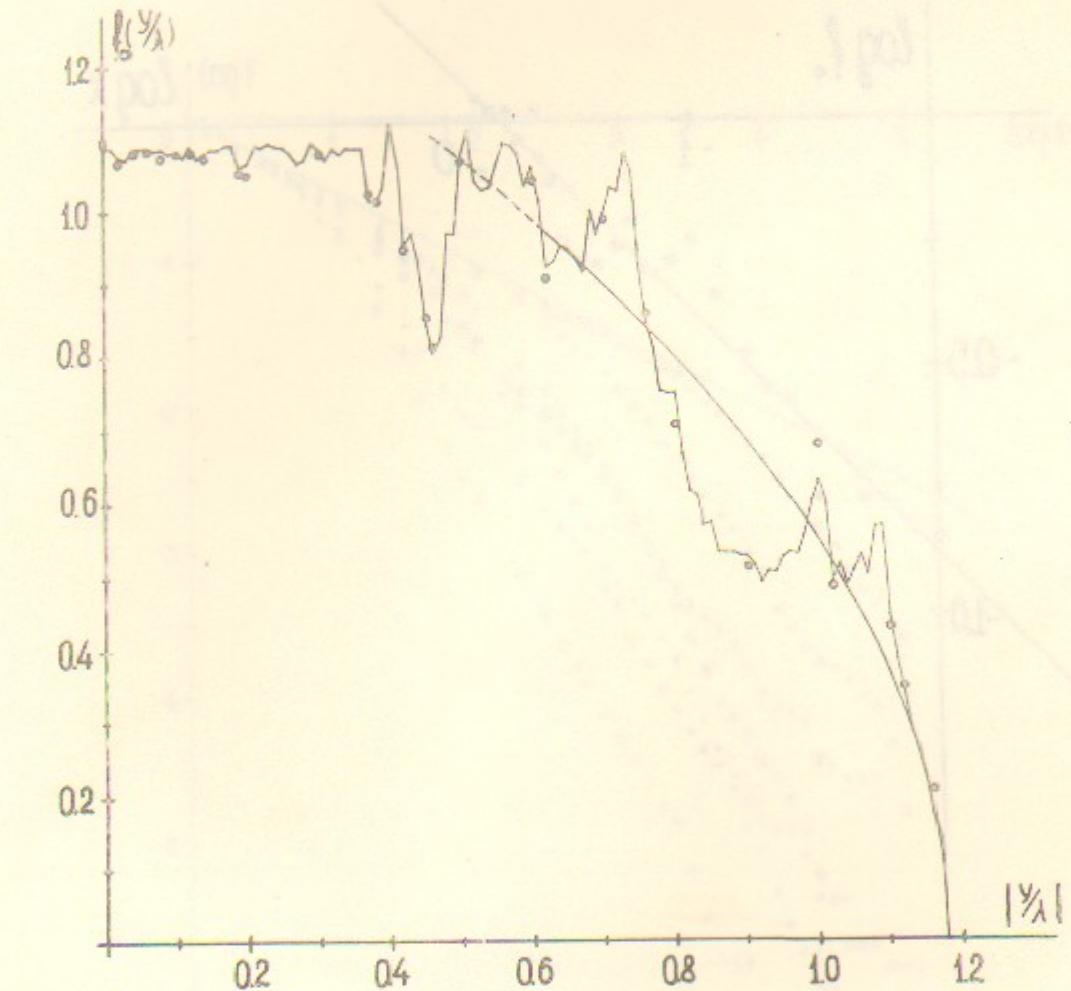


Рис. I. Равновесная функция распределения в стохастическом слое при  $\lambda = 9$ ; доманная линия -  $10^4$  итераций; кружки -  $4 \times 10^6$ ; кривая (3.1) с  $\delta = 1/2$ ;  $C = 1.3$ .

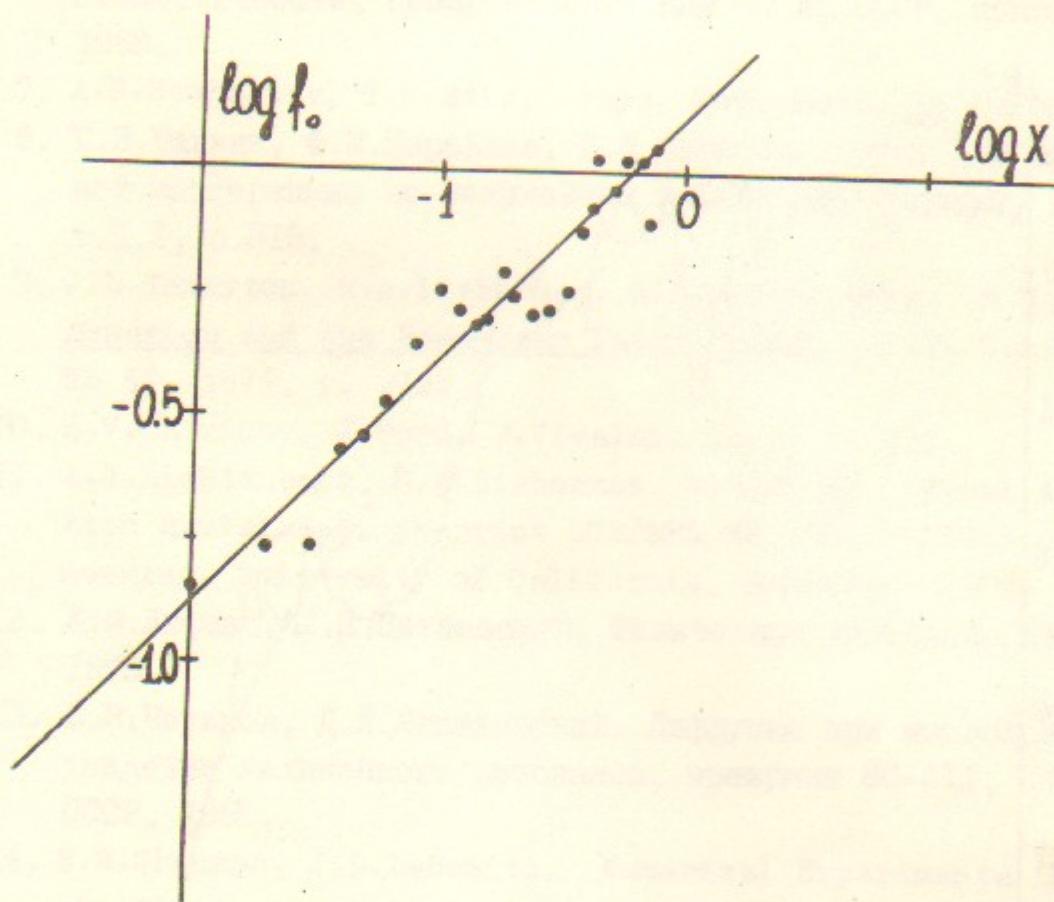


Рис.2. То же, что и на рис.1, но в другом масштабе, прямая соответствует кривой на рис.1. Логарифмы здесь и дальше – десятичные.

14

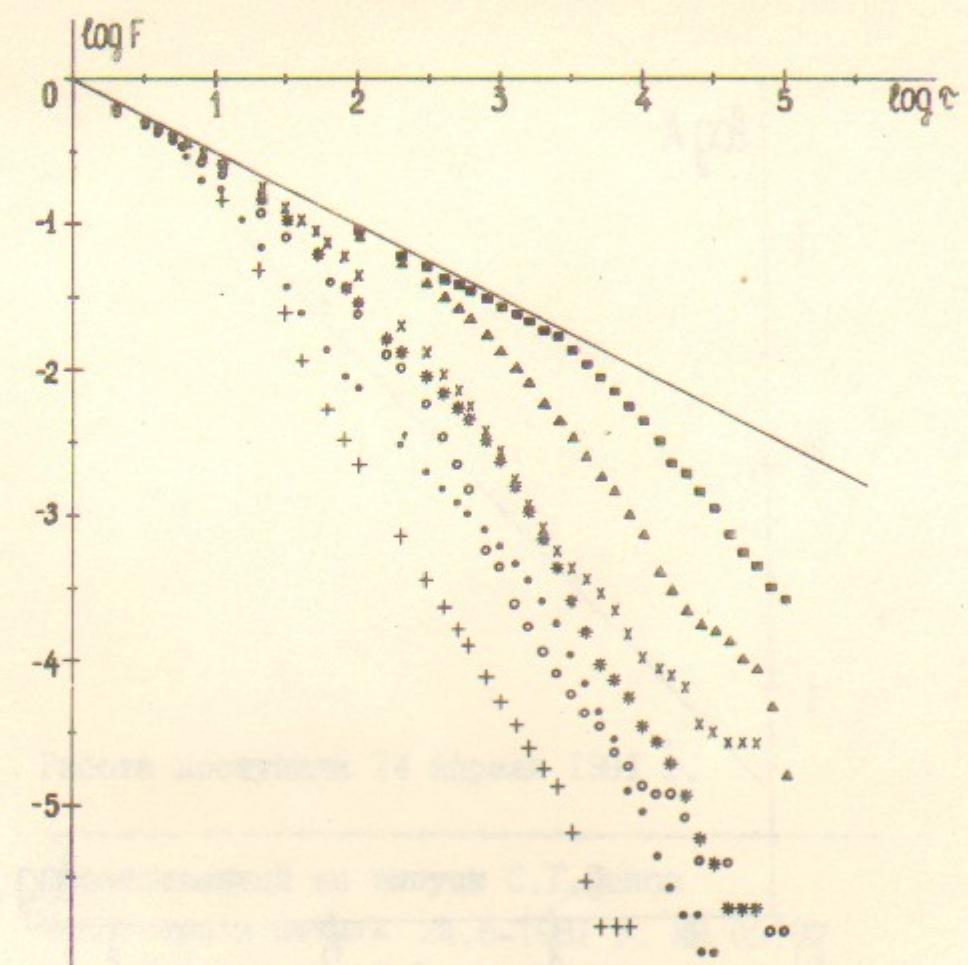


Рис.3. Распределение возвратов траектории в стохастическом слое:  $\lambda = 1(+); 3(·); 5(0); 7(*); 10(X); 30(▲); 100(■)$ ; прямая –  $F(t) = 1/t$ .

15

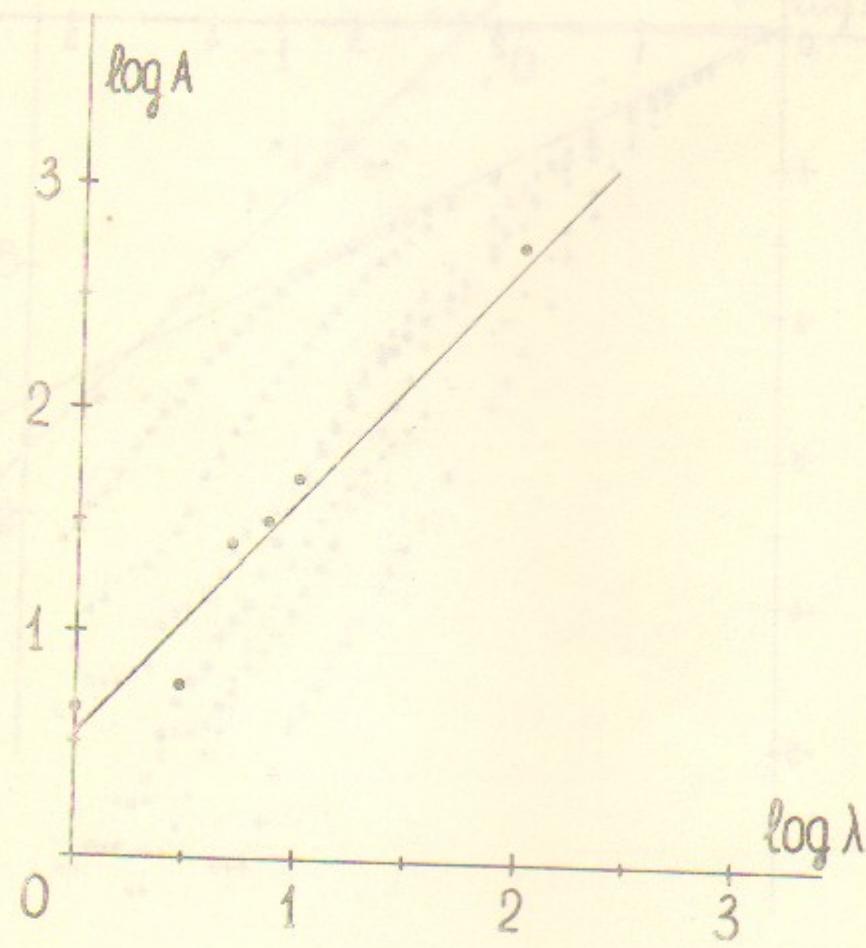


Рис.4. Зависимость  $A(\lambda)$ ; точки - численный счет;  
прямая - подгонка ( $A = 3.5 \lambda^{2.06}$ ).

Работа поступила 14 апреля 1981 г.

---

Ответственный за выпуск С.Г.Попов  
Подписано к печати 24.6.1981 г. МН 03197  
Усл. I, I печ.л., 0,9 учетно-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 69.

---

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР