

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

47

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 78

Б.З.Персов

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВАКУУМНЫХ
КАМЕР

Новосибирск

1976

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВАКУУМНЫХ КАМЕР

Б.З.Персов

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена задача расчета деформаций и напряжений в прямоугольных вакуумных камерах. Изложена методика расчета и приведены выражения для определения деформаций и напряжений в характерных точках поперечного сечения камеры. Рассмотрена возможность приближенного расчета камер с оценкой допускаемой погрешности. С целью сокращения времени при практическом расчете приведены графики для определения деформаций и напряжений в камере.

Вакуумные камеры некруглого сечения являются типичным элементом конструкции различных электрофизических установок, в том числе и ускорителей заряженных частиц. Их расчету посвящены, в частности, работы /1/,/2/,/3/, первая из которых содержит анализ напряжений в материале камер эллиптической и квазиэллиптической формы, а вторая и третья касаются расчета напряжений и деформаций в камерах овальной формы и в камерах квадрупольных линз.

В данной работе рассматривается расчет напряжений и деформаций в характерных точках поперечного сечения прямоугольных вакуумных камер.

Рассматриваемая камера представляет собой конструкцию, поперечное сечение которой схематически представлено на рис. I, нагруженную равномерно распределенным по ее поверхности внешним давлением q . В общем случае стени камеры могут иметь попарно различную толщину и быть изготовлены из различных материалов.

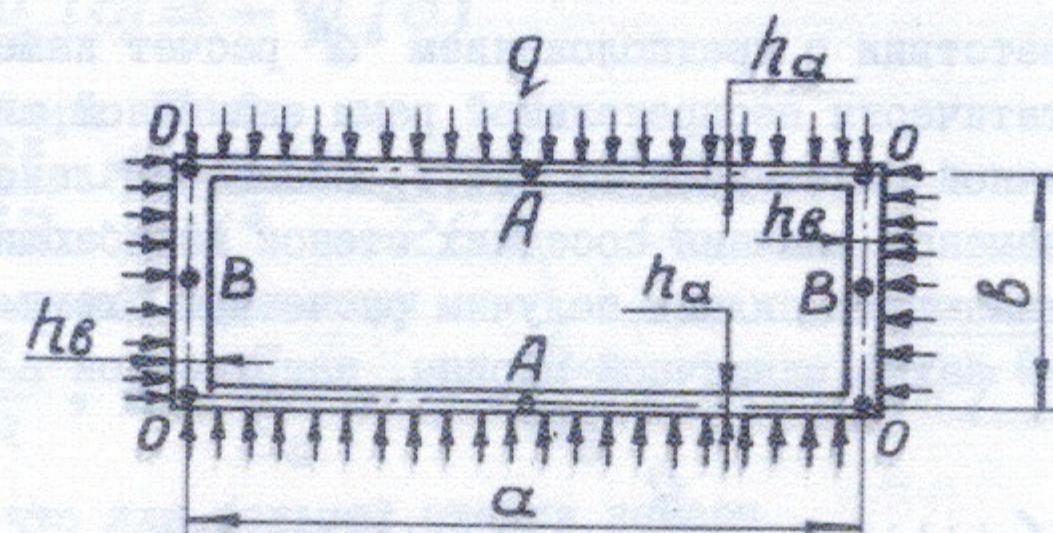


Рис. I

В нагруженном состоянии деформации стенок должны находиться в заранее заданных пределах, а напряжения в материале стенок не должны превышать допустимых значений для данных материалов. Определение этих деформаций и напряжений в характерных точках поперечного сечения камеры и является целью настоящего расчета.

Расчет ведется при следующих предположениях:

- камера представляет собой тонкостенную оболочку, для которой выполняются условия /4/:

$$a \geq 5h_a; b \geq 5h_b$$

б) камера является длинной оболочкой, т.е. выполняется соотношение:

$$L \geq 2a$$

где L - длина камеры в направлении ее оси.

В этом случае напряженное состояние вдали от закрепленных торцов камеры практически не зависит от условий закрепления /4/, и камера может рассчитываться как не закрепленная на торцах. Для камер с $L < 2a$ приводимая методика дает повышенный запас прочности.

в) в процессе деформирования в местах соединения стенок камеры обе смежные стенки имеют одинаковые по величине угловые деформации (различающиеся, естественно, по знаку).

МЕТОДИКА РАСЧЕТА И РЕЗУЛЬТАТЫ

В соответствии с предположением "б" расчет камеры сводится к расчету статически неопределенной рамы единичной ширины с формой, аналогичной показанной на рис.1. После расчленения рамы на элементы с заменой влияния соседних стенок изгибающими моментами и осевыми сжимающими силами получим расчетную схему для каждой стенки в виде балки единичной ширины, нагруженной в соответствии с рис.2.

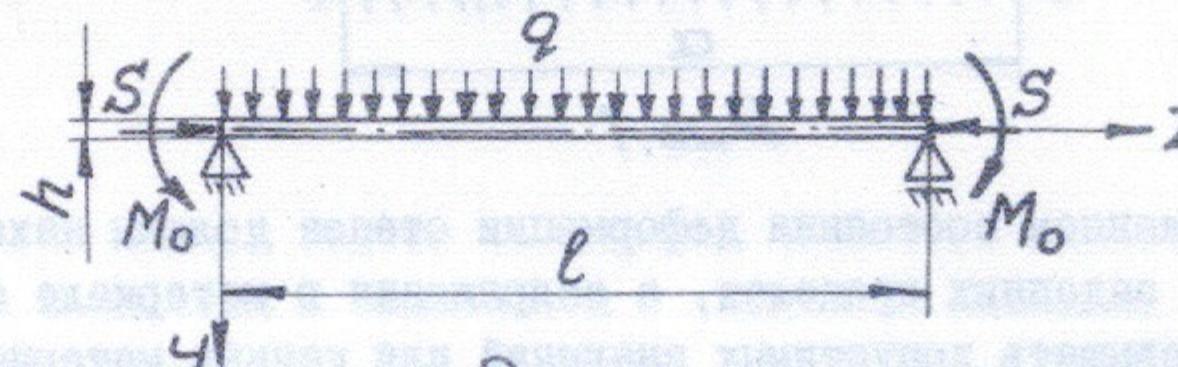


Рис.2

Уравнение упругой линии такой балки имеет вид /5/ :

$$y(z) = \frac{q l^4}{16 E J u^4} \left[\frac{\cos u(1-\frac{2z}{l})}{\cos u} - 1 \right] - \frac{q l^2}{8 E J u^2} z(l-z) - \frac{M_o}{S} \left[\frac{\sin \alpha(l-z)}{\sin \alpha l} - \frac{l-z}{l} \right] - \frac{M_o}{S} \left(\frac{\sin \alpha z}{\sin \alpha l} - \frac{z}{l} \right) \quad (I)$$

где, кроме известных обозначений,

E - модуль упругости материала, кг/см²,

J - момент инерции сечения балки прямоугольного сечения единичной ширины, см⁴;

$$\alpha = \sqrt{\frac{S}{EJ}} ; \quad U = \frac{\alpha l}{2}$$

Дифференцируя, получаем выражение для угла поворота сечения балки:

$$\varphi(z) = \frac{d}{dz} [y(z)] = \frac{q l^3}{8 E J u^3} \cdot \frac{\sin u(1-\frac{2z}{l})}{\cos u} - \frac{q l^2}{8 E J u^2} (l-2z) - \frac{M_o l}{2 E J u} \cdot \frac{\cos \alpha z - \cos \alpha(l-z)}{\sin \alpha l} \quad (2)$$

В выражения (1) и (2) входит неизвестный изгибающий момент M_o , который может быть определен из предположения "в":

$$\varphi_a(0) = -\varphi_b(0) \quad (3)$$

Согласно (2) при $z=0$

$$\varphi(0) = \frac{q l^3}{8 E J} \cdot \frac{t g u - u}{u^3} - \frac{M_o l}{2 E J} \cdot \frac{t g u}{u}$$

Вводя безразмерные параметры

$$\beta = \frac{b}{a}, \quad \xi = \frac{E_a}{E_b}, \quad \eta = \frac{h_a}{h_b}, \quad \alpha = \sqrt{\beta \xi \eta^3}$$

и учитывая, что для большей стенки камеры

$$U_a = \frac{\alpha_a A}{2} = \sqrt{\frac{S_a}{E_a J_a}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{q a \beta}{2 E_a J_a}},$$

а для меньшей

$$U_b = \frac{\alpha_b b}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{S_b}{E_b J_b}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{q a \beta \cdot \beta \xi \eta^3}{2 E_a J_a}} = \alpha U_a,$$

получим выражения для углов поворота стенок камеры в месте их соединения

$$\varphi_a(0) = \frac{q a^3}{8 E_a J_a} \cdot \frac{t g U_a - U_a}{U_a^3} - \frac{M_o a}{2 E_a J_a} \cdot \frac{t g U_a}{U_a}$$

$$\varphi_b(0) = \frac{q a^3}{8 E_a J_a} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot \frac{t g \alpha U_a - \alpha U_a}{U_a^3} - \frac{M_o a}{2 E_a J_a} \alpha \frac{t g \alpha U_a}{U_a}$$

Используя соотношение (3), получаем значение изгибающего момента в месте соединения стенок камеры:

$$\left. \begin{aligned} M_o &= q\alpha^2 \cdot K_m \\ \text{где } K_m &= \frac{\tan U_a - U_a + \frac{\beta^2}{\alpha} (\tan \alpha U_a - \alpha U_a)}{4U_a^2 (\alpha \tan \alpha U_a + \tan U_a)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Выразив через параметры стенок камеры сжимающую силу S

$$S = \alpha^2 E J = \frac{4U^2}{\ell^2} E J,$$

что для стенок камеры дает

$$S_a = \frac{4U_a^2}{\alpha^2} E_a J_a$$

$$S_b = \frac{4U_b^2}{\beta^2} E_b J_b = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{4U_a^2}{\alpha^2} E_a J_a,$$

и используя выражения (1), (4) и приведенные выше безразмерные параметры, можно получить соотношения для деформаций камеры в точках А и В (рис. I):

$$W_A = \frac{q\alpha^4}{E_a h_a^3} \cdot K_{WA},$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } K_{WA} &= \frac{3}{4U_a^2} \left[\left(\frac{1}{\cos U_a} - 1 \right) \left(\frac{1}{U_a^2} - 4K_m \right) - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$W_B = \frac{q\alpha^4}{E_b h_b^3} \cdot K_{WB},$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } K_{WB} &= \frac{3\beta^2}{4\alpha^2 U_a^2} \left[\left(\frac{1}{\cos \alpha U_a} - 1 \right) \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2 U_a^2} - 4K_m \right) - \frac{\beta^2}{2} \right] \end{aligned} \right\}$$

Наибольшее напряжение в балке, подверженной продольно-поперечному изгибу, определяется выражением /6/ :

$$|\sigma|_{max} = \frac{S}{F} + \frac{M_{max}}{W}$$

где F и W – соответственно площадь и момент сопротивления сечения балки. Для балки единичной ширины, нагруженной в соответствии с рис. 2, это выражение приобретает вид:

$$|\sigma|_{max} = \frac{S}{h} + \frac{6M_{max}}{h^2}$$

Для места соединения стенок камеры это выражение дает

$$|\sigma|_{max} = \frac{S}{h} + \frac{6M_o}{h^2}$$

или, для большей стенки

$$|\sigma|_{oa} = \frac{q\alpha^2}{h_a^2} \cdot K_{boa}, \text{ где } K_{boa} = \frac{\beta h_a}{2\alpha} + 6K_m$$

а для меньшей стенки

$$|\sigma|_{ob} = \frac{q\alpha^2}{h_b^2} \cdot K_{bob}, \text{ где } K_{bob} = \frac{h_a}{2\alpha} + 6K_m$$

Для точек А и В – середин сторон сечения камеры – выражения для изгибающего момента будут иметь вид:

$$M_A = M_A^q - M_o + S_a \cdot W_A = q\alpha^2 \left(\frac{1}{8} - K_m + \frac{q\alpha^3 \beta}{2E_a h_a^3} \cdot K_{WA} \right)$$

$$M_B = M_B^q - M_o + S_b \cdot W_B = q\alpha^2 \left(\frac{\beta^2}{8} - K_m + \frac{q\alpha^3}{2E_b h_b^3} \cdot K_{WB} \right),$$

откуда для наибольших напряжений в этих точках получаются выражения:

$$|\sigma|_A = \frac{q\alpha^2}{h_a^2} \cdot K_{ba}, \text{ где } K_{ba} = \frac{\beta h_a}{2\alpha} + 3 \left(\frac{1}{4} - 2K_m + \frac{q\alpha^3 \beta}{E_a h_a^3} K_{WA} \right)$$

$$|\sigma|_B = \frac{q\alpha^2}{h_b^2} \cdot K_{bb}, \text{ где } K_{bb} = \frac{h_a}{2\alpha} + 3 \left(\frac{\beta^2}{4} - 2K_m + \frac{q\alpha^3}{E_b h_b^3} K_{WB} \right)$$

Выражения (4), (5), (6) и (7) позволяют определить деформации и напряжения в характерных точках поперечного сечения прямоугольной вакуумной камеры. Положительными при этом получаются прогибы, направленные внутрь камеры, и напряжения, соответствующие растяжению внутренних волокон стенок камеры.

О ПРАКТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ КАМЕР

Выражения (4) – (7) дают точные значения искомых деформаций и напряжений. Однако практически расчет по ним является достаточно громоздким и требует значительных затрат времени в связи с

необходимостью точного определения α_a , $\cos \alpha_a$, $\operatorname{tg} \alpha_a$, $\operatorname{tg} \alpha_a \cos \alpha_a$, $\cos^2 \alpha_a$ и $\cos \alpha_a \sin \alpha_a$. В то же время напряженное состояние балки, нагруженной поперечной нагрузкой и осевой сжимающей силой, с достаточной точностью описывается приближенной зависимостью [7]:

$$N = \frac{\bar{N}}{1 - \frac{S}{P_{kp}}} \quad (8)$$

где N — усилие (перемещение) от совместного действия поперечной и осевой нагрузок;

\bar{N} — соответствующее усилие (перемещение) от действия только поперечной нагрузки;

S — сжимающая осевая сила;

P_{kp} — критическая сжимающая сила для данной балки.

Естественно, чем меньше величина S/P_{kp} , тем ближе значения N и \bar{N} . При небольших значениях S/P_{kp} оказывается возможным вести расчет без учета сжимающей силы (т.е. считать $N=\bar{N}$) и ошибка в результате такого расчета будет порядка S/P_{kp} .

Оценим эту величину для прямоугольной вакуумной камеры.

Наихудший случай с точки зрения устойчивости стенки, который может иметь место в рассматриваемой камере, соответствует шарнирному закреплению краев. В этом случае критическая сила равна [7] (при единичной ширине):

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 E I}{l^2} = \frac{\pi^2 E h^3}{12 l^2}$$

где l — длина балки

h — высота сечения балки (для камеры — толщина стенки)

E — модуль упругости материала.

Для большей стенки камеры это выражение принимает вид:

$$P_{kpa} = \frac{\pi^2 E_a h_a^3}{12 a^2}$$

Сжимающая сила для этой стенки:

$$S_a = \frac{q a \beta}{2}$$

и искомое соотношение

$$\frac{S_a}{P_{kpa}} = \left(\frac{S}{P_{kp}} \right)_a = \frac{6 q \beta}{\pi^2 E_a} \left(\frac{a}{h_a} \right)^3 \quad (9)$$

Величина a/h_a , входящая в полученное выражение, должна быть ограничена, во всяком случае, условием прочности при действии поперечной нагрузки q . Для балки единичной ширины с шарнирными опорами это условие имеет вид:

$$\sigma = \frac{6 M_{max}}{h^2} = \frac{6}{h^2} \cdot \frac{q l^2}{8} = \frac{3 q}{4} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \leq \frac{\sigma_t}{n}$$

где σ_t — предел текучести материала, кг/см²

n — требуемый запас прочности.

Записав полученные выражения для большей стенки камеры, получим наибольшее допустимое отношение длины стенки к ее толщине:

$$\left(\frac{a}{h_a} \right)_{max} = \sqrt{\frac{4 \sigma_t}{3 q n}}$$

Подставляя полученное соотношение в выражение (9), получим:

$$\left(\frac{S}{P_{kp}} \right)_a = \frac{6 q \beta}{\pi^2 E_a} \left(\frac{4 \sigma_t}{3 q n} \right)^{3/2} = 0,935 \frac{q \beta}{E_a} \left(\frac{\sigma_t}{q n} \right)^{3/2} \quad (10)$$

или, отметив, что $\sigma_t/n = \sigma$ — есть фактическое напряжение в стенке камеры,

$$\left(\frac{S}{P_{kp}} \right)_a = 0,935 \frac{q \beta}{E_a} \left(\frac{\sigma}{q} \right)^{3/2} \quad (10')$$

Для основных видов конструкционных материалов эта величина составит (при $q=1$ кг/см² и $\beta=\beta_{max}=1$):

сталь Х18Н9Т ($E=2,1 \cdot 10^6$ кг/см², $\sigma_t=2000$ кг/см²):

$$\left(\frac{S}{P_{kp}} \right)_a = \frac{0,935 \cdot 1 \cdot 1}{2,1 \cdot 10^6} \left(\frac{2000}{1 \cdot n} \right)^{3/2} = \frac{0,04}{n^{3/2}}$$

медь М1 ($E=1,12 \cdot 10^6$ кг/см², $\sigma_t=700$ кг/см²):

$$\left(\frac{S}{P_{kp}} \right)_a = \frac{0,935 \cdot 1 \cdot 1}{1,12 \cdot 10^6} \left(\frac{700}{1 \cdot n} \right)^{3/2} = \frac{0,0155}{n^{3/2}}$$

алюминиевый сплав Д16 ($E=0,7 \cdot 10^6 \text{ кг}/\text{см}^2$, $\sigma_T = 1000 \text{ кг}/\text{см}^2$):

$$\left(\frac{S}{P_{kp}}\right)_a = \frac{0,935 \cdot 1 \cdot 1}{0,7 \cdot 10^6} \left(\frac{1000}{1 \cdot n}\right)^{3/2} = \frac{0,0424}{n^{3/2}}$$

Таким образом, даже при запасе прочности $n=1$ погрешность при расчете большей стенки камеры без учета сжимающей силы не превышает 4-5%.

Несколько хуже обстоит дело с меньшей стенкой камеры. Для нее аналогичные вычисления дают соотношение:

$$\left(\frac{S}{P_{kp}}\right)_b = 0,935 \frac{q}{\beta E_b} \left(\frac{\sigma_T}{q n}\right)^{3/2} \quad (II)$$

или, через фактическое напряжение σ :

$$\left(\frac{S}{P_{kp}}\right)_b = 0,935 \frac{q}{\beta E_b} \left(\frac{\sigma}{q}\right)^{3/2} \quad (II')$$

т.е. погрешность растет с уменьшением β . Однако можно видеть, что соответствующим подбором величины " $\beta n^{3/2}$ " можно и здесь свести погрешность к приемлемым величинам. Так, при $\beta \geq 0,2$ и $n \geq 1,65$ погрешность не превышает ~10%.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

1. Можно вести приближенный расчет вакуумных прямоугольных камер без учета действия сжимающих стенок сил; при этом величина ошибки может быть оценена по выражениям (I0') и (II').

2. Для большей стенки камеры практически во всех случаях погрешность расчета без учета сжимающей силы не превышает величины 5%, для меньшей стенки - величины 10% при $\beta n^{3/2} \geq 0,424$ ($\beta n^{3/2} = 0,424$, в частности, при $\beta = 0,2$ и $n = 1,65$).

3. Для камер с $\beta < 0,2$ при необходимости иметь малые запасы прочности следует вести расчет по точным формулам (4) + (7).

РАСЧЕТ БЕЗ УЧЕТА СЖИМАЮЩИХ СИЛ

Для случая стенок камеры, нагруженных только поперечной нагрузкой, использованная ранее методика расчета дает следующие

результаты:

$$M_0 = q a^2 \cdot K_M, \text{ где } K_M = \frac{1}{12} \cdot \frac{1 + \beta^3 \epsilon \eta^3}{1 + \beta \epsilon \eta^3} \quad (I2)$$

$$W_A = \frac{q a^4}{E_a h_a^3} \cdot K_{WA}, \text{ где } K_{WA} = \frac{5}{32} - \frac{3}{2} K_M \quad \}$$

$$W_B = \frac{q a^4}{E_b h_b^3} \cdot K_{WB}, \text{ где } K_{WB} = \beta^2 \left(\frac{5}{32} \beta^2 - \frac{3}{2} K_M \right) \quad \}$$

$$\sigma_{0a} = \frac{q a^2}{h_a^2} \cdot K_{\sigma a}; \quad \sigma_{0b} = \frac{q a^2}{h_b^2} \cdot K_{\sigma b}, \quad \} \quad (I4)$$

$$\text{где } K_{\sigma 0} = 6 K_M \quad \}$$

$$\sigma_A = \frac{q a^2}{h_a^2} \cdot K_{\sigma A}, \text{ где } K_{\sigma A} = \frac{3}{4} - 6 K_M \quad \}$$

$$\sigma_B = \frac{q a^2}{h_b^2} \cdot K_{\sigma B}, \text{ где } K_{\sigma B} = \frac{3}{4} \beta^2 - 6 K_M \quad \}$$

При расчете по выражениям (I3) + (I5) положительными получаются деформации, направленные внутрь камеры, и напряжения, соответствующие растяжению внутреннего по отношению к камере волокна стенки.

Для большего удобства и сокращения времени при расчете для случая $\epsilon = 1$ ($E_a = E_b$) коэффициенты K_{WA} , K_{WB} , $K_{\sigma a}$, $K_{\sigma b}$ и $K_{\sigma 0}$ представлены на рис 4-8 в виде кривых в зависимости от параметров β и η .

После расчета по выражениям (I2) + (I5) деформаций и напряжений следует оценить величины погрешностей для обеих стенок по формулам (I0') и (II'). Если эти погрешности превышают допустимую величину, следует вести расчет по точным формулам (4) + (7) с определением входящих в эти формулы величин U_a , $\sin U_a$, $\cos U_a$, $\tan U_a$, $\cot U_a$ и $\cos \sin U_a$ с точностью до шести значащих цифр.

ПРИМЕР РАСЧЕТА КАМЕРЫ

Рассчитать прямоугольную вакуумную камеру, изображенную на рис.3 (р-ры в мм) с погрешностью не более 5% (материал - сталь Х18Н9Т; $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг}/\text{см}^2$; $\sigma_T = 2000 \text{ кг}/\text{см}^2$).

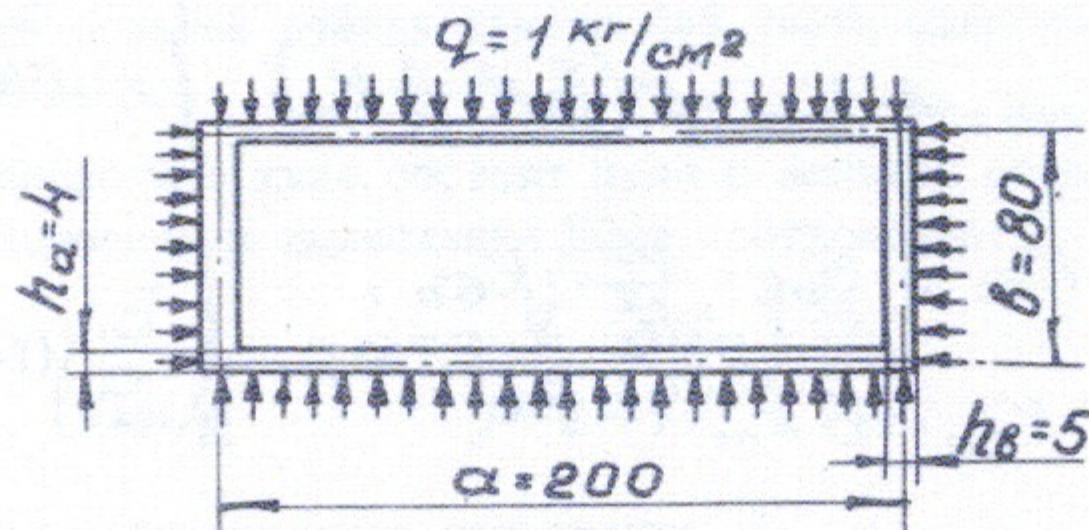


Рис.3

1. Определяются безразмерные параметры:

$$\beta = \frac{80}{200} = 0,4; \quad \gamma = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \xi = 1 \text{ (вся камера из одного материала).}$$

2. Рассчитываются величины в выражениях (I3) + (I5):

$$\frac{qa^4}{E_a h_a^3} = \frac{1,20^4}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,4^3} = 1,19; \quad \frac{qa^4}{E_b h_b^3} = \frac{1,20^4}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,5^3} = 0,609$$

$$\frac{qa^2}{h_a^2} = \frac{1,20^2}{0,4^2} = 2500; \quad \frac{qa^2}{h_b^2} = \frac{1,20^2}{0,5^2} = 1600$$

3. По графикам (рис.4 + 8) определяются коэффициенты в выражениях (I3) + (I5)

$$K_{wA} = 0,049I; \quad K_{wB} = -0,0128; \quad K_{\sigma_0} = 0,427$$

$$K_{\sigma_A} = 0,32I; \quad K_{\sigma_B} = -0,3.$$

4. Рассчитываются деформации и напряжения в заданных точках сечения камеры по выражениям (I3) + (I5):

a) прогиб в середине большей стороны:

$$W_A = 1,19 \cdot 0,049I = 0,0585 \text{ см} = 0,585 \text{ мм};$$

б) прогиб в середине меньшей стороны:

$$W_B = 0,609 \cdot (-0,0128) = -0,0078 \text{ см} = -0,078 \text{ мм};$$

в) напряжение изгиба в большей стенке в месте соединения стенок:

$$\sigma_{\alpha} = 2500 \cdot 0,427 = 1067,5 \text{ кг}/\text{см}^2 < \sigma_T$$

г) напряжение изгиба в меньшей стенке в месте соединения стенок:

$$\sigma_{\beta} = 1600 \cdot 0,427 = 683 \text{ кг}/\text{см}^2 < \sigma_T$$

д) напряжение изгиба в середине большей стенки:

$$\sigma_A = 2500 \cdot 0,32I = 802,5 \text{ кг}/\text{см}^2 < \sigma_T$$

е) напряжение изгиба в середине меньшей стенки:

$$\sigma_B = 1600 \cdot (-0,3) = -480 \text{ кг}/\text{см}^2 < \sigma_T$$

5. Оцениваются погрешности расчета по выражениям (I0') и (II'):

а) для большей стенки:

$$\Delta_{\alpha} = \left(\frac{S}{P_{kp}} \right)_{\alpha} = 0,935 \frac{I \cdot 0,4}{2,1 \cdot 10^6} \left(\frac{1067,5}{I} \right)^{3/2} \approx 0,62\% < 5\%$$

б) для меньшей стенки:

$$\Delta_{\beta} = \left(\frac{S}{P_{kp}} \right)_{\beta} = 0,935 \frac{I}{0,4 \cdot 2,1 \cdot 10^6} \left(\frac{683}{I} \right)^{3/2} = 2\% < 5\%$$

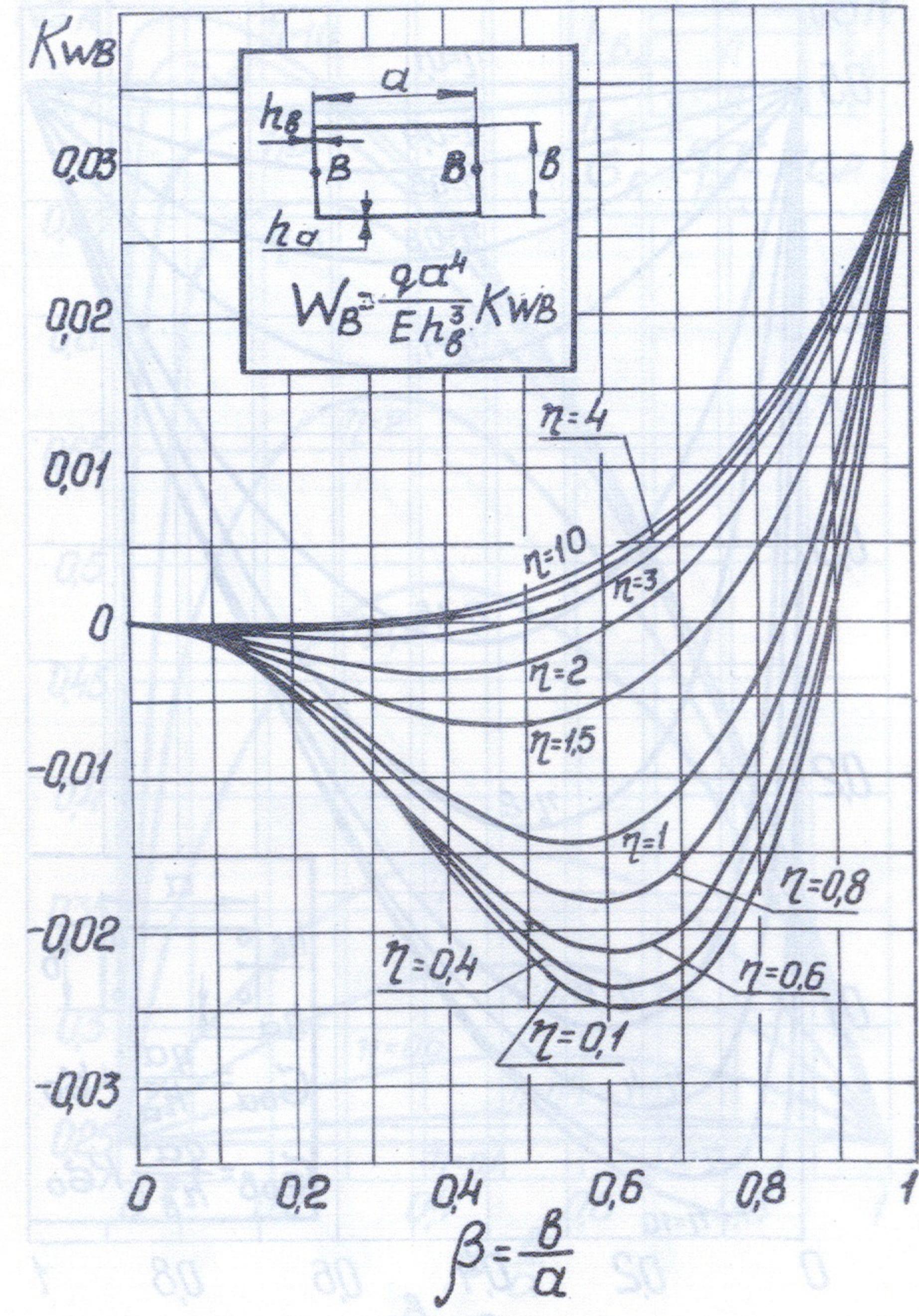
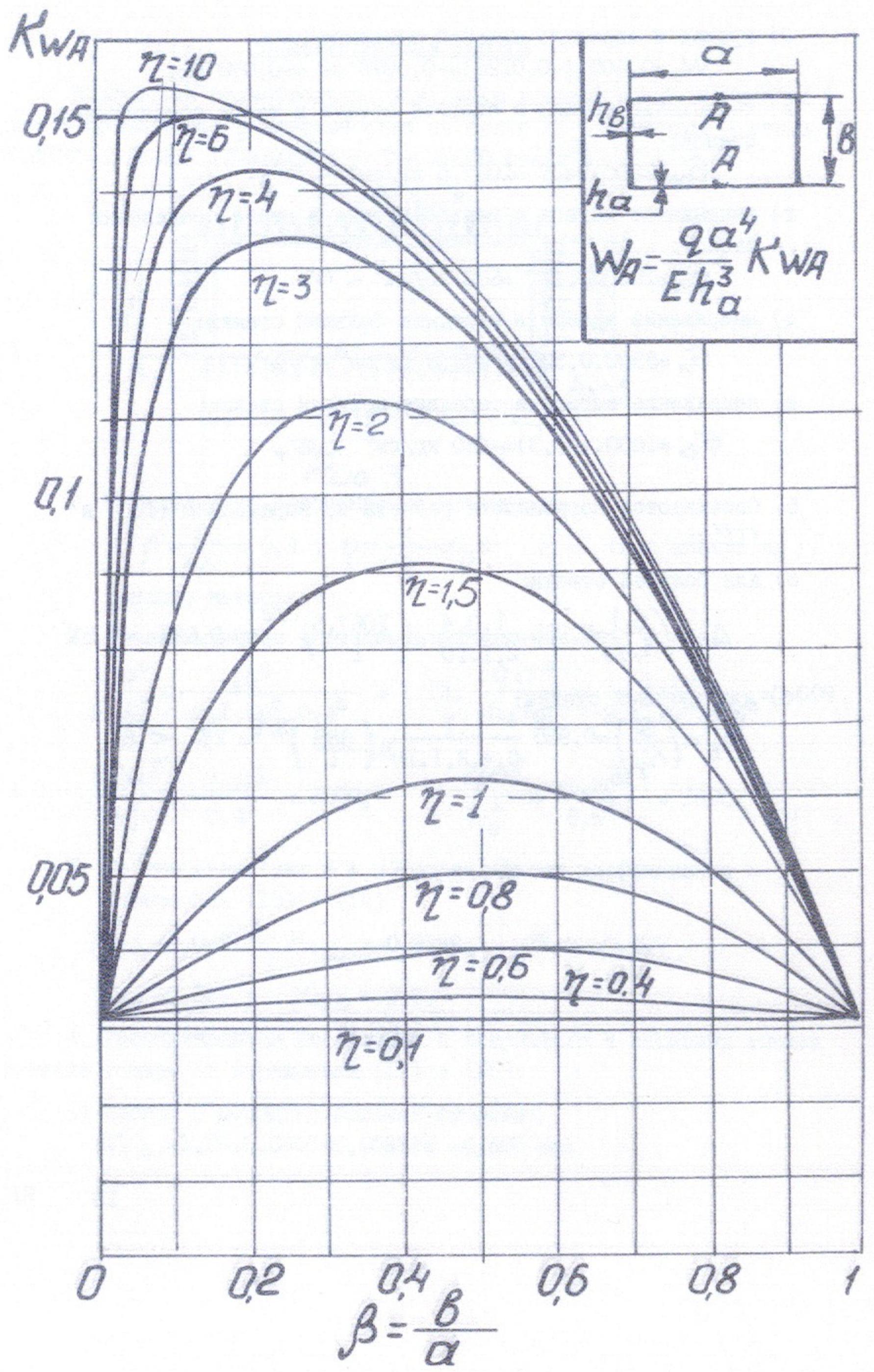
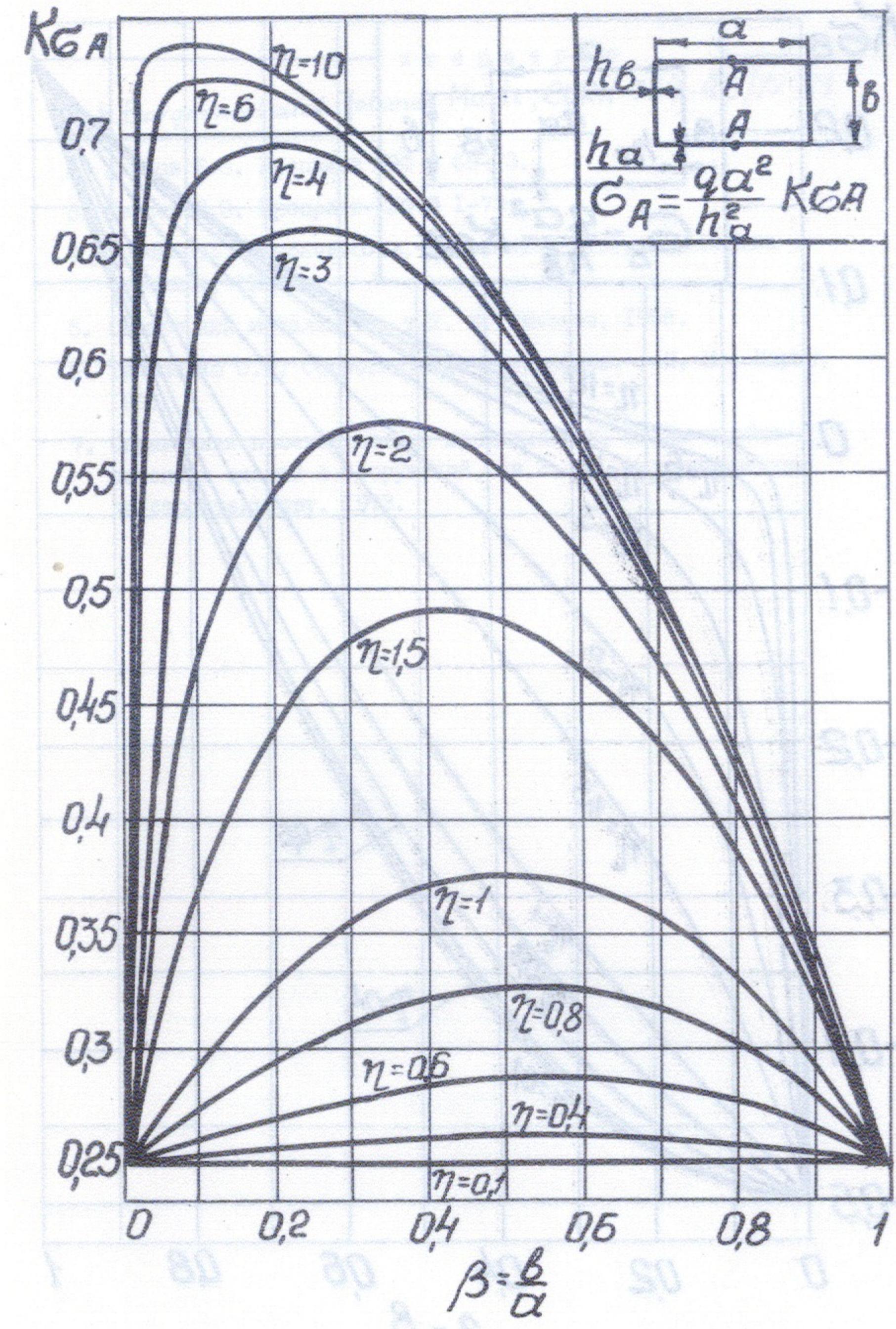
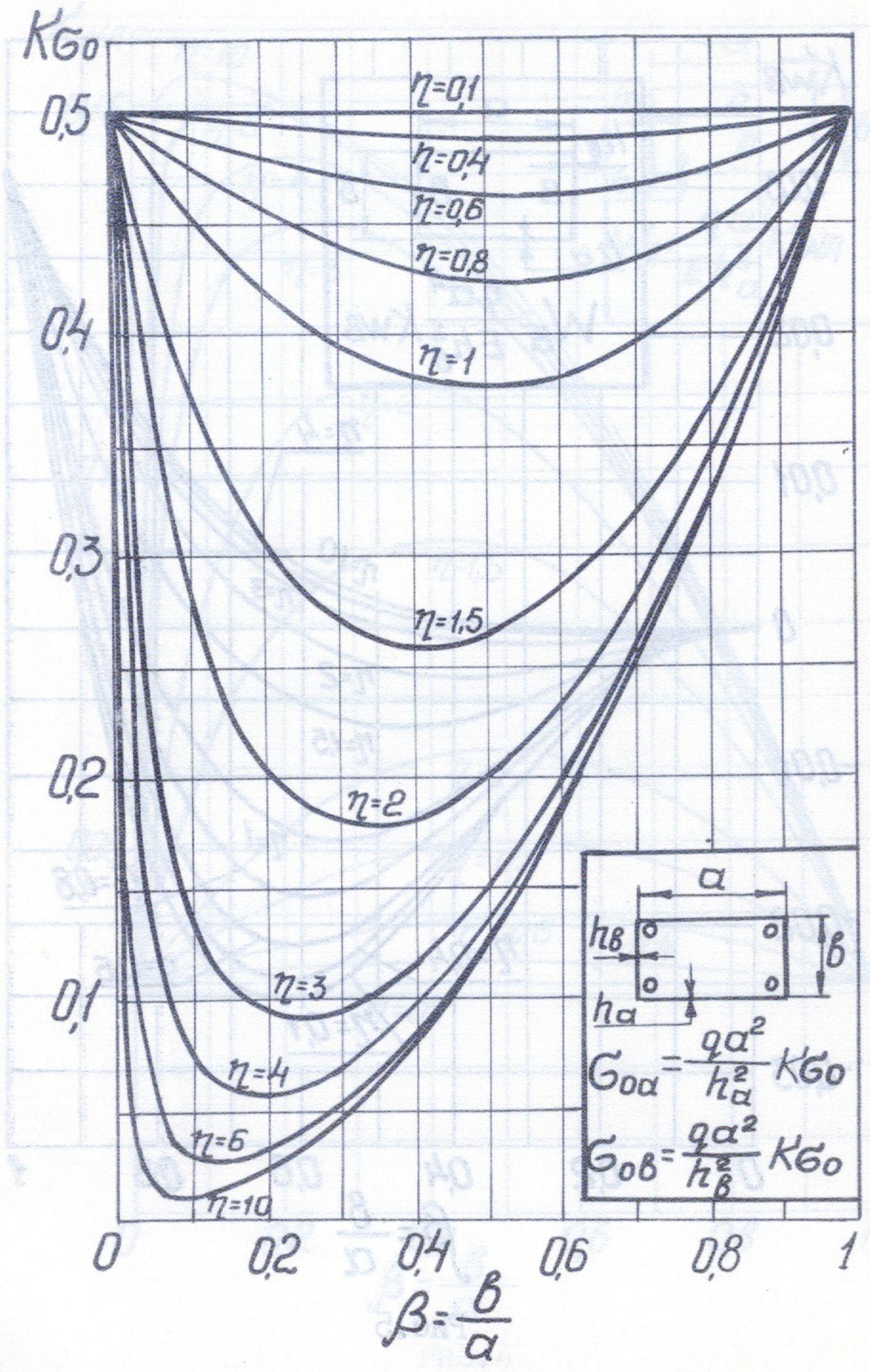
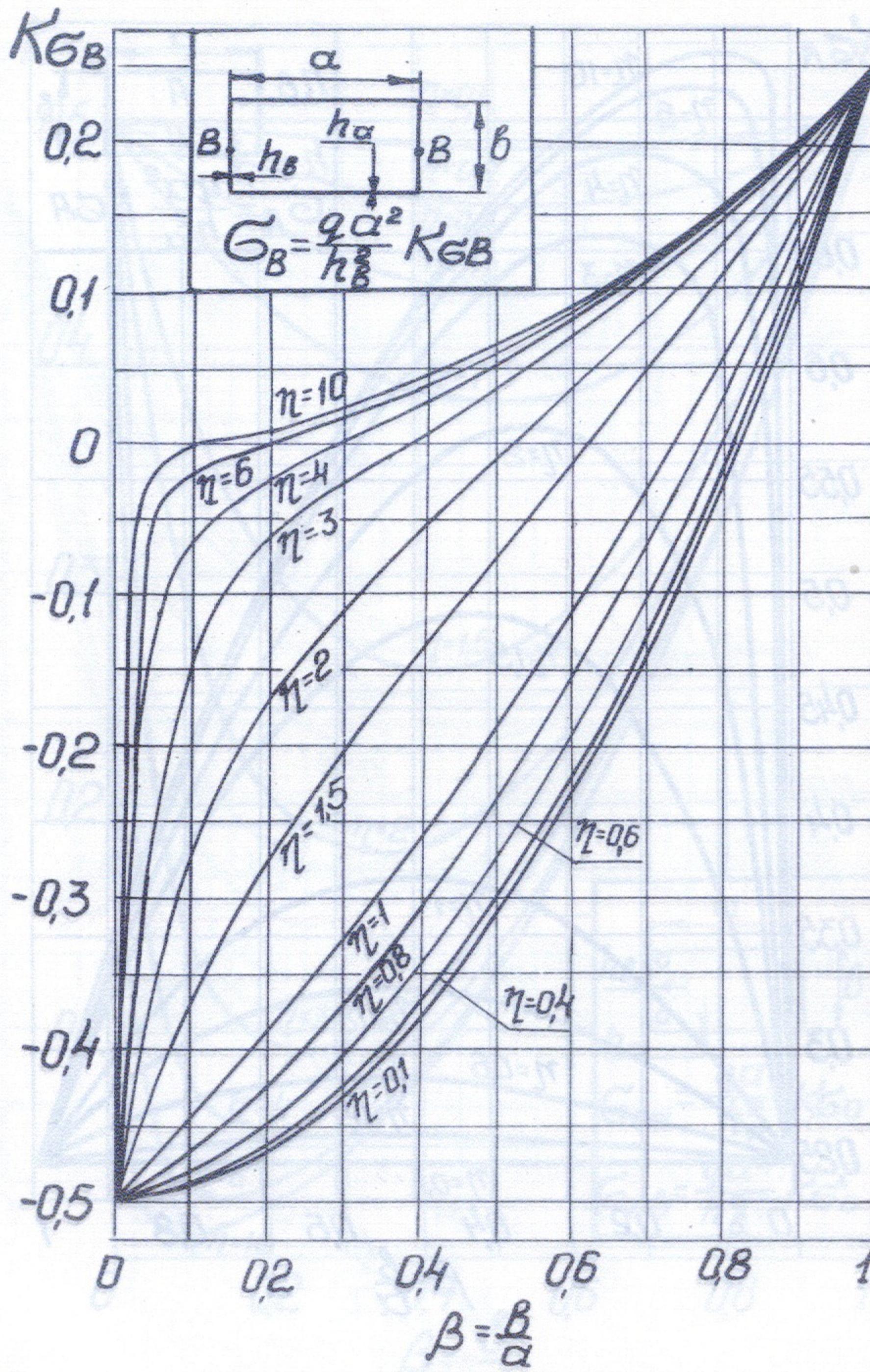


Рис.4

Рис.5





18

Рис.8

Л и т е р а т у р а

1. H.Bargmann and Jolande Marti, CERN-JSR-GE/72-29
2. Персов Б.З. Препринт ИЯФ № 69-73.
3. Персов Б.З. Препринт ИЯФ № I-73.
4. „Прочность, устойчивость, колебания”, т. I, М., Машиностроение, 1968.
5. Справочник металлурга, т.2, М., Машгиз, 1958.
6. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов, т.II, М., Наука, 1965.
7. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений, кн.2, М., Изд.литературы по строительству, 1973.

Работа поступила 24 августа 1976г.

Ответственный за выпуск С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 27.УШ-76г. № 02921

Усл. I, I печ.л., тираж 150 экз. Бесплатно

Заказ № 78.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР