

К. 23

16

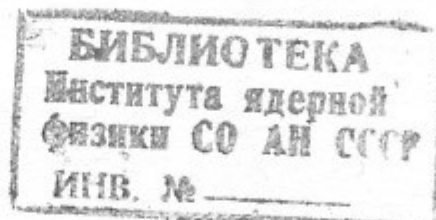
# И Н С Т И Т У Т ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 106

М.М.Карлинер

## КОГЕРЕНТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА В ЭЛЕКТРОННЫХ НАКОПИТЕЛЯХ ВСЛЕДСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СТРУКТУРОЙ

2. Неустойчивость когерентных продольных ( фазовых )  
колебаний



Новосибирск

1974



# КОГЕРЕНТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА В ЭЛЕКТРОННЫХ НАКОПИТЕЛЯХ ВСЛЕДСТВИЕ ЭЛЕКТРО- МАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СТРУКТУРОЙ

## 2. Неустойчивость когерентных продольных (фазовых) колебаний

### А Н Н О Т А Ц И Я

Эта работа является продолжением /23/. Она посвящена исследованию устойчивости когерентных продольных (фазовых) колебаний пучка в электронных накопителях. Исследование проводится на базе моделей пучка в виде макрочастиц и непрерывной среды /23/ при взаимодействии с резонансными и волновыми электромагнитными внешними системами. Получены условия устойчивости для различных мод когерентных продольных колебаний.



## С о д е р ж а н и е

стр.

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| Неустойчивость когерентных продольных (фазовых) колебаний.....         | 3  |
| § 2.1. Когерентные продольные колебания. Модель макрочастиц.....       | 4  |
| 2.1.1. Взаимодействие с резонансными системами.....                    | 4  |
| 2.1.2. Взаимодействие с ТЕМ линией .....                               | 17 |
| § 2.2. Когерентные продольные колебания. Модель непрерывной среды..... | 25 |
| 2.2.1. Взаимодействие с резонансными системами.....                    | 26 |
| 2.2.2. Взаимодействие с ТЕМ линией .....                               | 39 |
| Л и т е р а т у р а .....                                              | 47 |

В Н Ц А Т О Н Н А

Эта работа является продолжением работы [1]. Она посвящена исследованию неустойчивости когерентных продольных (фазовых) колебаний пучка в электродинамическом резонаторе. В работе рассматриваются взаимодействие пучка с резонансными системами и с ТЕМ линией. Получены аналитические выражения для коэффициентов усиления и затухания. Результаты расчетов приведены в виде графиков.



# СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $A_{mn}(J_z)$  - амплитуда  $n$ -й гармоники разложения функции  $e^{i\frac{mz}{R}}$  в ряд Фурье по  $\psi_z$ .
- $B_x, B_y, B_z$  - компоненты вектора индукции переменного магнитного поля.
- $E_x, E_y, E_z$  - компоненты вектора напряженности переменного электрического поля.
- $E_s$  - энергия частицы на равновесной орбите.
- $f(\psi, J, t)$  или  $f(X, P, t)$  - функция распределения.
- $F(\psi, J, s)$  или  $F(X, P, s)$  - Лаплас-изображение функции распределения (по времени).
- $\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z$  - гамильтонианы движения по соответствующим степеням свободы.
- $I_0$  - средний ток пучка.
- $J_x, J_y, J_z$  - канонические переменные действия.
- $\vec{j}$  - вектор плотности тока.
- $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$  - обозначение прямого и обратного преобразования Лапласа.
- $L$  - длина отрезка двухпроводной линии, взаимодействующей с пучком.
- $\ell$  - продольная координата в лабораторной системе.
- $m_s$  - масса равновесной частицы.
- $M$  - эквивалентная масса продольных колебаний.
- $N$  - число частиц в накопителе.
- $P_x, P_y, P_z$  - канонические импульсы по соответствующим степеням свободы.
- $P_0$  - продольный импульс равновесной частицы.
- $P_{z\delta}$  - быстрое изменение продольного импульса.
- $q$  - кратность частоты ускоряющего напряжения.
- $R$  - средний радиус равновесной орбиты.
- $R_0$  - шунтовое сопротивление ускоряющего резонатора.
- $R_{mn}^{\pm}, X_{mn}^{\pm}$  - активная и реактивная составляющие импеданса на частотах
- $U_0$  - энергия покоя частицы, выраженная в электрон-вольтах.
- $v$  - орбитальная скорость частицы в накопителе.
- $x, y, z$  - соответственно аксиальная (вертикальная), радиальная и продольная координаты в системе покоя равновесной частицы.
- $Z(s)$  - импеданс.
- $Z_0$  - волновое сопротивление двухпроводной линии передачи.
- $\alpha$  - коэффициент расширения орбит.
- $\gamma$  - постоянная распространения в двухпроводной линии
- $\gamma_s$  - отношение массы равновесной частицы к её массе покоя.



$\Gamma_1, \Gamma_2$  - коэффициенты отражения нагрузок двухпроводной линии.

$\varepsilon(\alpha)$  - единичная функция Хевисайда.

$\mu$  - магнитная проницаемость.

$\nu_x, \nu_y, \nu_z$  - относительные частоты поперечных и продольных колебаний.

$\sigma$  - инкремент (декремент).

$\psi_x, \psi_y, \psi_z$  - канонические угловые переменные.

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  - собственные угловые частоты колебаний.

$\omega_0$  - угловая частота обращения частицы на равновесной орбите.

$\bar{\phantom{x}}$  - обозначение комплексносопряженной величины.



## 2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ (ФАЗОВЫХ) КОЛЕБАНИЙ

Первой работой, посвященной фазовой неустойчивости в синхротроне была, по-видимому, статья И.Генри /1/. В дальнейшем С.С.Шахиджановым /2/, А.И.Барышевым и С.А.Хейфедем /3/ было выяснено, что когерентные фазовые колебания устойчивы, если ускоряющий резонатор настроен на частоту несколько ниже частоты ускоряющего в.ч. напряжения.

Более общие условия устойчивости и результаты экспериментального исследования когерентных фазовых колебаний были приведены в работах, выполненных в ИЯФ СО АН СССР (Новосибирск) в ходе сооружения накопителей установок встречных пучков ВЭП-1 и ВЭПП-2 /4,5/. Исследования условий продольной устойчивости сгруппированного пучка проводились также в ряде других работ /6-17/.

Механизм фазовой неустойчивости состоит в следующем. Совершающий когерентные фазовые колебания и движущийся по орбите сгусток представляет собой модулированный по фазе ток. Благодаря малой длительности импульсов этого тока по сравнению с периодом повторения этих импульсов ток пучка содержит большое количество гармоник. Фазовая модуляция приводит к появлению вблизи каждой из гармоник спектра составляющих боковых частот. В результате частотный спектр фазо-модулированного тока пучка очень богат комбинационными частотами. Взаимодействуя с окружающей структурой, сгусток наводит электромагнитное поле этих частот.

С другой стороны, каждая из частиц сгустка представляет собой осциллятор, способный раскачиваться под действием полей комбинационных частот. Таким образом, имеется возможность воздействия сгустка самого на себя через наведенные поля, что при определенных условиях приводит к нарастанию когерентных колебаний. Энергия для этого черпается из энергии орбитального движения частиц, а также из ускоряющего в.ч. поля.

Следует заметить, что богатство спектра комбинационных частот в случае фазовых колебаний практически не связано с их нелинейностью, а определяется спектром фазовой модуляции. Последний зависит от индекса модуляции, который может быть, особенно на высоких гармониках, много больше единицы.

В связи с чрезвычайно богатым спектром комбинационных частот борьба с фазовой неустойчивостью достаточно сложна, что подтверждается опытом запуска существующих накопителей /4,18-22/.

В данной работе исследуются когерентные фазовые колебания различных типов. На основе модели макрочастиц /23/ получены дифференциальные уравнения и условия устойчивости различных типов когерентных фазовых колебаний, учитывающие особенности окружающей пучок структуры. Преимущества модели макрочастиц проявляются здесь, во-первых, в простоте метода и прозрачности результатов, а во-вторых, в том, что для этой модели удается получить уравнения, описывающие развитие колебаний с начала их возникновения до больших амплитуд. На основе модели макрочастиц рассмотрено продольное взаимодействие пучка с резонансными системами и с ТЕМ линией.

Модель непрерывной среды /23/, описываемая линеаризованным уравнением Власова, к сожалению, не позволяет проследить развитие неустойчивости при больших амплитудах. С помощью модели непрерывной среды получены уточненные условия устойчивости, а также исследованы явления, не учитываемые моделью макрочастиц, такие как затухание Ландау и влияние вида функции плотности на ус-



область устойчивости. Этим методом исследовано взаимодействие пучка с резонансными системами, линейной ТЕМ.

## § 2.1. Когерентные продольные колебания. Модель макрочастиц

Уравнения продольных колебаний имеют вид (в переменных "действие-угол") при отсутствии поперечных полей /23/

$$\dot{\psi}_z = \Omega_z(J_z) - e \frac{\partial z}{\partial J_z} \cdot E_{z0} \quad (2.1.1)$$

$$\dot{J}_z = e \frac{\partial z}{\partial \psi_z} \cdot E_{z0}$$

В этих уравнениях  $E_{z0}$  — продольная составляющая электрического поля на равновесной орбите. Поэтому  $E_{z0}$  может зависеть только от  $z$ , а уравнения (2.1.1) являются каноническими с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(J_z) - e \int E_{z0} dz, \quad (2.1.2)$$

где  $\mathcal{H}_0(J_z)$  — невозмущенный гамильтониан.

Так как возмущающий член в (2.1.2) является периодической функцией от  $\psi_z$ , то он может быть разложен в ряд Фурье по  $\psi_z$ . В дальнейшем для решения уравнений (2.1.1) используется метод усреднения /24/, для чего правые части уравнений (2.1.1) усредняются по времени,

Пучок частиц в накопителе представляется при этом в виде одной или нескольких макрочастиц, содержащих весь заряд пучка и колеблющихся как единое целое (каждая). В таком достаточно грубом приближении для упрощения целесообразно считать макрочастицы точечными. Ниже мы рассмотрим устойчивость продольных колебаний при взаимодействии точечных макрочастиц с электромагнитными системами различного типа.

### 2.1.1. Взаимодействие с резонансными системами

Начнем изучение устойчивости с взаимодействия одной макрочастицы с резонансной системой, поле которой в линейном приближении не зависит от поперечных координат. В этом случае, как следует из (1.3.43) и (1.3.50) /23/, электрическое поле равно

$$E_{z0} = - \sum_{k,m} e^{i \frac{mz}{R}} \cdot E_{kz,m} \cdot Z_k(s - i m \omega_0) \cdot I_{km}(s), \quad (2.1.3)$$

причем

$$I_{km}(s) = eN \cdot \mathcal{L} \left[ v \cdot E_{kz,-m} \cdot e^{-i \frac{mz_0}{R}} \right], \quad (2.1.4)$$

$$E_{kz,m} = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} E_{kz} \cdot e^{-i \frac{m\ell}{R}} d\ell, \quad (2.1.5)$$

$v$  — скорость движения частиц по орбите ( $v \approx c$ ). Напомним, что  $z_0$  — продольная координата макрочастицы в системе покоя равновесной частицы и, следовательно, функция времени, определяемая законом движения, а  $z$  — координата точки, в которой задано электрическое поле формулой (2.1.3).



Так как  $z$  и  $z_0$  - периодические функции  $\psi_z$  и  $\psi_{z_0}$ , то

$$e^{i \frac{mz}{R}} = \sum_n A_{mn}(J_z) \cdot e^{in\psi_z}, \quad (2.1.6)$$

$$e^{i \frac{mz_0}{R}} = \sum_q A_{mq}^*(J_{z_0}) \cdot e^{-iq\psi_{z_0}} \quad (2.1.7)$$

где

$$A_{mn}(J_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\frac{mz}{R} - n\psi_z)} d\psi_z, \quad (2.1.8)$$

а  $*$  - обозначение комплексно сопряженной величины. В нулевом приближении (т.е. при отсутствии возмущения)  $\Omega_z$  - постоянная величина, так как амплитуда постоянна. В этом приближении уравнение (2.1.1) дает

$$\psi_{z_0} = \Omega_z \cdot t. \quad (2.1.9)$$

Используя нулевое приближение с помощью гамильтониана (2.1.2) можно получить первое приближение методом усреднения.

Вычислим возмущающий член в (2.1.2). Для этого подставим (2.1.9) в (2.1.7) и затем в (2.1.4). Выполняя в (2.1.4) преобразование Лапласа (при  $J_{z_0} = \text{const}$ ), получим:

$$I_{km}(s) = e^c N \cdot E_{kz, -m} \cdot \sum_q \frac{A_{mq}^*}{s + iq\Omega_z}. \quad (2.1.10)$$

Подставляя затем (2.1.10) в (2.1.3) и интегрируя по  $z$ , получим Лаплас-изображение возмущающего члена гамильтониана

$$\tilde{\mathcal{H}}(\psi_z, J_z, s) = e^2 c N \sum_{k, m, q} \frac{R}{im} e^{i \frac{mz}{R}} \cdot E_{kz, m} \cdot E_{kz, -m} Z_k(s - im\omega_0) \cdot \frac{A_{mq}^*}{s + iq\Omega_z} = \quad (2.1.11)$$

$$= e^2 c N \sum_{k, m, q, n} \frac{R}{im} e^{in\psi_z} \cdot A_{mn} \cdot A_{mq}^* \cdot \frac{|E_{kz, m}|^2 \cdot Z_k(s - im\omega_0)}{s + iq\Omega_z}.$$

Так как  $E_{kz}$  - вещественная функция, то  $E_{kz, -m} = E_{kz, m}^*$ . Введем обозначение

$$\sum |E_{kz, m}|^2 \cdot Z_k(s) = \frac{1}{(2\pi R)^2} Z_m(s). \quad (2.1.12)$$

Величина  $Z_m(s)$  при таком определении имеет размерность сопротивления; ее смысл выяснится несколько позднее. Подвергая (2.1.11) обратному преобразованию Лапласа, получим:

$$\tilde{\mathcal{H}}(\psi_z, J_z, t) = \frac{e^2 c N}{(2\pi R)^2} \sum_{m, q, n} \frac{R}{im} e^{in\psi_z} \cdot A_{mn} \cdot A_{mq}^* \cdot \mathcal{L}^{-1} \frac{Z_m(s - im\omega_0)}{s + iq\Omega_z}. \quad (2.1.13)$$



Запишем вначале с помощью (2.1.13) второе из уравнений (2.1.1)

$$\dot{J}_z = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \psi_z} = -\frac{e^2 c N}{4\pi^2 R} \sum_{m,q,n} \frac{n}{m} e^{in\psi_z} A_{mn} A_{mq}^* \mathcal{L}^{-1} \frac{Z_m(s-i\omega_0)}{s+iq\Omega_z} \quad (2.1.14)$$

В этом уравнении  $\psi_z$  становится уже угловой переменной макрочастицы, для которой вновь воспользуемся нулевым приближением (2.1.9). Подставляя (2.1.9) в (2.1.14) и пользуясь теоремой смещения в плоскости  $S$  /25/, получим

$$\dot{J}_z = -\frac{e^2 c N}{4\pi^2 R} \sum_{m,q,n} \frac{n}{m} A_{mn} A_{mq}^* \mathcal{L}^{-1} \frac{Z_m(s-i\omega_0-in\Omega_z)}{s+i(q-n)\Omega_z} \quad (2.1.15)$$

Для усреднения правой части (2.1.15) по быстрому времени воспользуемся предельным соотношением /25/

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \lim_{s \rightarrow +0} s \cdot F(s), \quad (2.1.16)$$

где  $F(s)$  - Лаплас-изображение функции  $f(t)$ . Это соотношение справедливо при условии, что  $F(s)$  не имеет особенностей в правой полуплоскости комплексной переменной  $s$ . В нашем случае это условие выполнено, так как  $Z_m(s)$  имеет полюса только в левой полуплоскости (для любой пассивной системы), а нули знаменателей в (2.1.15) лежат на мнимой оси.

При усреднении (2.1.15) с помощью предельного соотношения (2.1.16) все члены с  $q \neq n$  исчезают, а оставшиеся дают

$$\dot{J}_z = -\frac{e^2 c N}{4\pi^2 R} \sum_{m,n} \frac{n}{m} A_{mn} A_{mn}^* Z_m(-i\omega_0-in\Omega_z). \quad (2.1.17)$$

Величина  $Z_m(i\omega_0)$  равна

$$Z_m(i\omega_0) = \sum_k (2\pi R)^2 |E_{kz,m}|^2 Z_k(i\omega_0) = Z(i\omega_0) \quad (2.1.18)$$

и имеет следующий смысл. Если мы захотим заменить реальную резонансную систему эквивалентной ей системой, приведенной к узкому зазору, то сопротивление каждой моды реальной системы  $Z_k(i\omega_0)$  для гармоники  $m\omega_0$  следует умножить на пролетный множитель, зависящий от времени пролета частицы реальной системы, и затем все сложить. Как легко показать, пролетные множители равны  $(2\pi R)^2 |E_{kz,m}|^2$ . Поэтому  $Z_m(i\omega_0) = Z(i\omega_0)$  - это сопротивление системы для  $m$ -й гармоники, приведенное к узкому зазору. Таким образом, при рассмотрении продольных колебаний резонансную систему можно приводить к узкому зазору, для которого  $E_{kz,m} = E_{kz,-m} = \frac{1}{2\pi R}$ , но в качестве сопротивления следует использовать  $Z(i\omega_0)$ , определенное соотношением (2.1.18).

Прежде чем исследовать уравнение (2.1.17), обсудим кратко возможность применения (2.1.9) в качестве нулевого приближения. В этом приближении мы считаем частоту постоянной. Если частота медленно изменяется, то появляется накапливающаяся ошибка в угловой переменной  $\psi_z$ . Но время корреляции в данном случае определяется временем затухания процессов в резонансной системе, взаимодействующей с пучком. Поэтому использование нулевого приближения допустимо.



мо, если за время, равное времени затухания в системе, частота  $\Omega_z$  изменится мало. Такое условие обычно хорошо выполняется.

В правой части уравнения (2.1.17) суммирование по  $m$  и  $n$  производится от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Преобразуем сумму так, чтобы суммирование производилось при изменении  $m$  и  $n$  в положительной области. При этом отметим, что члены с  $m=0$  или  $n=0$  обращаются в нуль. Поэтому из (2.1.17) получаем

$$\dot{J}_z = -\frac{e^2 c N}{4\pi^2 R} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n}{m} \left\{ |A_{mn}|^2 \cdot Z(-im\omega_0 - in\Omega_z) + |A_{m,-n}|^2 \cdot Z(im\omega_0 + in\Omega_z) - \right. \\ \left. - |A_{-m,n}|^2 \cdot Z(im\omega_0 - in\Omega_z) - |A_{m,-n}|^2 \cdot Z(-im\omega_0 + in\Omega_z) \right\}. \quad (2.1.19)$$

Так как  $A_{-m,n}^* = A_{mn}^*$ , то  $|A_{-m,n}|^2 = |A_{mn}|^2$ ;  $|A_{-m,-n}|^2 = |A_{m,n}|^2$ . Кроме того, для консервативной колебательной системы (которой является макрочастица) благодаря обратимости всегда можно выбрать начало отсчета  $\psi_z$  так, чтобы продольная координата  $z(\psi_z, J_z)$  была четной функцией  $\psi_z$ . При этом частном выборе начала отсчета  $A_{m,-n} = A_{m,n}$ ,  $A_{-m,-n} = A_{-m,n}$ , поэтому, учитывая приведенные выше равенства, имеем

$$|A_{mn}|^2 = |A_{-m,-n}|^2 = |A_{-m,n}|^2 = |A_{m,-n}|^2. \quad (2.1.20)$$

С другой стороны, из определения  $A_{mn}$  как коэффициента в ряду Фурье следует, что  $|A_{mn}|^2$ ,  $|A_{-m,-n}|^2$ ,  $|A_{-m,n}|^2$ ,  $|A_{m,-n}|^2$  — инварианты относительно переноса начала отсчета  $\psi_z$ . Поэтому (2.1.20) справедливо при любом выборе начала отсчета  $\psi_z$ , и (2.1.19) можно переписать следующим образом

$$\dot{J}_z = -\frac{e^2 c N}{4\pi^2 R} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n}{m} |A_{mn}|^2 \left\{ [Z(im\omega_0 + in\Omega_z) + Z(-im\omega_0 - in\Omega_z)] - \right. \\ \left. - [Z(im\omega_0 - in\Omega_z) + Z(-im\omega_0 + in\Omega_z)] \right\}. \quad (2.1.21)$$

Так как  $Z(S)$  — вещественная функция  $S$ , то

$$Z(im\omega_0 + in\Omega_z) + Z(-im\omega_0 - in\Omega_z) = 2 \operatorname{Re} Z(im\omega_0 + in\Omega_z) = 2R_{mn}^+, \quad (2.1.22)$$

$$Z(-im\omega_0 + in\Omega_z) + Z(im\omega_0 - in\Omega_z) = 2 \operatorname{Re} Z(im\omega_0 - in\Omega_z) = 2R_{mn}^-,$$

где  $R_{mn}^+$  и  $R_{mn}^-$  — активная часть сопротивления системы на частотах соответственно  $m\omega_0 + n\Omega_z$  и  $m\omega_0 - n\Omega_z$ .

В этих обозначениях уравнение (2.1.21) приобретает вид

$$\dot{J}_z = -\frac{e^2 c N}{2\pi^2 R} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n}{m} |A_{mn}|^2 (R_{mn}^+ - R_{mn}^-), \quad (2.1.23)$$



или, учитывая, что  $\frac{ecN}{2\pi R} = I_0$  - средний ток пучка,

$$\dot{J}_z = -\frac{eI_0}{\pi} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n}{m} |A_{mn}|^2 (R_{mn}^+ - R_{mn}^-). \quad (2.1.24)$$

В этом уравнении  $|A_{mn}|^2$  - функции  $J_z$ . Вообще говоря  $R_{mn}^{\pm}$  также функции  $J_z$ , т.к. от этой переменной зависит частота  $\Omega_z$ . В частности, в квазилинейном приближении  $z = \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \sin \psi_z$  величины  $A_{mn}$  равны

$$A_{mn} = J_n\left(\frac{m}{R} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}}\right), \quad (2.1.25)$$

где  $J_n$  - функция Бесселя  $n$ -ого порядка. С ростом  $J_z$  функции  $|A_{mn}|^2$  изменяются немонотонно.

При малой величине  $J_z$  (т.е. при малой амплитуде) в (2.1.24) можно ограничиться линейным по  $J_z$  членом. Линейный по  $J_z$  член содержат лишь слагаемые с  $n=1$ :

$$\left\{J_1\left(\frac{m}{R} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}}\right)\right\}^2 \approx \frac{m^2}{2R^2} \cdot \frac{J_z}{M\Omega_z}. \quad (2.1.26)$$

Подставляя (2.1.26) в уравнение (2.1.24) и отбрасывая члены с  $n > 1$ , получим линейризованное по  $J_z$  уравнение для малых амплитуд

$$\dot{J}_z = -\frac{eI_0 \cdot J_z}{2\pi M\Omega_z R^2} \sum_{m=1}^{m_0} m \cdot (R_{m1}^+ - R_{m1}^-), \quad (2.1.27)$$

где  $m_0$  определяется неравенством

$$\frac{m_0}{R} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \ll 1 \quad \text{или} \quad m_0 \varphi_0 \ll 1,$$

причем  $\varphi_0$  - амплитуда продольных колебаний в угловой мере  $\varphi_0 = \frac{z_0}{R} = \frac{\Omega_z}{9 \cdot V}$ . Для энергии, выше критической  $M < 0$ . Кроме того,  $\frac{e}{2\pi R^2 |M|} = \frac{\Omega_z}{9 \cdot V}$  где  $9$  - кратность радиочастоты,  $V$  - амплитуда напряжения радиочастоты. Учитывая все это, получим

$$\dot{J}_z = J_z \cdot \frac{I_0 \Omega_z}{9 \cdot V} \sum_{m=1}^{m_0} m \cdot (R_{m1}^+ - R_{m1}^-). \quad (2.1.28)$$

Из (2.1.28) следует, что в линейном по  $J_z$  приближении при малых амплитудах инкремент колебаний равен

$$\sigma = \frac{I_0 \Omega_z}{29V} \cdot \sum_{m=1}^{m_0} m \cdot (R_{m1}^+ - R_{m1}^-). \quad (2.1.29)$$



В таком виде это выражение и вытекающий из него критерий устойчивости были получены в [4,5]. Как видно из (2.1.29), инкремент пропорционален току пучка. Если сумма в (2.1.29) отрицательна, то инкремент переходит в декремент, т.е. имеет место затухание когерентных колебаний, со скоростью, пропорциональной току.

В сумму в правой части (2.1.29) входит разность  $R_q^+ - R_q^-$ , определяемая ускоряющим резонатором. Эта разность отрицательна, если резонатор настроен таким образом, что его резонансная частота ниже радиочастоты  $q\omega_0$ . Если остальные сопротивления малы, то разность  $R_q^+ - R_q^-$  определяет знак суммы и, таким образом, устойчивость продольных колебаний. Подавление фазовой неустойчивости может осуществляться также с помощью специального пассивного резонатора, настраиваемого на одну из нижних боковых частот.

В общем случае уравнение (2.1.24) также может описывать нарастание или затухание колебаний. Если энергия частиц выше критической, то  $J_z < 0$ . Поэтому колебания нарастают, если  $J_z < 0$ , т.е. если сумма в правой части положительна (так же, как и в линейном приближении). Устойчивость определяется, таким образом, величинами  $R_{mn}^+$  и  $R_{mn}^-$ , разность которых берется с весом  $|A_{mn}|^2$ . Заметим, что величины  $|A_{mn}|^2$ , изменяясь немонотонно, имеют тенденцию к убыванию с ростом  $m$  и  $n$  при достаточно больших значениях этих величин. Кроме того, с ростом  $m$  при заданной величине ускоряющего зазора  $R_{mn}^\pm$  убывают из-за уменьшения прелетных коэффициентов. Все это обеспечивает сходимость ряда в правой части (2.1.24).

Заметим еще, что при большой начальной амплитуде колебаний вклад в уравнение дают также члены с  $n > 1$ .

Уравнение (2.1.24) можно решать численными методами в квазилинейном приближении, если ограничиться конечным числом членов ряда. При необходимости в уравнение (2.1.24) можно добавить член, формально учитывающий затухание невозмущенной системы.

Для вычисления поправки к частоте - когерентного сдвига - будем исходить из выражения (2.1.13) для возмущающего члена гамильтониана. После усреднения по времени получим

$$\Delta\Omega_z = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial J_z} = -\frac{i e I_0}{2\pi} \sum_{m,n} \frac{1}{m} \frac{\partial |A_{mn}|^2}{\partial J_z} Z(-im\omega_0 - in\Omega_z). \quad (2.1.30)$$

Преобразуя сумму так, чтобы суммирование по  $m$  и  $n$  производилось для положительных значений этих индексов, получим

$$\Delta\Omega_z = -\frac{e I_0}{\pi} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\partial |A_{mn}|^2}{\partial J_z} (X_{mn}^+ + X_{mn}^-), \quad (2.1.31)$$

где  $X_{mn}^\pm = \text{Im} Z(im\omega_0 \pm in\Omega_z).$  (2.1.32)

В линейном по  $J_z$  приближении при  $M < 0$

$$\Delta\Omega_z = \frac{I_0 \Omega_z}{V} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{q} (X_{m1}^+ + X_{m1}^-). \quad (2.1.33)$$



$$\dot{J}_z = J_z \frac{I_0 \Omega_z}{qV} \sum_{m=1}^{m_0} \frac{m^{2h-1}}{(h-1)!^2} \varphi_0^{h-1} \cdot (R_{m,h}^+ - R_{m,h}^-), \quad (2.1.38)$$

где  $\varphi_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2J_{z0}}{M\Omega_z}}$  - начальная амплитуда продольных колебаний, а  $m_0$  определяется неравенством  $m_0 \varphi_0 \ll 1$ .

Наличие малого множителя  $\varphi_0^{h-1}$  при  $h > 1$  приводит к существенному уменьшению инкремента мультипольных колебаний по сравнению с дипольными колебаниями при прочих равных условиях. Кроме того, при наличии радиационного затухания порог неустойчивости зависит от начальной амплитуды колебаний.

Рассмотрим еще один вид колебаний многих макрочастиц в накопителе с кратностью радиочастоты, равной  $q$  /12,13,18/. При указанных условиях на орбите могут находиться  $q$  сгустков, каждый из которых мы представим одной макрочастицей с числом частиц  $\frac{N}{q}$ .

Предположим, что амплитуды продольных колебаний макрочастиц одинаковы, а сдвиг фазы колебаний между соседними макрочастицами равен  $\frac{2\pi f}{q}$ , где  $f = 0, 1, 2, \dots, q-1$  (симметричные моды). Тогда ток  $\ell$ -го сгустка равен ( $\ell = 0, 1, 2, \dots, q-1$ ):

$$I_{km}^\ell = \frac{1}{q} e^{i \frac{2\pi m}{q} \ell} \cdot \frac{ecN}{2\pi R} \sum_{n'} A_{mn'}^* e^{-in'(\psi_z + \frac{2\pi f}{q} \ell)} \quad (2.1.39)$$

В этом выражении экспоненциальный множитель перед суммой отражает тот факт, что токи отдельных сгустков вследствие различия моментов времени пролета отдельных сгустков сдвинуты по фазе на угол  $\frac{2\pi m}{q}$  между соседними сгустками. Полный ток пучка получается суммированием (2.1.39) по  $\ell$ :

$$I_{km}(t) = \frac{ecN}{2\pi R} \sum_{n'} A_{mn'}^* e^{-in'\psi_z} \left\{ \frac{1}{q} \sum_{\ell=0}^{q-1} e^{i \frac{2\pi(m-n'f)}{q} \ell} \right\}. \quad (2.1.40)$$

Возмущающий член гамильтониана для  $r$ -й частицы равен

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{e^2 c N}{4\pi^2 R} \sum_{m,n,n'} e^{-i \frac{2\pi m}{q} r} \frac{A_{mn} A_{mn'}^*}{i m} e^{in(\psi_z + \frac{2\pi f}{q} r)} \mathcal{L}^{-1} \frac{Z(s - im\omega_0)}{s + in'\Omega_z} \cdot \frac{1}{q} \sum_{\ell=0}^{q-1} e^{i \frac{2\pi(m-n'f)}{q} \ell} \quad (2.1.41)$$

Здесь экспоненциальный множитель непосредственно после знака первой суммы появляется из-за того, что поле  $m$ -й азимутальной гармоникой действует на  $r$ -й сгусток со сдвигом по фазе  $-\frac{2\pi m}{q} r$ .

Уравнение колебаний с усредненной правой частью будет иметь вид

$$\dot{J}_z = -\frac{eI_0}{\pi} \sum_{m,n} e^{-i \frac{2\pi(m-nf)}{q}} \cdot \frac{n}{m} |A_{mn}|^2 \cdot Z(-im\omega_0 - in\Omega_z) \cdot \frac{1}{q} \sum_{\ell=0}^{q-1} e^{i \frac{2\pi(m-nf)}{q} \ell} \quad (2.1.42)$$

В сумме по  $m$  здесь отличны от нуля лишь те слагаемые, для которых  $m - nf = p q$ , где  $p$  - целое число, положительное, отрицательное или равное нулю. Суммирование по  $m$  заменяется теперь суммированием по  $p$ :



$$j_z = -\frac{eI_0}{\pi} \sum_{p,n} \frac{n}{pq+fn} |A_{pq+fn,n}|^2 \cdot Z[-i(pq+fn)\omega_0 - in\Omega_z]. \quad (2.1.43)$$

При суммировании здесь должны быть отброшены члены с  $pq+fn=0$ . Преобразуя сумму так, чтобы суммирование производилось только по неотрицательным значениям  $p$  и  $n$ , получим

$$j_z = -\frac{eI_0}{\pi} \sum_{\substack{p=0 \\ n=1}}^{\infty} n \cdot \left( \frac{|A_{pq+fn,n}|^2}{pq+fn} R_{pq+1,n}^+ - \frac{|A_{pq+q-fn,n}|^2}{pq+q-fn} R_{pq+q-fn,n}^- \right), \quad (2.1.44)$$

где

$$R_{pq+fn,n}^+ = \operatorname{Re} Z[i(pq+fn)\omega_0 + in\Omega_z],$$

$$R_{pq+q-fn,n}^- = \operatorname{Re} Z[i(pq+q-fn)\omega_0 - in\Omega_z].$$

Отметим, что если  $pq+q-fn < 0$ , то так как  $R$  — четная функция частоты, соответствующее  $R_{pq+q-fn,n}^-$  переходит в класс  $R^+$  с переменной знака (т.к. знаменатель  $pq+q-fn < 0$ ).

В линейном по  $j_z$  приближении, в котором выше было получено уравнение (2.1.28), уравнение (2.1.44) приобретает следующий вид

$$j_z = j_z \frac{I_0 \Omega_z}{V} \sum_{p=0}^{p_0} \left[ \left(p + \frac{f}{q}\right) R_{pq+f,1}^+ - \left(p + 1 - \frac{f}{q}\right) R_{pq+q-\frac{f}{q},1}^- \right], \quad (2.1.45)$$

откуда инкремент равен

$$\sigma_f = \frac{I_0 \Omega_z}{2V} \sum_{p=0}^{p_0} \left[ \left(p + \frac{f}{q}\right) R_{pq+f,1}^+ - \left(p + 1 - \frac{f}{q}\right) R_{pq+q-\frac{f}{q},1}^- \right]. \quad (2.1.46)$$

Уравнение (2.1.45) записывается для каждой симметричной моды, характеризуемой номером  $f (f=0, 1, \dots, q-1)$ . Соответствующая мода устойчива, если инкремент (2.1.46) отрицателен. Для устойчивости когерентных продольных колебаний пучка необходимо, чтобы все моды были устойчивы.

Отметим следующие особенности, отличающие поведение симметричной системы  $q$  макрочастиц от поведения одной макрочастицы.

1. Сопротивления ускоряющего резонатора  $R_q^+$  входят лишь в выражение инкремента одной из мод, для которой  $f=0$ . Поэтому настройкой резонатора невозможно подавить неустойчивость мод с  $f \neq 0$ .

2. Чтобы выяснить другую особенность многосгустковой системы, рассмотрим случай, когда на пути пучка имеется паразитный резонатор с собственной частотой, близкой к  $(pq+f)\omega_0$ , причем  $f \neq 0$ . Тогда отличны от нуля только два сопротивления  $R_{pq+f}^+$  и  $R_{pq+f}^-$ , которые входят в два различных выражения (2.1.46) — для  $f$ -й и  $(q-f)$ -й мод. Поэтому  $f$ -я мода будет неустойчивой. Для случая же одного сгустка (макрочастицы) указанные два сопротивления в виде разности входят в один и тот же инкремент и могут друг друга уравновешивать при соответствующей настройке резонатора.



Такая ситуация в многосгустковом случае затрудняет, в частности, подавление неустойчивости мод с  $f \neq 0$  с помощью пассивного резонатора, а также с помощью цепей обратной связи. Обеспечение фазовой устойчивости многосгустковой симметричной системы в накопителе, таким образом, гораздо сложнее, чем одного сгустка.

Положение изменяется, если систему сгустков сделать каким-либо способом асимметричной, например, сделать различными собственные частоты сгустков /18/. При определенной степени асимметрии сгустки колеблются независимо, что, соответственно, облегчает достижение устойчивости.

Заметим, что модель макрочастиц слишком груба для расчета степени асимметрии, необходимой для разделения колебаний сгустков.

X X  
X

Во всех рассмотренных выше случаях предполагалось, что продольная составляющая электрического поля системы не зависит от поперечных координат. Выясним теперь, что нового внесет учет этой зависимости.

Благодаря усреднению по быстрым поперечным колебаниям в уравнения продольного движения (2.1.1) могут входить только величины  $J_x$  и  $J_y$ , которые при исследовании продольных колебаний можно считать постоянными параметрами, влияющими лишь количественно, но не качественно на результат. Влияние аксиальной зависимости продольного поля только этим и ограничивается.

Иначе обстоит дело с радиальной зависимостью. Учет ее, правда, не влияет непосредственно на вид уравнений (2.1.1), так как в них входит продольное поле, взятое на равновесной орбите (т.е. при  $y_m = 0$ ). Но при вычислении гармоник тока (2.1.4) радиальная зависимость изменяет полученный результат, приводя к дополнительной амплитудной модуляции этих гармоник.

Для учета в дальнейшем радиальной зависимости продольного поля положим:

$$E_z = E_z(y, \ell, s). \quad (2.1.47)$$

В уравнение (2.1.1) входит величина

$$E_z(0, z, s) = - \sum_{k, m} e^{i \frac{m z}{R}} E_{kz, m}(0) \cdot Z_k(s - i m \omega_0) \cdot I_{km}(s), \quad (2.1.48)$$

причем

$$I_{km}(s) = e c N \cdot \mathcal{L} \left[ E_{kz, -m}(y_0) \cdot e^{i \frac{m z_0}{R}} \right], \quad (2.1.49)$$

$$E_{kz, m}(y) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} E_{kz}(y, \ell) \cdot e^{-i \frac{m \ell}{R}} d\ell.$$

При вычислении гармоник тока величина  $E_{kz, -m}(y_0)$  может быть разложена в ряд по степеням  $y_0$ , в котором мы сохраним лишь два члена,



полагая  $y_0$  малой величиной:

$$E_{kz,-m}(y_0) \approx E_{kz,-m}(0) + y_0 \cdot \left. \frac{\partial E_{kz,-m}}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (2.1.50)$$

В дальнейшем мы будем писать просто  $E_{kz,-m}$  и  $\frac{\partial E_{kz,-m}}{\partial y}$ , подразумевая, что эти величины взяты для  $y_0 = 0$ . Заменяя  $y_0$  его выражением через  $P_z$  и выражая  $P_z$  через  $\psi_z$  и  $J_z$ , в квазилинейном приближении (1.1.38), получим из (2.1.50) и (2.1.49)

$$I_{km}(s) = ecN \cdot \mathcal{L} \left\{ \left( E_{kz,-m} + \frac{\alpha R}{\rho_0} M \sqrt{\frac{2J_z \Omega_z}{M}} \cos \psi_{z0} \cdot \frac{\partial E_{kz,-m}}{\partial y} \right) e^{-i \frac{mz_0}{R}} \right\}. \quad (2.1.51)$$

Как и прежде будем предполагать, что энергия частиц выше критической, т.е.  $M = -\frac{ms}{\alpha} e^{i \frac{mz_0}{R}}$ . Подставляя в (2.1.51) это значение, а также пользуясь разложением в ряд Фурье (2.1.7), получим для  $I_{km}(s)$ :

$$I_{km}(s) = ecN \sum_q A_{mq}^* \mathcal{L} \left\{ E_{kz,-m} e^{-iq\psi_{z0}} - \frac{1}{2} \frac{\Omega_z}{\omega_0} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E_{kz,-m}}{\partial y} \cdot [e^{-i(q-1)\psi_{z0}} + e^{-i(q+1)\psi_{z0}}] \right\}. \quad (2.1.52)$$

Пользуясь нулевым приближением  $\psi_{z0} = \Omega_z t$  после выполнения преобразования Лапласа для  $I_{km}(s)$  имеем:

$$I_{km}(s) = ecN \sum_q A_{mq}^* \left\{ \frac{E_{kz,-m}}{s+iq\Omega_z} - \frac{1}{2} \frac{\Omega_z}{\omega_0} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E_{kz,-m}}{\partial y} \cdot \left[ \frac{1}{s+i(q-1)\Omega_z} + \frac{1}{s+i(q+1)\Omega_z} \right] \right\}. \quad (2.1.53)$$

Подставляя (2.1.53) в (2.1.48) и интегрируя последнее выражение по  $z$ , найдем возмущающий член гамильтониана

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(\psi_z, J_z, t) &= e^2 c N \sum_{k,m,q} \frac{R}{lm} A_{mq}^* e^{i \frac{mz}{R}} E_{kz,m} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ Z_k(s-i m \omega_0) \cdot \left[ \frac{E_{kz,m}}{s+iq\Omega_z} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\Omega_z}{\omega_0} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y} \cdot \left( \frac{1}{s+i(q-1)\Omega_z} + \frac{1}{s+i(q+1)\Omega_z} \right) \right] \right\} = e^2 c N \cdot R \cdot \sum_{k,m,q,n} \frac{e^{in\psi_z}}{lm} \cdot \\ &\quad \cdot A_{mn} A_{mq}^* \cdot E_{kz,m} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ Z_k(s-i m \omega_0) \cdot \left[ \frac{E_{kz,m}}{s+iq\Omega_z} - \frac{1}{2} \frac{\Omega_z}{\omega_0} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left[ \frac{1}{s+i(q-1)\Omega_z} - \frac{1}{s+i(q+1)\Omega_z} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.54)$$

Отсюда получаем уравнение движения, которое после усреднения правой части имеет вид



$$j_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_z} = -e^2 c N R \cdot \sum_{k,m,n} \frac{n}{m} A_{mn} E_{kz,m} Z_k(-im\omega_0 - in\Omega_z) [A_{mn}^* E_{kz,m} -$$

(2.1.55)

$$- \frac{1}{2} \frac{\Omega_z}{\omega_0} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y} (A_{m,n-1}^* + A_{m,n+1})].$$

Для упрощения дальнейшего анализа воспользуемся квазилинейным приближением для  $z$  (1.1.38). Тогда

$$A_{mn} = J_n \left( \frac{m}{R} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \right).$$

Воспользуемся известным соотношением для функций Бесселя [26/

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x). \quad (2.1.56)$$

Применяя это соотношение к  $A_{mn}$ , получим

$$A_{m,n+1} + A_{m,n-1} = \frac{2n}{\frac{m}{R} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}}} \cdot A_{mn}, \quad (2.1.57)$$

причем все  $A_{mn}$  вещественны (т.е.  $A_{mn}^* = A_{mn}$ ). В результате, с помощью (2.1.57), вместо (2.1.55) получаем

$$j_z = -e^2 c N R \sum_{k,m,n} \frac{n}{m} A_{mn}^2 Z_k(-im\omega_0 - in\Omega_z) (E_{kz,m} E_{kz,m} - \frac{n}{m} \frac{\Omega_z}{\omega_0} R \cdot E_{kz,m} \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y}) =$$

(2.1.58)

$$= -\frac{e I_0}{2\pi} \sum_{k,m,n} \frac{n}{m} A_{mn}^2 (2\pi R)^2 Z_k(-im\omega_0 - in\Omega_z) (|E_{kz,m}|^2 - \frac{n}{m} \nu_z R \cdot E_{kz,m} \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y}),$$

где  $\nu_z = \frac{\Omega_z}{\omega_0}$ .

Как и в предыдущих случаях, преобразуем сумму по  $m$  и  $n$  так, чтобы суммирование производилось лишь по положительным значениям этих индексов, имея в виду, что слагаемые с  $m=0$  или  $n=0$  равны нулю:

$$j_z = -\frac{e I_0}{2\pi} \sum_k \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n}{m} A_{mn}^2 (2\pi R)^2 \left\{ Z_k(-im\omega_0 - in\Omega_z) (|E_{kz,m}|^2 - \frac{n}{m} \nu_z R \cdot E_{kz,m} \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y}) + \right.$$

$$+ Z_k(im\omega_0 + in\Omega_z) (|E_{kz,m}|^2 - \frac{n}{m} \nu_z R \cdot E_{kz,m} \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y}) - Z_k(im\omega_0 - in\Omega_z) \cdot$$

$$\cdot (|E_{kz,m}|^2 + \frac{n}{m} \nu_z R \cdot E_{kz,m} \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y}) - Z_k(-im\omega_0 + in\Omega_z) (|E_{kz,m}|^2 +$$

$$+ \frac{n}{m} \nu_z R \cdot E_{kz,m} \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y}) \left. \right\}. \quad (2.1.59)$$



Заметим, что, т.к.  $E_{kz,-m} = E_{kz,m}^*$  и  $\frac{\partial E_{kz,-m}}{\partial y} = \left(\frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y}\right)^*$ , то

$$E_{kz,-m} \cdot \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y} = \left(E_{kz,m} \cdot \frac{\partial E_{kz,-m}}{\partial y}\right)^* \quad (2.1.60)$$

Кроме того, как указывалось выше,

$$Z_k(-im\omega_0 - in\Omega_z) = Z_k^*(im\omega_0 + in\Omega_z).$$

и

$$Z_k(-im\omega_0 + in\Omega_z) = Z_k^*(im\omega_0 - in\Omega_z).$$

Поэтому (2.1.59) можно привести к следующему виду

$$\begin{aligned} \dot{J}_z = & -\frac{eI_0}{\pi} \sum_k \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n}{m} A_{mn}^2 (2\pi R)^2 \left\{ |E_{kz,m}|^2 \cdot (R_{kmn}^+ - R_{kmn}^-) - \right. \\ & \left. - \frac{n}{m} \nu_z R \cdot \operatorname{Re} \left[ E_{kz,-m} \cdot \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y} \left( Z_k(im\omega_0 + in\Omega_z) + Z_k(im\omega_0 - in\Omega_z) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1.61)$$

Сравнивая (2.1.61) с (2.1.24) можно видеть, что зависимость продольного поля системы от радиальной координаты приводит к появлению в уравнении движения дополнительных членов, влияющих на устойчивость. Чтобы выяснить значение этих членов, сделаем упрощающее предположение о том, что произведения  $E_{kz,-m} \cdot \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y}$  вещественны. Это справедливо, например, для тех резонансных мод, у которых зависимость продольной составляющей электрического поля от радиальной координаты может быть факторизована, т.е. для которых

$$E_{kz} = Y(y) \cdot Z(\ell), \quad (2.1.62)$$

а также в некоторых других случаях.

Если произведения  $E_{kz,-m} \cdot \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y}$  вещественны, то уравнение (2.1.61) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{J}_z = & -\frac{eI_0}{\pi} \sum_k \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n}{m} (2\pi R)^2 \cdot A_{mn}^2 |E_{kz,m}|^2 \cdot \left\{ R_{kmn}^+ - R_{kmn}^- - \right. \\ & \left. - \frac{n}{m} \alpha_{km} \nu_z \frac{R}{a} (R_{kmn}^+ + R_{kmn}^-) \right\}, \end{aligned} \quad (2.1.63)$$

где

$$\alpha_{km} = \frac{E_{kz,-m} \cdot \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y} \cdot a}{|E_{kz,m}|^2} = \frac{a \cdot \frac{\partial}{\partial y} |E_{kz,m}|^2}{2 \cdot |E_{kz,m}|^2} \quad (2.1.64)$$



и  $Q$  — половина апертуры вакуумной камеры накопителя. Присутствие в правой части уравнения (2.1.63) дополнительного члена приводит к следующему важному его отличию от уравнения (2.1.24). В правую часть (2.1.24) входят только разности сопротивлений на комбинационных частотах. Чтобы правая часть (2.1.24) была отлична от нуля, частотная характеристика электромагнитной системы должна быть неравномерной. Пролет сгустка заряженных частиц в такой системе вызывает переходные процессы, длительность которых больше времени одного оборота. Когерентное взаимодействие в этом случае происходит благодаря "запоминанию" наведенных полей в системе. В случае широкополосной системы без "запоминания" правая часть уравнения (2.1.24) обращается в нуль. В противоположность этому, правая часть уравнения (2.1.63) не обращается в нуль и для системы без "запоминания" благодаря дополнительному члену, обязанному своим появлением зависимости  $E_{kz}$  от радиальной координаты. Знак этого члена зависит от знака производной. Если, например,  $\chi_{km} > 0$ , то уравнение (2.1.63) описывает затухающие колебания (при энергии частиц выше критической, т.е. при  $M < 0$ ). Этот результат в менее общей форме был получен во введении, где в условие устойчивости входит член  $\frac{\partial R_a}{\partial y}$ , представляющий собой производную сопротивления системы по радиальной координате.

Уравнение (2.1.63) можно переписать в несколько иной форме

$$\dot{j}_z = -\frac{eI_0}{\pi} \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{n}{m} (2\pi R)^2 (A_{mn})^2 |E_{kz,m}|^2 \left\{ R_{kmn}^+ \left( 1 - \frac{n}{m} \chi_{km} \gamma_z \cdot \frac{R}{a} \right) - \right. \\ \left. - R_{kmn}^- \left( 1 + \frac{n}{m} \chi_{km} \gamma_z \cdot \frac{R}{a} \right) \right\} \quad (2.1.65)$$

Здесь более наглядно представлено влияние дополнительных членов в случае системы с запоминанием. Дополнительные члены приводят к перекосу сопротивлений для верхних и нижних боковых частот и, в зависимости от знака  $\chi_{km}$ , способствуют устойчивости или, наоборот, неустойчивости продольных колебаний.

Произведение  $\gamma_z \frac{R}{a}$  имеет обычно величину порядка единицы, поэтому величина добавочных членов в круглых скобках (2.1.65) определяется величиной  $\chi_{km}$ . Последняя будет порядка единицы, если изменение продольной составляющей на размере апертуры сравнимо с величиной поля на равновесной орбите.

В общем случае произведение  $E_{kz,m} \cdot \frac{\partial E_{kz,m}}{\partial y}$  может быть комплексным; это приводит к тому, что в уравнение колебаний (2.1.61) входят не только активные сопротивления для комбинационных частот, но и реактивные сопротивления.

### 2.1.2. Взаимодействие с ТЕМ линией

При анализе устойчивости продольных колебаний пучка, взаимодействующего с ТЕМ линией, в общих формулах для вычисления полей (1.3.67) и (1.3.69) можно отбросить ряд членов, связанных с поперечным движением пучка. Скорость  $\vec{v}$  в (1.3.69) имеет в этом случае лишь одну — продольную — составляющую, благодаря чему имеем

$$I_{km}(s) = eN \cdot \mathcal{L} \left[ c E_{kz,m}(x_0, y_0) \cdot e^{-i \frac{mz_0}{R}} \right], \quad k=1,2. \quad (2.1.66)$$



$I_{3,m}(s) \equiv 0$ , т.к.  $\vec{E}_3 = \vec{e}(x, y)$  не имеет продольной составляющей. Взаимодействие пучка с линией, таким образом, в этом случае имеет место лишь на концах линии. Продольная составляющая электрического поля на равновесной орбите, которая входит в уравнения движения (2.1.1), может быть найдена с помощью формулы (1.3.67) [23], в которой исчезают некоторые члены:

$$E_{z0}(\psi_z, J_z, s) = - \sum_m e^{i \frac{mz}{R}} \sum_{j,k=1}^2 Z_{kj}(s - im\omega_0) \cdot E_{jz,m}(0,0) \cdot I_{km}(s). \quad (2.1.67)$$

Индекс  $m$  у  $Z_{kj}(s)$  опущен, так как при  $j, k = 1, 2$   $Z_{kj}(s)$  от  $m$  не зависит, как это видно из (1.3.61), (1.3.62). Отметим еще, что

$E_{1z,m}(x, y) = e_{1z,m}(x, y)$  и  $E_{2z,m}(x, y) = e_{2z,m}(x, y)$  — поля на концах линии. Зависимостью этих величин от  $x$  можно пренебречь, так как по  $x$  медленное движение отсутствует, а по быстрому должно быть произведено усреднение.

Вначале для упрощения примем зависимость концевых полей от продольной координаты в виде  $\delta$ -функции:

$$e_{1z} = E(y) \cdot \delta(\ell + \frac{L}{2}); \quad e_{2z} = -E(y) \cdot \delta(\ell - \frac{L}{2}), \quad (2.1.68)$$

где  $L$  — длина линии. Нормировку при этом удобно принять такой, что  $e_{1z}$  и  $e_{2z}$  — значения полей при единичном потенциале концов линии. Из (2.1.68) получаем

$$e_{1z,m} = \frac{E(y)}{2\pi R} e^{i \frac{mL}{2R}}; \quad e_{2z,m} = -\frac{E(y)}{2\pi R} \cdot e^{-i \frac{mL}{2R}}. \quad (2.1.69)$$

Подставляя (2.1.69) в (2.1.66) и затем в (2.1.67), получим

$$E_{z0}(\psi_z, J_z, s) = - \frac{ecN}{(2\pi R)^2} \sum_m E(0) \cdot e^{i \frac{mz}{R}} \cdot \mathcal{L} \left[ E(y_0) \cdot e^{-i \frac{mL}{2R}} \right] \cdot \left\{ Z_{11}(s - im\omega_0) + Z_{22}(s - im\omega_0) - 2Z_{12}(s - im\omega_0) \cdot \cos \frac{mL}{R} \right\} = \quad (2.1.70)$$

$$= - \frac{ecN}{(2\pi R)^2} \sum_m E(0) \cdot e^{i \frac{mz}{R}} \cdot \mathcal{L} \left[ E(y_0) \cdot e^{-i \frac{mL}{2R}} \right] \cdot Z_m(s - im\omega_0),$$

где

$$Z_m(s - im\omega_0) = Z_{11}(s - im\omega_0) + Z_{22}(s - im\omega_0) - 2Z_{12}(s - im\omega_0) \cdot \cos \frac{mL}{R}. \quad (2.1.71)$$

Функция  $E(y_0)$  в окрестности равновесной орбиты может быть приближенно представлена в виде

$$E(y_0) \approx E(0) + \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{y=0} y_0. \quad (2.1.72)$$



Действуя дальше так же, как при выводе (2.1.51) и (2.1.52), получаем  
(при  $M = -\frac{m_s}{\alpha} < 0$ )

$$E(y_0) = E(0) - \frac{\Omega_z}{\omega_0} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \cos \psi_{z0}, \quad (2.1.73)$$

где  $\frac{\partial E}{\partial y}$  берется при  $y = 0$ .

Подставляя (2.1.73) в (2.1.70) и разлагая  $e^{-i\frac{m_z}{R}} \psi_{z0}$  в ряд Фурье по  $\psi_{z0}$ , найдем электрическое поле в системе покоя:

$$E_z(\psi_z, J_z, s) = -\frac{ecN}{(2\pi R)^2} \sum_{m,q} E(0) \cdot A_{mq}^* e^{i\frac{m_z}{R}} \cdot Z_m(s - im\omega_0). \quad (2.1.74)$$

$$\cdot \mathcal{L} \left\{ E(0) \cdot e^{-iq\psi_{z0}} - \frac{1}{2} \frac{\Omega_z}{\omega_0} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} \left[ e^{-i(q-1)\psi_{z0}} + e^{-i(q+1)\psi_{z0}} \right] \right\}$$

или, пользуясь нулевым приближением  $\psi_{z0} = \Omega_z t$ ,

$$E_z(\psi_z, J_z, s) = -\frac{ecN}{(2\pi R)^2} \sum_{m,q} E(0) \cdot A_{mq}^* e^{i\frac{m_z}{R}} \cdot Z_m(s - im\omega_0). \quad (2.1.75)$$

$$\left\{ \frac{E(0)}{s + iq\Omega_z} - \frac{1}{2} \frac{\Omega_z}{\omega_0} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} \left[ \frac{1}{s + i(q-1)\Omega_z} + \frac{1}{s + i(q+1)\Omega_z} \right] \right\}.$$

Интегрируя (2.1.75) по  $z$ , найдем возмущающий член гамильтониана

$$\tilde{\mathcal{H}}(\psi_z, J_z, t) = \frac{e^2 c N}{(2\pi R)^2} \sum_{m,q} \frac{R}{im} e^{i\frac{m_z}{R}} \cdot A_{mq}^* \cdot E(0) \cdot \mathcal{L}^{-1} \{ Z_m(s - im\omega_0) \cdot$$

$$\cdot \left[ \frac{E(0)}{s + iq\Omega_z} - \frac{1}{2} \frac{\Omega_z}{\omega_0} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} \left( \frac{1}{s + i(q-1)\Omega_z} + \frac{1}{s + i(q+1)\Omega_z} \right) \right] \} = \quad (2.1.76)$$

$$= \frac{e^2 c N}{4\pi^2 R} \sum_{m,q,n} \frac{e^{in\psi_z}}{im} A_{mn} A_{mq}^* \cdot E(0) \cdot \mathcal{L}^{-1} \{ Z_m(s - im\omega_0) \cdot$$

$$\cdot \left[ \frac{E(0)}{s + iq\Omega_z} - \frac{1}{2} \frac{\Omega_z}{\omega_0} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} \left( \frac{1}{s + i(q-1)\Omega_z} + \frac{1}{s + i(q+1)\Omega_z} \right) \right] \}.$$

Полученное выражение аналогично (2.1.54) для резонансных систем. Повторяя дальше процедуру, примененную для случая резонансных систем в квазилинейном приближении, получим уравнение, аналогичное (2.1.58):

$$\dot{J}_z = -\frac{eI_0}{2\pi} \sum_{m,n} \frac{n}{m} \cdot A_{mn}^2 \cdot Z_m(-im\omega_0 - in\Omega_z) \cdot [E^2(0) - \frac{n}{m} \nu_z \cdot R \cdot E(0) \cdot \frac{\partial E}{\partial y}] \quad (2.1.77)$$



или, преобразуя сумму так, чтобы суммирование велось только по положительным значениям индексов  $m$  и  $n$ ,

$$\dot{j}_z = -\frac{eI_0}{\pi} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n}{m} A_{mn}^2 \left\{ E^2(0) \cdot (R_{mn}^+ - R_{mn}^-) - \right. \\ \left. - \frac{n}{2m} v_z \cdot R \cdot \frac{\partial(E^2)}{\partial y} (R_{mn}^+ + R_{mn}^-) \right\}, \quad (2.1.78)$$

где

$$R_{mn}^{\pm} = \operatorname{Re} Z_m(im\omega_0 \pm in\Omega_z). \quad (2.1.79)$$

Заметим, что ряд в правой части (2.1.78), вообще говоря, расходится. Причиной расходимости является аппроксимация концевых полей  $\delta$ -функцией. Так как сгусток в принятой модели является точечным, то такая аппроксимация концевых полей приводит к тому, что наведенный ток имеет вид повторяющихся импульсов бесконечно большой амплитуды бесконечно малой длительности. Такой ток рассеивает в конечном сопротивлении бесконечно большую мощность, что и приводит к расходимости. Для того, чтобы рядом (2.1.78) можно было пользоваться, его следует оборвать на некоторых конечных  $m$  и  $n$ , исходя из физических соображений. Это, однако, не всегда легко сделать, так как волновые системы, в отличие от резонансных, обычно широкополосны, так что  $R_{mn}^{\pm}$  отличны от нуля вплоть до весьма высоких гармоник. Устранить расходимость можно, предполагая конечную протяженность концевых участков, либо переходя от точечной макрочастицы к макрочастице конечных размеров. Первое реализуется более просто. Если предположить, что концевые участки симметричны относительно середины, то-есть

$$e_{1z} = E(y) \cdot f_1(l), \quad e_{2z} = -E(y) \cdot f_2(l), \quad f_1(l) = f_2(-l), \quad (2.1.80)$$

то

$$e_{1z,m} = E(y) \cdot \frac{a_m}{2\pi R}, \quad e_{2z,m} = -E(y) \cdot \frac{a_{-m}}{2\pi R}, \quad (2.1.81)$$

где

$$a_m = \int_{-\pi R}^{\pi R} f_1(l) \cdot e^{-i\frac{m}{R}l} dl. \quad (2.1.82)$$

Используя (2.1.81), можно получить уравнение движения (2.1.79) с той лишь разницей, что в отличие от (2.1.71)  $Z_m(s - im\omega_0)$  выражается формулой

$$Z_m(s - im\omega_0) = a_m \cdot a_{-m} [Z_{11}(s - im\omega_0) + Z_{22}(s - im\omega_0)] - \\ - (a_m^2 + a_{-m}^2) \cdot Z_{12}(s - im\omega_0). \quad (2.1.83)$$

При этом сходимость ряда в (2.1.79) обеспечивается убыванием коэффициентов  $a_m$ .



Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, из которых одним из наиболее важных является линия, согласованная с двух сторон. Для согласованной линии  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ . Поэтому

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{Z_0}{2}, \quad Z_{12}(s - im\omega_0) = \frac{Z_0}{2} \cdot e^{-\frac{s - im\omega_0 L}{v_\phi}}. \quad (2.1.84)$$

Заметим, что в случае продольных колебаний фазовая скорость волны в линии слегка зависит от частоты. Это связано с тем, что изменение частоты обращения сгустка происходит одновременно с изменением его радиального положения, а при этом меняется и длина линии, которую проходит сгусток. Поэтому фазовая скорость может быть представлена выражением

$$v_\phi \approx c \frac{m\omega}{m\omega_0}, \quad m\omega = m\omega_0 \pm n\Omega_z, \quad (2.1.85)$$

где  $\omega$  — мгновенная частота обращения,  $\omega_0$  — частота обращения равновесной частицы. С учетом этого получим

$$Z_m(im\omega_0 \pm in\Omega_z) = \frac{Z_0}{2} \left[ 2a_m \cdot a_{-m} - (a_m^2 + a_{-m}^2) e^{-i \frac{mL}{R}} \right]. \quad (2.1.86)$$

Так как  $a_m$  и  $a_{-m}$  — комплексно сопряженные величины, то

$$R_{mn}^\pm = \operatorname{Re} Z_m(im\omega_0 \pm in\Omega_z) = \frac{Z_0}{2} \left[ 2a_m \cdot a_{-m} - (a_m^2 + a_{-m}^2) \cos \frac{mL}{R} \right]. \quad (2.1.87)$$

Подставляя в уравнение (2.1.78), получаем уравнение движения:

$$\dot{J}_z = \frac{eI_0}{x} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2m^2} A_{mn}^2 \cdot Z_0 \cdot v_z \cdot R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \left[ 2a_m \cdot a_{-m} - (a_m^2 + a_{-m}^2) \cos \frac{mL}{R} \right]. \quad (2.1.88)$$

В линейном приближении по  $J_z$  (т.е. для малой начальной амплитуды), используя для  $A_{m1}^2$  приближенное соотношение (2.1.26), а также учитывая, что

$$\frac{e}{2\pi R^2 |M|} = \frac{\Omega_z^2}{q \cdot V}, \quad \text{получим вместо (2.1.88) следующее уравнение}$$

$$\dot{J}_z = -J_z \cdot \frac{2I_0 \Omega_z}{qV} \cdot Z_0 \cdot v_z \cdot R \cdot \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ 2a_m \cdot a_{-m} - (a_m^2 + a_{-m}^2) \cos \frac{mL}{R} \right]. \quad (2.1.89)$$

Сумма в правой части (2.1.89) может быть преобразована, исходя из следующих соображений. Так как

$$f_1(\ell) = \frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \cdot e^{i \frac{m\ell}{R}}, \quad (2.1.90)$$

то для коэффициентов  $a_m$  имеет место равенство Парсеваля [27/

$$\int_{-\pi R}^{\pi R} [f_1(\ell)]^2 d\ell = \frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 = \frac{1}{4\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2a_m \cdot a_{-m}. \quad (2.1.91)$$



Пользуясь равенством Парсеваля, можно доказать следующее тождество

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ 2a_m a_{-m} - (a_m^2 + a_{-m}^2) \cos \frac{mL}{R} \right] = \frac{\pi R}{2} \int_{-\pi R}^{\pi R} \left[ f_1(\ell + \frac{L}{2}) - f_2(\ell - \frac{L}{2}) \right]^2 d\ell + \frac{\pi R}{2} \int_{-\pi R}^{\pi R} \left[ f_1(\ell + \frac{L}{2}) - f_2(\ell + \frac{L}{2}) \right]^2 d\ell \quad (2.1.92)$$

Так как области концевых полей имеют весьма малую протяженность, то функции  $f_1(\ell)$  и  $f_2(\ell)$  отличны от нуля лишь в малой окрестности значений аргумента  $\ell = \mp \frac{L}{2}$ . Поэтому во втором интеграле функции  $f_1(\ell - \frac{L}{2})$  и  $f_2(\ell + \frac{L}{2})$  отличны от нуля в окрестности  $\ell = 0$  и, в силу симметрии, разность их близка к нулю. Поэтому второй интеграл близок к нулю. Функции  $f_1(\ell + \frac{L}{2})$  и  $f_2(\ell - \frac{L}{2})$  отличны от нуля в окрестностях точек  $\mp L$  соответственно. Поэтому первый интеграл будет равен

$$\int_{-\pi R}^{\pi R} \left[ f_1(\ell + \frac{L}{2}) - f_2(\ell - \frac{L}{2}) \right]^2 d\ell = 2 \int_{-\pi R}^{\pi R} [f_1(\ell)]^2 d\ell. \quad (2.1.93)$$

Это соотношение справедливо при условии, что длина линии не равна половине длины равновесной орбиты, так как в последнем случае вследствие периодичности точки  $\mp L$  совпадают и тогда интеграл (2.1.93) также равен нулю. Итак

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ 2a_m a_{-m} - (a_m^2 + a_{-m}^2) \cos \frac{mL}{R} \right] = \pi R \int_{-\pi R}^{\pi R} [f_1(\ell)]^2 d\ell = 2\pi^2 R^2 \langle [f_1(\ell)]^2 \rangle. \quad (2.1.94)$$

Подставляя в (2.1.89) и учитывая, что

$$\langle e_z^2 \rangle = 2E^2 \cdot \langle [f_1(\ell)]^2 \rangle,$$

получим уравнение движения в следующем виде

$$\dot{J}_z = -J_z \cdot \frac{I_0 \cdot \Omega_z \cdot (\pi R)^2}{2qV} \cdot Z_0 \cdot \nu_z \cdot R \cdot \frac{\partial}{\partial y} \langle e_z^2 \rangle, \quad (2.1.95)$$

причем значение производной берется для равновесной орбиты (т.е.  $y = 0$ ). Отсюда инкремент при малых амплитудах получается равным

$$\sigma = - \frac{I_0 \cdot Z_0 \cdot \Omega_z (\pi R)^2 \cdot \nu_z \cdot R}{4qV} \frac{\partial}{\partial y} \langle e_z^2 \rangle. \quad (2.1.96)$$

Похожий результат для линии, согласованной с двух сторон, был получен в работе Я.С.Дербенева и Н.С. Диканского [11].

Из последнего выражения следует, что при взаимодействии с согласованной линией устойчивость определяется знаком производной

$$\frac{\partial}{\partial y} \langle e_z^2 \rangle.$$



Неустойчивость имеет место при отрицательной производной, т.е. когда средний квадрат продольного поля убывает с увеличением радиуса орбиты. Этот результат имеет простой физический смысл. Колебания затухают, если с ростом энергии частицы (сопровождающимся увеличением радиуса орбиты) растут также потери энергии. В противном случае имеет место раскачка колебаний вследствие вносимого отрицательного трения. Необходимо заметить, что знак инкремента сохраняется и при энергии частицы ниже критической, так как, хотя изменяется знак массы  $M$  в (2.1.88), но этот знак изменяется и в (2.1.73).

Исходя из (2.1.96) можно получить простую формулу для оценки инкремента. Предположим, что в камере накопителя размещена одна длинная пластина, создающая радиально направленное электрическое поле (согласованная на концах). Так как на стенках камеры  $e_z = 0$ , то  $a \frac{\partial}{\partial y} \langle e_z^2 \rangle \approx \pm \langle e_z^2 \rangle$ , где  $a$  — полуапертура камеры. Если принять длину концевой пластины равной  $b$ , то  $e_{12} \approx \frac{1}{b}$  и средний квадрат равен

$$\langle e_z^2 \rangle = 2 \cdot \frac{b}{2\pi R} \cdot e_{12}^2 = \frac{1}{\pi R b}.$$

Полагая  $v_z \cdot \frac{R}{a} \approx 1$  и  $\Omega_z = \gamma_z \omega_0 \approx \frac{c \gamma_z}{R}$ , получим для инкремента оценочную формулу

$$\sigma = \pm \frac{\pi c \gamma_z}{4b} \cdot \frac{I_0 Z_0}{qV} = \pm \frac{I_0 \Omega_z}{4qV} \cdot \frac{\pi Z_0 R}{b}, \quad (2.1.97)$$

причем знак "+" относится к случаю пластины, размещенной ближе к внутренней стенке камеры.

Можно отметить, что инкремент не зависит от длины линии (при согласовании концов). Для этого, однако, длина линии должна быть значительно больше суммарной длины концевых участков.

До сих пор сгусток мы считали точечным. Если учесть его длину, то инкремент не зависит от длины линии, если длина линии много больше длины сгустка, а длину концевых участков в (2.1.97) следует заменить длиной сгустка.

Остановимся еще на одном частном случае, интересном с практической точки зрения. А именно, рассмотрим взаимодействие с линией, согласованной лишь с одной стороны, а с другой — нагруженной на произвольную нагрузку. Пусть, например,  $\Gamma_1 = 0$ . Для упрощения анализа воспользуемся соотношением (2.1.71) для сопротивления. Если  $\Gamma_1 = 0$ , то

$$Z_{11} = \frac{Z_0}{2} (1 + \Gamma_2 e^{-2\gamma L}), \quad Z_{22} = \frac{Z_0}{2} (1 + \Gamma_2), \quad Z_{12} = \frac{Z_0}{2} e^{-\gamma L} (1 + \Gamma_2). \quad (2.1.98)$$

Подставляя в (2.1.71), получим

$$Z_m(s) = Z_0 \left( 1 - e^{-\gamma L} \cos \frac{mL}{R} \right) + Z_0 \Gamma_2 e^{-\gamma L} \left( \cosh \gamma L - \cos \frac{mL}{R} \right). \quad (2.1.99)$$

Отсюда, подставляя вместо  $s$  частоту  $i m \omega_0 \pm i n \Omega_z$  и учитывая (2.1.85), получаем



$$\operatorname{Re}[Z_m(i\omega_0 \pm i n \Omega_z)] = Z_0 \left(1 - \cos^2 \frac{mL}{R}\right), \quad (2.1.100)$$

т.е. то же, что и для линии, согласованной с двух сторон (так как  $\Gamma_2$  в (2.1.100) исчезает). Этот интересный результат можно объяснить следующим образом. Пусть, например, сгусток, входя в линию, первым пролетает согласованный конец. Тогда часть энергии поглощается в согласованной нагрузке, а в линии возбуждается импульс, распространяющийся почти со скоростью движения сгустка. На другом конце линии сгусток наводит импульс противоположного знака. Поэтому суммарное напряжение на другом конце равно нулю и импульс отражается как от короткого замыкания, поглощаясь затем на согласованном конце. Так как напряжение на втором конце равно нулю, то сопротивление нагрузки на этом конце не играет роли. Аналогичное рассуждение может быть проведено при согласовании другого конца. Следует заметить, что полученный результат справедлив лишь при симметрии концевых участков линии.

Если коэффициенты отражения нагрузки линии близки по модулю к единице, то линия с нагрузками образует резонансную систему, взаимодействующую с пучком на концах линии. Пусть, например,  $\Gamma_1 = -1$  и  $\Gamma_2 = 1$ .

Тогда

$$Z_{11} = 0, \quad Z_{22} = 2Z_0 \cdot \operatorname{th} \gamma L, \quad Z_{12} = 0.$$

Подставляя в (2.1.71), получим

$$Z_m(i\omega) = Z_{22} = 2Z_0 \cdot \operatorname{th} \gamma L. \quad (2.1.101)$$

Для вычисления сопротивления нужно учесть малые потери в линии

$$\gamma = \frac{i\omega + \delta}{v_{\phi}}. \quad (2.1.102)$$

Подставляя в (2.1.101) и полагая

$$\omega = \omega_k + \Delta\omega_k; \quad \omega_k = (2k+1) \frac{\pi v_{\phi}}{2L},$$

получим

$$Z(i\omega_0 \pm i n \Omega_z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4Z_0 \cdot \pi(2k+1) \cdot Q_k}{1 + i Q_k X_k}, \quad (2.1.103)$$

где

$$Q_k = \frac{\omega_k}{2\delta}, \quad X_k = \frac{2\Delta\omega_k}{\omega_k} = \frac{2(m\omega_0 \pm n\Omega_z - \omega_k)}{\omega_k}$$

Иначе дело обстоит при  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ , т.е. при разомкнутых концах линии. В этом случае

$$Z_{11} = Z_0 \cdot \operatorname{cth} \gamma L, \quad Z_{22} = Z_0 \cdot \operatorname{cth} \gamma L, \quad Z_{12} = \frac{Z_0}{\operatorname{sh} \gamma L}.$$

Отсюда находим, что



$$Z_m(i\omega) = 2Z_0 \frac{\operatorname{ch} \gamma L - \cos \frac{mL}{R}}{\operatorname{sh} \gamma L}. \quad (2.1.104)$$

Это выражение при подстановке  $\omega = m\omega_0 \pm n\Omega_z$  обращается в нуль, аналогично второму слагаемому в (2.1.99) и по той же причине.

При реактивных нагрузках возможны различные промежуточные случаи, которые здесь не рассматриваются.

## § 2.2. Когерентные продольные колебания.

### Модель непрерывной среды

Модель макрочастиц представляет когерентные колебания в схематизированном, сильно упрощенном виде. Это проявляется в том, что сгусток частиц изображается одной макрочастицей, или несколькими, колеблющимися с одинаковой амплитудой и с определенным, заранее заданным, соотношением фаз. Рассмотрение в рамках данной модели многих макрочастиц, колеблющихся с различными амплитудами и с произвольными фазами, настолько усложняет задачу, что ее можно решать лишь численно с помощью быстродействующих вычислительных машин (при не очень большом числе макрочастиц).

Различие амплитуд частиц при нелинейности колебаний приводит к появлению разброса частот. Этот разброс можно ввести, предполагая сами колебания линейными. Тогда каждая частица имеет фиксированную частоту, но с помощью некоторой функции распределения вводится распределение частот. Предположение о линейности позволяет не учитывать случайные колебания частиц, которые не приводят к колебаниям центра тяжести сгустка. Такая линейная модель когерентных колебаний использовалась для исследования устойчивости продольных колебаний в ряде работ (например, [5,16]).

Впоследствии, однако, было выяснено, что такая линеаризация не всегда дает даже качественно правильный результат [15,28]. Под действием внешней силы происходит группировка частиц по фазе, причем, по-разному для линейных и для нелинейных колебаний. Из-за этого различия в нелинейной модели возможна неустойчивость при некоторых условиях, когда линейная модель с разбросом частот устойчива.

Нелинейная группировка описывается уравнением Власова. При этом существенным является учет изменения частоты свободных колебаний при изменении амплитуды, в то время как несинусоидальная форма колебаний при не больших искажениях играет малую роль.

В данном параграфе исследуется устойчивость продольных колебаний пучка в накопителе с помощью модели непрерывной среды при взаимодействии пучка с различного рода электромагнитными системами. Основное внимание здесь уделяется эффектам, появление которых связано с наличием нелинейного разброса частот и которые затруднительно исследовать в пределах модели макрочастиц.



Для исследования устойчивости продольных колебаний пучка ниже используется уравнение (1.2.12) [23]:

$$s \cdot F(\psi_z, J_z, s) - \tilde{f}(\psi_z, J_z, 0) + \Omega_z \frac{\partial F}{\partial \psi_z} + \mathcal{L}[j_z] \cdot \frac{dJ_0}{dJ_z} = 0, \quad (2.2.1)$$

где

$$F(\psi_z, J_z, s) = \mathcal{L}[\tilde{f}(\psi_z, J_z, t)] = \int_0^\infty \tilde{f}(\psi_z, J_z, t) e^{-st} dt, \quad (2.2.2)$$

а  $\tilde{f}(\psi_z, J_z, t)$  - возмущение функции распределения. Кроме того, мы имели

$$j_z = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \psi_z}, \quad (2.2.3)$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}} = -e \int E_{z0} \cdot dz, \quad (2.2.4)$$

а  $E_{z0}$  - продольная составляющая электрического поля на равновесной орбите, т.е. при  $y_m = 0$ . Для электрического поля на равновесной орбите из (1.3.43) и (1.3.44) [23] можно получить соотношение

$$E_{z0} = - \sum_{k,m} e^{i \frac{mz}{R}} \cdot E_{kz,m}(0) \cdot Z_k(s - im\omega_0) \cdot I_{km}(s), \quad (2.2.5)$$

причем

$$I_{km}(s) = e c N \int E_{kz,m}(y) \cdot F(\psi_z', J_z', s) \cdot e^{-i \frac{mz'}{R}} d\psi_z' \cdot dJ_z'. \quad (2.2.6)$$

Интегрируя (2.2.5) по  $z$ , найдем

$$\tilde{\mathcal{H}}_s = e \sum_{k,m} \frac{R}{im} e^{i \frac{mz}{R}} \cdot E_{kz,m}(0) \cdot Z_k(s - im\omega_0) \cdot I_{km}(s), \quad (2.2.7)$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}}_s = \mathcal{L}[\tilde{\mathcal{H}}] \cdot e^{i \frac{mz}{R}}$$

Разлагая затем в ряд Фурье по  $\psi_z$  согласно (2.1.6), выразим  $\tilde{\mathcal{H}}_s$  через переменные действие-угол:

$$\tilde{\mathcal{H}}_s = e \sum_{k,m,n} \frac{R}{im} e^{in\psi_z} \cdot A_{mn}(J_z) \cdot E_{kz,m}(0) \cdot Z_k(s - im\omega_0) \cdot I_{km}(s). \quad (2.2.8)$$

откуда

$$\mathcal{L}[j_z] = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \psi_z} = -e R \sum_{k,m,n} \frac{n}{m} e^{in\psi_z} \cdot A_{mn}(J_z) \cdot E_{kz,m}(0) \cdot Z_k(s - im\omega_0) \cdot I_{km}(s). \quad (2.2.9)$$

В ряд Фурье по  $\psi_z$  могут быть разложены также функции



$$F(\psi_z, J_z, s) \text{ и } \tilde{f}_0(\psi_z, J_z) = \tilde{f}(\psi_z, J_z, 0):$$

$$F(\psi_z, J_z, s) = \sum_n F_n(J_z, s) e^{in\psi_z}, \quad \tilde{f}_0(\psi_z, J_z) = \sum_n f_{0n}(J_z) e^{in\psi_z}. \quad (2.2.10)$$

Подставляя затем (2.2.9) и (2.2.10) в уравнение (2.2.1) и приравнявая коэффициенты при соответствующих гармониках по  $\psi_z$  нулю, получим систему уравнений

$$(s + in\Omega_z) \cdot F_n(J_z, s) - eR \frac{df_0}{dJ_z} \cdot \sum_{k,m} \frac{n}{m} E_{kz,m}(0) \cdot A_{mn} \cdot$$

(2.2.11)

$$\cdot Z_k(s - im\omega_0) \cdot I_{km}(s) = f_{0n}(J_z).$$

Теперь обратимся к выражению для  $I_{km}(s)$  (2.2.6), которое, используя разложение (2.2.10), можно представить следующим образом

$$I_{km}(s) = ecN \int E_{kz,-m}(y) \sum_q F_q(J'_z, s) e^{iq\psi'_z} \cdot e^{-i\frac{mz'}{R}} d\psi'_z dJ'_z. \quad (2.2.12)$$

Для упрощения анализа предположим, что продольная составляющая электрического поля на равновесной орбите не зависит от радиальной координаты, так что можно положить

$$E_{kz,-m}(y) = E_{kz,-m}(0) = E_{kz,-m}. \quad (2.2.13)$$

Наличие зависимости электрического поля от радиуса в модели непрерывной среды можно было бы учесть так же, как это было сделано выше, для модели макрочастиц. Для резонансных систем, однако, радиальная зависимость поля не играет существенной роли. Поэтому более полное рассмотрение будет приведено для взаимодействия с ТЕМ линией в следующем параграфе. Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{mz'}{R}} e^{iq\psi'_z} d\psi'_z = 2\pi A_{mq}^*(J'_z), \quad (2.2.14)$$

то (2.2.12) может быть записано в виде

$$I_{km}(s) = ecN \cdot E_{kz,-m} \sum_q 2\pi \int F_q(J'_z, s) \cdot A_{mq}^*(J'_z) dJ'_z. \quad (2.2.15)$$

Подставляя теперь (2.2.15) в (2.2.11), приведем систему уравнений (2.2.11) к системе интегральных уравнений относительно  $F_n(J_z)$ :

$$F_n(J_z, s) - \frac{eI_0 \cdot \frac{df_0}{dJ_z}}{s + in\Omega_z} \sum_{m,q} \frac{n}{m} A_{mn}(J_z) \cdot Z_m(s - im\omega_0) \cdot$$

(2.2.16)

$$\cdot \int F_q(J'_z, s) \cdot A_{mq}^*(J'_z) dJ'_z = \frac{f_{0n}(J_z)}{s + in\Omega_z},$$



где

$$Z_m(s-i\omega_0) = (2\pi R)^2 \sum_k |E_{kz,m}|^2 \cdot Z_k(s-i\omega_0), \quad (2.2.17)$$

$I_0$  - средний ток пучка и  $\Omega_z = \Omega_z(J_z)$ . Систему (2.2.16) можно переписать в виде

$$F_n(J_z, s) - eI_0 \sum_q \int K_{nq}(J_z, J'_z, s) \cdot F_q(J'_z, s) dJ'_z = \frac{f_{on}(J_z)}{s + in\Omega_z}, \quad (2.2.18)$$

причем ядра  $K_{nq}$  имеют вид

$$K_{nq} = \frac{\frac{df_0}{dJ_z}}{s + in\Omega_z} \cdot \sum_m \frac{n}{m} Z_m(s-i\omega_0) \cdot A_{mn}(J_z) \cdot A_{mq}^*(J'_z). \quad (2.2.19)$$

Ряд в правой части (2.2.19), как легко показать, для реальных систем сходится равномерно по  $J_z$  и  $J'_z$ . Область интегрирования в (2.2.18) по  $J'_z$  практически всегда ограничена. Поэтому ядра  $K_{nq}$ , представляющие собой ограниченные функции в правой полуплоскости переменной  $s$ , для которой они определены преобразованием Лапласа, квадратично интегрируемы в ограниченном квадрате изменения  $J_z$  и  $J'_z$ . Отсюда следует, что  $K_{nq}(J_z, J'_z, s)$  - ядра Фредгольма, а система (2.2.18) - система интегральных уравнений Фредгольма второго рода [29]. Заметим, что для справедливости утверждения о квадратичной интегрируемости ядер (2.2.19) функция  $f_0(J_z)$  должна быть кусочно-гладкой. В этом случае  $\frac{df_0}{dJ_z}$  следует рассматривать как обобщенную функцию [30], представляющую собой сумму одной или нескольких дельта-функций и кусочно-непрерывной функции.

Так как знаменатель в (2.2.19) имеет резонансный характер, то колебания в системе имеют частоты, близкие к  $n\Omega_z$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Вблизи частоты  $n\Omega_z$  наибольшую по модулю величину имеет гармоника возмущения  $F_n(J_z, s)$ , а остальные малы и лишь слегка искажают распределение. Поэтому в  $n$ -ом уравнении системы (2.2.18) можно опустить в сумме по  $q$  все слагаемые, кроме  $n$ -ого. Тогда система интегральных уравнений (2.2.18) превращается в систему уравнений, каждое из которых определяет соответствующую гармонику возмущения  $F_n(J_z, s)$ :

$$F_n(J_z, s) - \lambda \int K_{nn}(J_z, J'_z, s) \cdot F_n(J'_z, s) dJ'_z = \frac{f_{on}(J_z)}{s + in\Omega_z}, \quad (2.2.20)$$

причем

$$K_{nn}(J_z, J'_z, s) = \frac{\frac{df_0}{dJ_z}}{s + in\Omega_z} \sum_m \frac{n}{m} Z_m(s-i\omega_0) \cdot A_{mn}(J_z) \cdot A_{mn}^*(J'_z), \quad (2.2.21)$$

- квадратично интегрируемое ядро, а  $\lambda$  - параметр, который в конце концов должен быть заменен на  $eI_0$ .

Для определенности в дальнейшем будем предполагать, что  $n \geq 0$ , так как  $F_{-n}(J_z, s) = F_n^*(J_z, s)$ .

Как известно, решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода для правильных значений  $\lambda$  выражается через резольвенту [29]  $\Gamma(J_z, J'_z; \lambda, s)$ :

$$F_n(J_z, s) = \frac{f_{on}(J_z)}{s + in\Omega_z} + \lambda \int \Gamma(J_z, J'_z; \lambda, s) \cdot \frac{f_{on}(J'_z)}{s + in\Omega_z} dJ'_z. \quad (2.2.22)$$



Резольвента может быть представлена в виде частного двух целых функций  $\lambda$  :

$$\Gamma(J_z; J_z'; \lambda, s) = \frac{D_1(J_z, J_z'; \lambda, s)}{D(\lambda, s)}, \quad (2.2.23)$$

где  $D$  и  $D_1$  - целые функции переменной  $\lambda$ , а также целые функции  $s$  в правой полуплоскости этой переменной.

Соотношением (2.2.22) функция  $F_n(J_z, s)$  определена в правой полуплоскости переменной  $s$ . С помощью этого соотношения функцию  $F_n(J_z, s)$  можно аналитически продолжить на всю левую полуплоскость за исключением особых точек ядра  $K_{nn}$  и нулей знаменателя  $D(\lambda, s)$ . При этом интеграл в правой части (2.2.22) аналитически продолжается в левую полуплоскость по способу, предложенному Л.Д.Ландау /31/. Заметим, что особые точки ядра представляют собой полюса сопротивлений  $Z_m(s - i m \omega_b)$ ; кроме того, ядро имеет полюс в точке  $s = -i n \Omega_z$  на мнимой оси, соответствующий свободным колебаниям частиц. Для анализа устойчивости удобно ввести малое затухание свободных колебаний, которое в дальнейшем можно устремить к нулю. Для этого нужно заменить  $s$  на  $s + \sigma_n$ , где  $\sigma_n > 0$  - малый декремент затухания свободных колебаний. Тогда указанный полюс смещается с мнимой оси в левую полуплоскость. Функция  $F_n(J_z, s)$  имеет, таким образом, полюса, совпадающие с полюсами ядра; полюсами ее являются также нули функции  $D(\lambda, s)$ , называемой определителем Фредгольма /32/. Как показал Л.Д.Ландау /31/, каждому полюсу  $s_k$  соответствует при больших  $t$  слагаемое

$e^{s_k t}$ . Таким образом устойчивость когерентных колебаний определяется расположением полюсов функции  $F_n(J_z, s)$ . Но полюса, совпадающие с полюсами ядра, все лежат в левой полуплоскости. Они определяют затухание колебаний резонансных электромагнитных мод и затухание свободных колебаний частиц в пучке. Поэтому устойчивость когерентных колебаний определяется расположением нулей определителя Фредгольма  $D(\lambda, s)$  в плоскости комплексной переменной  $s$ . Определитель Фредгольма может быть разложен в ряд по степеням  $\lambda$ , сходящийся при любом  $\lambda$  /32/:

$$D(\lambda, s) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \cdot C_\nu(s), \quad (2.2.24)$$

где

$$C_\nu(s) = \int \text{Det} \{ K_{nn}(x_\alpha, x_\beta, s) \} dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_\nu \quad (2.2.25)$$

причем  $x_\alpha, x_\beta$  - переменные интегрирования, подставляемые в (2.2.21) вместо  $J_z, J_z'$  и  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, \nu$  - номера строк и столбцов определителя. Дисперсионное уравнение получается приравниванием (2.2.24) нулю.

Однако анализ получаемого при этом уравнения в общем виде затруднителен. Поэтому рассмотрим некоторые случаи, когда дисперсионное уравнение может быть существенно упрощено.

Во-первых, предположим, что амплитуда колебаний частиц в сгустке мала, так что их можно считать приближенно синусоидальными. В этом случае

$$A_{mn}(J_z) = J_n \left( \frac{m}{R} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \right).$$

Во-вторых, в (2.2.21) сумму по  $m$  оборвем снизу и сверху на членах  $cm = \pm m_0$  так, чтобы



$$\frac{m_0}{R} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \ll 1. \quad (2.2.26)$$

Это означает, что мы ограничиваемся рассмотрением взаимодействия пучка с электромагнитным полем лишь на таких гармониках, длина волны которых много больше длины сгустка. При условии (2.2.26) и  $n > 0$

$$A_{mn}(J_z) \cdot A_{mn}^*(J_z') \approx \frac{m^{2n}}{(n!)^2} \left( \frac{1}{2R^2\Omega_z} \sqrt{\frac{J_z}{M}} \cdot \sqrt{\frac{J_z'}{M}} \right)^n, \quad (2.2.27)$$

а ядро  $K_{nn}(J_z, J_z', s)$  приобретает вид

$$K_{nn}(J_z, J_z', s) = \frac{n \frac{df_0}{dJ_z} \left( \frac{1}{2R^2\Omega_z} \sqrt{\frac{J_z}{M}} \cdot \sqrt{\frac{J_z'}{M}} \right)^n}{(n!)^2 \cdot (s + in\Omega_z)} \cdot \sum_m m^{2n-1} \cdot Z_m(s - im\omega_0). \quad (2.2.28)$$

Легко показать, что при таком ядре коэффициенты  $C_\nu(s)$  в (2.2.24) обращаются в нуль для всех  $\nu$ , кроме  $\nu = 1$ . Поэтому дисперсионное уравнение приобретает вид

$$1 - eI_0 \cdot \frac{n}{(n!)^2} \cdot \sum_{m=-m_0}^{m_0} m^{2n-1} \cdot Z_m(s - im\omega_0) \cdot \int \left( \frac{J_z}{2R^2M\Omega_z} \right)^n \frac{\frac{df_0}{dJ_z}}{s + in\Omega_z} dJ_z = 0. \quad (2.2.29)$$

Это уравнение было получено в [15] несколько иным способом, но при таких же упрощающих предположениях.

Исследование устойчивости путем решения уравнения (2.2.29) возможно, по-видимому, лишь в простейших случаях. Можно, однако, получить условие устойчивости с помощью критерия Найквиста, не требующего решения дисперсионного уравнения. Обоснование применения критерия Найквиста к уравнениям подобного типа приведено в [33, 34].

Обозначим

$$K_n(s) = eI_0 \cdot G_n(s) \cdot \sum_{m=-m_0}^{m_0} m^{2n-1} \cdot Z_m(s - im\omega_0), \quad (2.2.30)$$

$$G_n(s) = \frac{n}{(n!)^2} \int \left( \frac{J_z}{2R^2M\Omega_z} \right)^n \cdot \frac{\frac{df_0}{dJ_z}}{s + in\Omega_z} dJ_z. \quad (2.2.31)$$

Функция  $K_n(s)$  определена для всех значений  $s$  в правой полуплоскости и при кусочно-непрерывной функции  $f_0(J_z)$  аналитична в правой полуплоскости. Прямая  $s = -i\Omega + \sigma$  ( $\sigma > 0$ ) при  $\sigma = \text{const}$  преобразуется в плоскости  $K_n(s)$  в замкнутый контур, называемый диаграммой Найквиста при  $\sigma \rightarrow +0$ . Согласно критерию Найквиста уравнение (2.2.29) не имеет нулей в правой полуплоскости; если диаграмма Найквиста не охватывает точку  $K_n = 1$ . В этом случае колебания, как указывалось выше, устойчивы.

Диаграмма Найквиста определяется функцией

$$K_n(-i\Omega) = eI_0 \cdot \sum_{m=-m_0}^{m_0} m^{2n-1} \cdot Z_m(-i\Omega - im\omega_0) \cdot \lim_{\sigma \rightarrow +0} G_n(-i\Omega + \sigma). \quad (2.2.32)$$



Из (2.2.31) получаем

$$G_n(-i\Omega + \sigma) = \frac{n}{(n!)^2} \left[ \int \left( \frac{J_z}{2R^2 M \Omega_z} \right)^n \frac{\sigma \frac{df_0}{dJ_z} dJ_z}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2} + i \int \left( \frac{J_z}{2R^2 M \Omega_z} \right)^n \frac{(\Omega - n\Omega_z) \frac{df_0}{dJ_z} dJ_z}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2} \right]. \quad (2.2.33)$$

Частота продольных колебаний в зависимости от амплитуды определяется приближенным соотношением ( $a$  - амплитуда):

$$\Omega_z^2 \approx \Omega_{z0}^2 \left( 1 - \xi \frac{a^2}{4R^2} \right), \quad \xi > 0, \quad (2.2.34)$$

откуда

$$\frac{2(\Omega_z - \Omega_{z0})}{\Omega_{z0}} \approx - \xi \frac{a^2}{4R^2} = - \xi \frac{J_z}{2R^2 M \Omega_z}. \quad (2.2.35)$$

Введем новую переменную  $u$  с помощью соотношения

$$\frac{2(\Omega_z - \Omega_{z0})}{\Omega_{z0}} = \delta \cdot u, \quad (2.2.36)$$

где  $\delta = \frac{2\Delta\Omega_z}{\Omega_{z0}}$  - относительная ширина частотного интервала, в котором заключены собственные частоты частиц. Тогда из (2.2.35) и (2.2.36) получаем

$$\frac{J_z}{2R^2 M \Omega_{z0}} = - \frac{\delta}{\xi} u, \quad u \leq 0. \quad (2.2.37)$$

Одновременно перейдем к новой функции распределения  $W(u)$  так, чтобы

$$2\pi f_0(J_z) \cdot dJ_z = W(u) du. \quad (2.2.38)$$

Если при этом потребовать, чтобы  $W(u) > 0$ , то

$$f_0(J_z) = \frac{1}{2\pi} W(u) \cdot \left| \frac{du}{dJ_z} \right| = \frac{\xi}{2\pi\delta} \cdot \frac{W(u)}{2R^2 |M| \Omega_z}. \quad (2.2.39)$$

Для определенности будем предполагать энергию частиц выше критической, т.е.  $M < 0$  и  $J_z < 0$ . При этом

$$\Omega_{z0}^2 = \frac{eVq}{2\pi R^2 |M|}.$$

Учитывая это и переходя к новой переменной в (2.2.23), получим

$$G_n(-i\Omega + \sigma) = \frac{\left( \frac{\delta}{\xi} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta}}{(n!)^2 eVq} \cdot (A_n - iB_n), \quad (2.2.40)$$

где

$$A_n(u_0) = \frac{1}{2} n \cdot \delta \cdot \Omega_{z0} \int_{-\infty}^0 (-u)^n \cdot \frac{dW}{du} \cdot \frac{\sigma du}{\sigma^2 + \frac{1}{4} n^2 \delta^2 \Omega_{z0}^2 (u - u_0)^2}, \quad (2.2.41)$$

$$B_n(u_0) = \frac{1}{2} n \cdot \delta \cdot \Omega_{z0} \int_{-\infty}^0 (-u)^n \cdot \frac{dW}{du} \cdot \frac{\frac{1}{2} n \cdot \delta \cdot \Omega_{z0} (u - u_0) du}{\sigma^2 + \frac{1}{4} n^2 \delta^2 \Omega_{z0}^2 (u - u_0)^2}. \quad (2.2.42)$$



Здесь  $u_0 = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{2(\frac{\Omega}{n} - \Omega_{z0})}{\Omega_{z0}}$  — относительная расстройка частоты когерентных колебаний (когерентный сдвиг частоты).

Прежде чем перейти к пределу  $\delta \rightarrow +0$ , отметим, что в (2.2.41) и (2.2.42) формально учитывается затухание свободных колебаний. Действительно, для учета затухания следует в (2.2.31) заменить  $\delta$  на  $\delta + \delta_a$ , где  $\delta_a$  — затухание свободных колебаний. Если затем согласно принятой выше процедуре в полученном выражении заменить  $\delta \rightarrow -i\Omega + \delta$  и затем перейти к пределу  $\delta \rightarrow +0$ , то мы придем к (2.2.40), (2.2.41) и (2.2.42), где под  $\delta$  следует понимать затухание свободных колебаний.

При отсутствии затухания в (2.2.41) и (2.2.42) необходимо перейти к пределу  $\delta \rightarrow +0$ . Тогда в пределе получаем

$$A_n(u_0) = \pi(-u_0)^n \cdot \left. \frac{dW}{du} \right|_{u=u_0}, \quad (2.2.43)$$

$$B_n(u_0) = \int_{-\infty}^0 (-u)^n \cdot \frac{dW}{du} \cdot \frac{du}{u-u_0} \quad (2.2.44)$$

В выражении для  $B_n(u_0)$  имеется в виду главное значение интеграла.

Подставляя (2.2.40) в (2.2.30), найдем уравнение для диаграммы Найквиста

$$K_n(-i\Omega) = \frac{I_0}{Vq} \cdot \frac{(\frac{\delta}{\Omega})^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta}}{(n!)^2} \cdot (A_n - iB_n) \cdot \sum_{m=-m_0}^{m_0} m^{2n-1} \cdot Z_m(-i\Omega - im\omega_0). \quad (2.2.45)$$

Частоту  $\Omega$  в выражении для импеданса системы  $Z_m$  можно с достаточной точностью заменить на  $n\Omega_{z0}$ , к которой частота когерентных колебаний весьма близка. Кроме того, преобразуем сумму в (2.2.45) так, чтобы суммирование производилось по положительным значениям  $m$ . Тогда получаем

$$K_n(-i\Omega) = \frac{I_0}{Vq} \cdot \frac{(\frac{\delta}{\Omega})^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta}}{(n!)^2} (A_n - iB_n) \cdot \sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} \cdot [(R_{mn}^+ - R_{mn}^-) - i(X_{mn}^+ + X_{mn}^-)], \quad (2.2.46)$$

причем

$$Z_m(-in\Omega_{z0} - im\omega_0) = R_{mn}^+ - iX_{mn}^+,$$

$$Z_m(-in\Omega_{z0} + im\omega_0) = R_{mn}^- + iX_{mn}^-. \quad (2.2.47)$$

Диаграмма Найквиста пересекает вещественную ось в точках, где  $\text{Im } K_n(-i\Omega)$  обращается в нуль. Если все эти точки лежат левее точки +1, то система устойчива. Для определения точек пересечения следует приравнять  $\text{Im } K_n(-i\Omega)$  нулю:

$$A_n(u_0) \cdot \sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} (X_{mn}^+ + X_{mn}^-) + B_n(u_0) \cdot \sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} (R_{mn}^+ - R_{mn}^-) = 0. \quad (2.2.48)$$

Величину  $u_0$ , найденную из этого уравнения, следует подставить в (2.2.46). Система устойчива, если  $\text{Re } K_n(u_0) < 1$ , т.е. если выполняется неравенство



$$\frac{I_0}{Vq} \cdot \frac{(\frac{\delta}{\xi})^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta}}{(n!)^2} \cdot \left\{ A_n \sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} (R_{mn}^+ - R_{mn}^-) - B_n \sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} (X_{mn}^+ + X_{mn}^-) \right\} < 1. \quad (2.2.49)$$

Если

$$\sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} (R_{mn}^+ - R_{mn}^-) \neq 0, \quad (2.2.50)$$

то из (2.2.48) и (2.2.49) можно получить условие устойчивости, содержащее лишь активные сопротивления:

$$\frac{I_0}{Vq} \cdot \frac{(\frac{\delta}{\xi})^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta}}{(n!)^2} \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{A_n} \sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} (R_{mn}^+ - R_{mn}^-) < 1. \quad (2.2.51)$$

Аналогичное условие может быть получено из уравнения (2.1.38) для модели нескольких макрочастиц в одной сепаратрисе, если положить там  $h=n, f=1$  и вместо  $|A_{mn}(J_z)|^2$  ввести приближенное выражение (2.2.27). Получаемое при этом выражение не учитывает, естественно, разброса частот. Условие устойчивости (2.2.51) можно переписать также в виде

$$\frac{I_0}{Vq} \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{\delta \cdot A_n} \cdot \sum_{m=1}^{m_0} \frac{m}{(n!)^2} \cdot \left( m \sqrt{\frac{\delta}{\xi}} \right)^{2(n-1)} (R_{mn}^+ - R_{mn}^-) < 1. \quad (2.2.52)$$

Сравнивая (2.2.35) и (2.2.36), можно получить соотношение

$$\sqrt{\frac{\delta}{\xi}} \approx \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_{z0}}}. \quad (2.2.53)$$

Учитывая условие (2.2.26), при котором получено (2.2.52), найдем, исходя из (2.2.53), неравенство

$$m \sqrt{\frac{\delta}{\xi}} \ll 1, \quad (2.2.54)$$

показывающее, что взаимодействие пучка с внешней системой на гармониках  $m$ , удовлетворяющих условию (2.2.26), быстро уменьшается с ростом номера моды  $n$ . Смысл этого результата очевиден.

Для продольных колебаний обычно, как отмечено в (2.2.34),  $\xi > 0$ , т.е. частота уменьшается с ростом амплитуды. Для дальнейшего, однако, имеет смысл отметить, что в противоположном случае, когда  $\xi < 0$ , все остается по-прежнему. Действительно, в этом случае вместо (2.2.36) и (2.2.37) новая переменная может быть введена соотношениями

$$\frac{2(\Omega_z - \Omega_{z0})}{\Omega_{z0}} = -\delta \cdot u, \quad \frac{J_z}{2R^2 M \Omega_{z0}} = \frac{\delta}{\xi} u = -\frac{\delta}{|\xi|} u; \quad u \leq 0. \quad (2.2.55)$$

Тогда дальше все сохраняется, только  $\xi$  заменяется на  $|\xi|$ .

Другим случаем, в котором выражение (2.2.24) может быть упрощено, является случай взаимодействия вблизи одной из гармоник  $m\omega_0$ . Тогда в (2.2.21) остаются лишь два слагаемых с индексами  $\pm m$ :

$$K_{nn}(J_z, J_z', s) = \frac{\frac{df_0}{dJ_z}}{s + i n \Omega_z} \frac{n}{m} [Z_m(s - i m \omega_0) - Z_m(s + i m \omega_0)] \cdot A_{mn}(J_z) \cdot A_{mn}^*(J_z'). \quad (2.2.56)$$



Для такого ядра в (2.2.24) все  $C_\nu$ , кроме  $C_1$ , обращаются в нуль. Поэтому дисперсионное уравнение может быть записано в виде

$$1 - e I_0 \cdot \frac{n}{m} \left[ Z_m(s - im\omega_0) - Z_m(s + im\omega_0) \right] \cdot \int \frac{\frac{df_0}{dJ_z} |A_{mn}|^2}{s + in\Omega_z} dJ_z = 0. \quad (2.2.57)$$

Выполняя преобразования, аналогичные вышеприведенным, с помощью критерия Найквиста можно получить условия устойчивости

$$\frac{I_0}{Vq} \cdot \frac{1}{m\delta^2} \left[ A_n^{(m)}(u_0)(R_{mn}^+ - R_{mn}^-) - B_n^{(m)}(u_0)(X_{mn}^+ + X_{mn}^-) \right] < 1, \quad (2.2.58)$$

причем  $u_0$  находится из уравнения

$$A_n^{(m)}(u_0)(X_{mn}^+ + X_{mn}^-) + B_n^{(m)}(R_{mn}^+ - R_{mn}^-) = 0, \quad (2.2.59)$$

где

$$A_n^{(m)}(u_0) = \pi J_n^2 \left( 2m \sqrt{-\frac{\delta}{\xi}} u_0 \right) \cdot \frac{dW}{du} \Big|_{u=u_0},$$

$$B_n^{(m)}(u_0) = \int_{-\infty}^0 J_n^2 \left( 2m \sqrt{-\frac{\delta}{\xi}} u \right) \cdot \frac{dW}{du} \cdot \frac{du}{u - u_0}. \quad (2.2.60)$$

Неравенство (2.2.58) при условии  $R_{mn}^+ - R_{mn}^- \neq 0$  может быть записано в виде

$$\frac{I_0}{Vq} \cdot \frac{1}{m\delta^2} \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{A_n} (R_{mn}^+ - R_{mn}^-) < 1. \quad (2.2.61)$$

Обратимся теперь к рассмотрению различных конкретных случаев. Представляет интерес для сравнения найти условия устойчивости, когда  $\Omega_z$  не зависит от амплитуды колебаний, т.е. от  $J_z$ . Для анализа этого случая преобразуем вначале (2.2.31) так, чтобы  $G_n(s)$  явно содержала бы производную частоты по  $J_z$ . Для этого будем интегрировать по частям (предполагая  $M < 0$ ,  $J_z < 0$ )

$$G_n(s) = \frac{n}{(n!)^2} \cdot \frac{f_0(J_z)}{s + in\Omega_z} \cdot \left( \frac{J_z}{2R^2 M \Omega_z} \right)^n \Big|_{-\infty}^0 - \frac{n}{(n!)^2} \int_{-\infty}^0 f_0(J_z) \cdot \frac{d}{dJ_z} \left\{ \left( \frac{J_z}{2R^2 M \Omega_z} \right)^n \cdot \frac{1}{s + in\Omega_z} \right\} dJ_z =$$

$$\frac{n}{(n!)^2} \int_{-\infty}^0 \frac{f_0(J_z)}{s + in\Omega_z} \left\{ \frac{n}{2R^2 |M| \Omega_z} \cdot \left( \frac{J_z}{2R^2 M \Omega_z} \right)^{n-1} + \left( \frac{J_z}{2R^2 M \Omega_z} \right)^n \cdot \frac{in\Omega_z'}{s + in\Omega_z} \right\} dJ_z. \quad (2.2.62)$$



Если частота  $\Omega_z$  не зависит от  $J_z$ , то второй член в скобках обращается в нуль, а множитель  $\frac{1}{s + i n \Omega_z}$  выносится из-под интеграла, так как  $\Omega_z = \text{const.}$  Действуя дальше аналогично предыдущему, можно получить условие устойчивости в виде неравенства

$$M_n \cdot \frac{I_0 \cdot \Omega_z}{2 V q} \cdot \frac{n^2}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{\delta} \sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} \cdot (R_{mn}^+ - R_{mn}^-) < 1, \quad (2.2.63)$$

где

$$M_n = 2\pi \int_{-\infty}^0 f_0(J_z) \cdot \left( \frac{J_z}{2R^2 M \Omega_z} \right)^{n-1} dJ_z. \quad (2.2.64)$$

В этом случае пороговый ток определяется затуханием.

Условие устойчивости (2.2.63) при  $n=1$  совпадает с условием устойчивости, которое может быть получено из (2.2.29) для модели макрочастиц, если под  $\delta$  понимать затухание свободных колебаний макрочастицы.

Выше уже упоминалось о попытках учета разброса частот отдельных частиц в рамках линейной модели, т.е. в предположении независимости частот колебаний от амплитуды. Интересно отметить, что получаемые с помощью такой модели результаты формально могут быть получены из (2.2.62), если под интегралом опустить второй член, содержащий  $\Omega_z'(J_z)$ , сохраняя в то же время формально зависимость  $\Omega_z$  от  $J_z$ . Тогда для  $G_n(-i\Omega)$  получается выражение, аналогичное (2.2.40)

$$G_n(-i\Omega) = \frac{n \left( \frac{\delta}{\Omega} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta}}{(n!)^2 \cdot e V q} \cdot (A_n - i B_n), \quad (2.2.65)$$

но для  $A_n(u_0)$  и  $B_n(u_0)$  вместо (2.2.43) и (2.2.44) имеют место соотношения

$$A_n(u_0) = \pi (-u_0)^{n-1} \cdot W(u_0), \quad (2.2.66)$$

$$B_n(u_0) = \int_{-\infty}^0 (-u)^{n-1} \cdot W(u) \cdot \frac{du}{u - u_0}. \quad (2.2.67)$$

Этот результат при  $n=1$  в точности совпадает с результатом, полученным в /5,16/ в предположении независимости частоты от амплитуды. Формально выражение для  $G_n(s)$ , получаемое из (2.2.62) отбрасыванием второго слагаемого, кроме не очень существенного различия степеней  $J_z$ , отличается от (2.2.31) тем, что вместо производной  $\frac{df_0}{dJ_z}$  в него входит сама функция распределения.

На это было обращено внимание в работе /28/, где было детально выяснено происхождение этого различия между линейной и нелинейной моделью.

Следствия этого различия легко понять, анализируя условие устойчивости (2.2.51). Это условие накладывает ограничение на ток пучка  $I_0$ , если левая часть неравенства положительна. В противоположном случае устойчивость сохраняется при любом токе пучка. Знак левой части (2.2.51) определяется знаками  $A_n$  и суммы, в которую входят сопротивления окружающей пучок системы на боковых частотах. Для линейной модели  $A_n(u_0)$  — положительная величина, определяемая (2.2.66), так как  $u_0 < 0$ , а  $W(u_0) > 0$  по определению. Поэтому для линейной модели абсолютная устойчивость определяется лишь свойствами внешней системы. В нелинейной же модели  $A_n(u_0)$  выражается через производную функцию распределения и может менять знак, так что абсолютная устой-



чивость определяется также видом функции распределения /15/. Конечно, для монотонной функции распределения с положительной производной качественно результаты линейной и нелинейной теории совпадают.

К неравенству (2.2.63) приближенно сводится условие устойчивости также в случаях сильного затухания или большого когерентного сдвига частоты. Затухание можно считать сильным, если выполняется соотношение

$$\sigma \gg |n\Omega_z - \Omega| \quad (2.2.68)$$

в полосе частот  $\Omega_z(J_z)$ , для которой  $\frac{d\Omega_z}{dJ_z}$  отлична от нуля, т.е. иными словами, если затухание заметно превышает разброс частот в пучке. В этом случае сгусток колеблется так, как если бы разброса частот не было. Аналогичная ситуация имеет место для большого когерентного сдвига, т.е. для случая, когда

$$\left| \frac{\Omega}{n} - \Omega_{z0} \right| \gg |\Omega_z - \Omega_{z0}|, \quad (2.2.69)$$

т.е., когда когерентный сдвиг значительно больше разброса частот. В этом случае условие устойчивости в виде (2.2.63) получается благодаря тому, что при выполнении неравенств (2.2.68) или (2.2.69) знаменатель подинтегрального выражения в (2.2.31) можно считать приближенно постоянным и вынести из-под знака интеграла; оставшееся под интегралом выражение затем интегрируется по частям.

Рассмотрим теперь некоторые примеры, иллюстрирующие полученные в этом разделе результаты.

#### 1. Гауссовское распределение плотности заряда в сгустке.

При этом распределении функция  $W(u)$  имеет вид

$$W(u) = \begin{cases} e^u & \text{при } -\infty < u \leq 0, \\ 0 & \text{при } u > 0. \end{cases} \quad (2.2.70)$$

Для определенности предположим, что  $n = 1$ . Тогда уравнение (2.2.48), определяющее  $u_0$ , можно записать в виде

$$-\frac{B(u_0)}{A(u_0)} = \frac{\sum_m (X_m^+ + X_m^-)}{\sum_m (R_m^+ - R_m^-)} = \Delta, \quad (2.2.71)$$

причем  $\Delta$  - величина, не зависящая в нашем приближении от  $u_0$ .

Вычисление величин  $A(u_0)$  и  $B(u_0)$  по формулам (2.2.43) и (2.2.44) дает в случае распределения (2.2.70)

$$A(u_0) = \begin{cases} -\pi u_0 e^{u_0} & \text{при } -\infty < u_0 \leq 0, \\ 0 & \text{при } u_0 > 0, \end{cases} \quad (2.2.72)$$

$$B(u_0) = -1 - u_0 e^{u_0} \text{Ei}_1(-u_0), \quad (2.2.73)$$



где

$$Ei_1(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^z dz}{z} = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} \quad \text{при } x > 0,$$

- модифицированная интегральная показательная функция /35/,  
 $C = 0,5772...$  - постоянная Эйлера. Левая часть (2.2.71) при  $u_0 < 0$  равна

$$-\frac{B(u_0)}{A(u_0)} = -\frac{1}{\pi} Ei_1(-u_0) - \frac{e^{-u_0}}{\pi u_0}. \quad (2.2.74)$$

Анализ (2.2.74) показывает, что при  $-\infty < u_0 \ll 0$  величина  $-\frac{B}{A}$  изменяется в пределах  $-\infty < -\frac{B}{A} < \infty$ .

На рис. 2.2.1. схематически представлены графики  $A, B$  и  $-\frac{B}{A}$  в зависимости от  $u_0$ , а диаграмма  $A-iB$  - на рис. 2.2.2. Как следует из графика  $-\frac{B}{A}$ , уравнение (2.2.71) при любом  $\Delta$  имеет единственный корень, причем всегда  $A > 0$ . Условие устойчивости при  $n=1$  имеет вид

$$\frac{I_0}{V_0} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{A^2 + B^2}{A} \sum_{m=1}^{\infty} m(R_m^+ - R_m^-) < 1. \quad (2.2.75)$$

Так как в этом случае  $A > 0$ , то абсолютная устойчивость определяется знаком суммы сопротивлений, т.е., например, настройкой ускоряющего резонатора. Если его настроить на частоту несколько ниже частоты ускоряющего в.ч. напряжения, то его активное сопротивление для нижней боковой частоты возрастет, а для верхней - уменьшится. В результате сумма в левой части (2.2.75) становится отрицательной, что обеспечивает абсолютную устойчивость по отношению к раскачке моды с номером  $n=1$ , т.е. дипольных колебаний. Можно показать, что при функции  $W(u)$  вида (2.2.70) такая настройка резонатора обеспечивает также устойчивость мод с любыми номерами  $n$ .

2. Рассмотрим теперь распределение вида

$$W(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2}} & \text{при } -\infty < u \leq 0, \\ 0 & \text{при } u > 0, \end{cases} \quad (2.2.76)$$

причем  $u_0 < 0$  и  $|u_0| \gg 1$ , т.е. сдвиг распределения значительно превышает его ширину. Тогда получаем:

$$A(u_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} u_0 (u_0 - u_0) \cdot e^{-\frac{(u_0 - u_0)^2}{2}} \quad \text{при } u_0 < 0, \quad (2.2.77)$$

$$A = 0 \quad \text{при } u_0 > 0,$$

$$B(u_0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{u_0^2}{2}} - u_0 \int_{-\infty}^{\frac{|u_0|}{2}} \frac{z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz}{u_0 - u_0 - z} \right] \cdot \frac{B'(u_0)}{A(u_0)}. \quad (2.2.78)$$

Графики зависимости  $A(u_0)$ ,  $B(u_0)$  и  $-\frac{B(u_0)}{A(u_0)}$  показаны на рис. 2.2.3, диаграмма  $A-iB$  - на рис. 2.2.4.

В этом случае уравнение (2.2.71) имеет два корня при любой величине  $\Delta$ , причем знаки  $A$  для этих корней противоположны. Поэтому при распределении частот вида (2.2.76) продольные колебания всегда потенциально неустойчивы, т.е. раскачиваются при токе пучка, больше некоторого порога. Практически такое распределение может возникать при инжекции, когда время радиационного



затухания больше времени раскогеренирования.

3. Наконец, рассмотрим еще распределение, отличающееся от (2.2.70) спадом около нуля (рис. 2.2.5). Такое распределение может возникнуть, например, после толчка, возбуждающего колебания всего сгустка, если время затухания значительно больше времени раскогеренирования. Графики А, В и  $-\frac{A}{A}$  для такого распределения представлены на рис. 2.2.6, а диаграмма А-В - на рис. 2.2.7. Как следует из этих графиков, в этом случае продольные колебания также потенциально неустойчивы при любой настройке внешней системы.

X

X

X

Вернемся теперь к общему выражению для определителя Фредгольма (2.2.24). Выше были указаны случаи, в которых все члены ряда со степенью  $\lambda$  выше первой обращаются в нуль. В общем случае этого не происходит. Можно, однако, с некоторой степенью приближения отбросить все члены степени выше первой. Тогда получим приближенное дисперсионное уравнение, имеющее следующий вид

$$1 - \lambda \int K_{nn}(J_z, J_z, s) dJ_z = 0, \quad (2.2.79)$$

или, подставляя сюда  $\lambda = eI_0$  и  $K_{nn}$  из (2.2.21),

$$1 - eI_0 \int \frac{\frac{df_0}{dJ_z} \sum_m \frac{n}{m} |A_{mn}(J_z)|^2 \cdot Z_m(s - im\omega_0)}{s + in\Omega_z} dJ_z = 0. \quad (2.2.80)$$

К сожалению, оценка точности этого приближения затруднительна. Тем не менее, уравнение (2.2.80), по-видимому, качественно правильно отражает основные особенности задачи. Некоторым обоснованием этого утверждения может быть сравнение уравнения (2.2.80) с уравнением (2.1.21) движения макрочастиц при взаимодействии ее с внешней системой, если в последнем оставить лишь члены с одним значением индекса  $n$ . Оба эти уравнения содержат под знаком суммы одинаковые выражения. При этом нужно отметить, что члены более высоких степеней в разложении определителя Фредгольма, как легко показать, не содержат произведений  $A_{mn}(J_z)$  с одинаковыми индексами  $m$ . Такие произведения содержат лишь линейный по  $\lambda$  член, который входит в уравнение (2.2.80). Можно предположить, что интегралы от произведений  $A_{mn}$  с различными индексами  $m$  дают малый вклад. Уравнение (2.2.80) имеет смысл применять в тех случаях, когда нет оснований отбрасывать высшие гармоники в сумме по  $m$ .

Мы не останавливаемся в этом разделе на взаимодействии пучка с системой, в которой электрическое поле зависит от радиуса, а также на случае пучка в нескольких сепаратрисах. Исследование этих случаев может быть проведено аналогично, и оно дает результаты, качественно совпадающие с результатами, полученными с помощью модели макрочастиц.



### 2.2.2 Взаимодействие с TEM линией

Электрическое поле, наведенное пучком в TEM линии, может быть найдено по формуле (2.1.67), полученной в разделе 2.1.2 при анализе взаимодействия с помощью модели макрочастиц:

$$E_{z0}(\psi_z, J_z, s) = - \sum_m e^{i \frac{mz}{R}} \left\{ Z_{11}(s - im\omega_0) \cdot E_{1z,m}(0) \cdot I_{1m}(s) + \right. \\ \left. + Z_{12}(s - im\omega_0) \cdot E_{1z,m}(0) \cdot I_{2m}(s) + Z_{21}(s - im\omega_0) \cdot E_{2z,m}(0) \cdot I_{1m}(s) + \right. \\ \left. + Z_{22}(s - im\omega_0) \cdot E_{2z,m}(0) \cdot I_{2m}(s) \right\}. \quad (2.2.81)$$

Токи  $I_{1m}(s)$  и  $I_{2m}(s)$  для модели непрерывной среды определяются соотношением (1.3.68) /23/. Так как при продольных колебаниях скорость  $\vec{v}$  имеет лишь продольную компоненту  $v_z = c$ , то выражение для токов приобретает вид

$$I_{km}(s) = ecN \int E_{kz,m}(y') \cdot F(\psi'_z, J'_z, s) \cdot e^{-i \frac{mz'}{R}} d\psi'_z dJ'_z. \quad (2.2.82)$$

Учитывая, что  $E_{1z} = e_{1z}$  и  $E_{2z} = e_{2z}$ , и используя соотношения (2.1.80), (2.1.81) и (2.1.82) для азимутальных гармоник поля, для токов можно записать следующие формулы:

$$I_{1m}(s) = \alpha_{-m} \frac{ecN}{2\pi R} \int E(y') \cdot F(\psi'_z, J'_z, s) e^{-i \frac{mz'}{R}} d\psi'_z dJ'_z = \alpha_{-m} \cdot I_m(s), \quad (2.2.83)$$

$$I_{2m}(s) = -\alpha_m \frac{ecN}{2\pi R} \int E(y') \cdot F(\psi'_z, J'_z, s) e^{-i \frac{mz'}{R}} d\psi'_z dJ'_z = -\alpha_m \cdot I_m(s), \quad (2.2.84)$$

причем

$$I_m(s) = I_0 \int E(y') \cdot F(\psi'_z, J'_z, s) \cdot e^{-i \frac{mz'}{R}} d\psi'_z dJ'_z, \\ I_0 = \frac{ecN}{2\pi R}. \quad (2.2.85)$$

Подставляя в (2.2.81) выражения для токов (2.2.83) и (2.2.84) и выражения для гармоник поля (2.1.80) и (2.1.81), получим для поля следующее выражение

$$E_{z0}(\psi_z, J_z, s) = - \frac{1}{2\pi R} \sum_m e^{i \frac{mz}{R}} \cdot I_m(s) \cdot E(0) \cdot Z_m(s - im\omega_0), \quad (2.2.86)$$

где

$$Z_m(s - im\omega_0) = \alpha_m \cdot \alpha_{-m} \left[ Z_{11}(s - im\omega_0) + Z_{22}(s - im\omega_0) \right] - \\ - Z_{12}(s - im\omega_0) (\alpha_m^2 + \alpha_{-m}^2), \quad (2.2.87)$$

аналогично (2.1.83).



Теперь можно найти возмущающий член гамильтониана (Лаплас-изображение)

$$\tilde{\mathcal{H}}_s = -e \int E_{z0} dz$$

и

$$\mathcal{L}[j_z] = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_s}{\partial \psi_z} = -\frac{e}{2\pi} \sum \frac{n}{m} e^{in\psi_z} A_{mn}(J_z) \cdot E(0) \cdot Z_m(s-im\omega_0) \cdot I_m(s). \quad (2.2.88)$$

Подставляя это выражение в уравнение Власова (2.2.1), получим, так же, как и в предыдущем разделе, следующее выражение для функции  $F_n(\psi_z, J_z, s)$ :

$$F(\psi_z, J_z, s) = \sum_n F_n(J_z, s) e^{in\psi_z}, \quad (2.2.89)$$

где

$$F_n(J_z, s) = \frac{f_{0n}(J_z)}{s+in\Omega_z} + \frac{e}{2\pi} \frac{dJ_0}{dJ_z} \sum \frac{n}{m} A_{mn} E(0) \cdot Z_m(s-im\omega_0) \cdot I_m(s), \quad (2.2.90)$$

а  $f_{0n}(J_z)$  определены соотношением (2.2.10).

Обратимся теперь к формуле (2.2.85) для тока. Приблизненно, ограничиваясь линейным членом, для малой окрестности равновесной орбиты можно записать

$$E(y) \cong E(0) + \left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_{y=0} y, \quad (2.2.91)$$

или, используя (2.1.73),

$$E(y) = E(0) - v_z \sqrt{\frac{2J_z}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \cos \psi_z, \quad (2.2.92)$$

где  $\frac{\partial E}{\partial y}$  взято для  $y=0$ . Подставляя (2.2.92) и (2.2.89) в (2.2.85), получим выражение для тока

$$I_m(s) = I_0 \int [E(0) - v_z \sqrt{\frac{2J_z'}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \cos \psi_z'] \cdot \sum_q F_q(J_z', s) e^{iq\psi_z'} e^{i\frac{mz'}{R}} d\psi_z' dJ_z'. \quad (2.2.93)$$

Это выражение может быть переписано следующим образом:

$$I_m(s) = I_0 \sum_q \int F_q(J_z', s) \cdot e^{-i\frac{mz'}{R}} \left[ E(0) e^{iq\psi_z'} - \frac{1}{2} v_z \sqrt{\frac{2J_z'}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} (e^{i(q+1)\psi_z'} + e^{i(q-1)\psi_z'}) \right] d\psi_z' dJ_z'. \quad (2.2.94)$$

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{mz'}{R}} e^{iq\psi_z'} d\psi_z' = 2\pi A_{mq}^*(J_z'), \quad (2.2.95)$$

то, выполняя в (2.2.94) интегрирование по  $\psi_z'$ , получим для тока

$$I_m(s) = 2\pi I_0 \sum_q \int F_q(J_z', s) \left\{ E(0) \cdot A_{mq}^*(J_z') - \frac{1}{2} v_z \sqrt{\frac{2J_z'}{M\Omega_z}} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} [A_{m,q+1}^*(J_z') + A_{m,q-1}^*(J_z')] \right\} dJ_z' \quad (2.2.96)$$



Для дальнейшего упрощения воспользуемся соотношением (2.1.57), справедливым для квазилинейного приближения. Тогда получим окончательно

$$I_m(s) = 2\pi I_0 \sum_q \left[ E(0) - v_z \cdot \frac{q}{m} R \cdot \frac{\partial E}{\partial y} \right] \int F_q(J_z', s) \cdot A_{mq}^*(J_z') dJ_z'. \quad (2.2.97)$$

Подставляя (2.2.97) в (2.2.90), получаем систему интегральных уравнений для гармоник  $F_n(J_z, s)$ :

$$F_n(J_z, s) - \frac{e I_0 \cdot \frac{df_0}{dJ_z}}{s + in\Omega_z} \cdot \sum_{m,q} \frac{n}{m} \cdot A_{mn}(J_z) \cdot \left[ E^2(0) - \frac{q}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \cdot Z_m(s - im\omega_0) \int F_q(J_z', s) \cdot A_{mq}^*(J_z') \cdot dJ_z' = \frac{f_{0n}(J_z)}{s + in\Omega_z}. \quad (2.2.98)$$

Полученная система уравнений формально мало отличается от полученной ранее системы уравнений (2.2.16) для взаимодействия с резонансной системой. Различие связано с тем, что электрическое поле здесь зависит от радиальной координаты, что приводит к появлению множителя в квадратных скобках под знаком суммы в (2.2.98).

Пользуясь формальным сходством, можно записать условие устойчивости для  $n$ -й моды аналогичное (2.2.51), получающееся при обрыве суммы по  $m$  на гармонике с номером  $m_0$ , удовлетворяющим неравенству (2.2.26):

$$\frac{I_0 \left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{A_n^2(u_0) + B_n^2(u_0)}{A_n(u_0)} \sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} \left\{ R_{mn}^+ \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} v_z R \cdot \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] - R_{mn}^- \left[ E^2(0) + \frac{n}{2m} v_z R \cdot \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \right\} < 1, \quad (2.2.99)$$

причем  $u_0$  определяется из уравнения

$$A_n(u_0) \sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} \left\{ X_{mn}^+ \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] + X_{mn}^- \left[ E^2(0) + \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \right\} + B_n(u_0) \sum_{m=1}^{m_0} m^{2n-1} \left\{ R_{mn}^+ \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] - R_{mn}^- \left[ E^2(0) + \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \right\} = 0, \quad (2.2.100)$$

а  $A_n(u_0)$  и  $B_n(u_0)$  определяются соотношениями (2.2.43) и (2.2.44).

Однако при взаимодействии пучка с ТЕМ линией отбрасывание высших гармоник не всегда оправдано, так как вследствие малой длины концевых участков и широкополосности нагрузок взаимодействие может происходить эффективно также и на гармониках, не удовлетворяющих неравенству (2.2.26). Более общее условие устойчивости может быть получено с помощью приближенного дисперсионного уравнения, аналогичного (2.2.80), учитывающего все гармоники частоты обращения. Это уравнение в данном случае имеет вид

$$1 - e I_0 \int \frac{\frac{df_0}{dJ_z}}{s + in\Omega_z} \sum_m \frac{n}{m} |A_{mn}(J_z)|^2 \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} v_z R \cdot \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] Z_m(s - im\omega_0) dJ_z = 0. \quad (2.2.101)$$



Из этого более общего дисперсионного уравнения с помощью критерия Найквиста можно получить условие устойчивости

$$\frac{I_0}{V_0} \cdot \frac{1}{\delta^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} A_n^{(m)}(u_0) \left\{ R_{mn}^+ [E^2(0) - \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y}] - R_{mn}^- [E^2(0) + \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y}] \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} B_n^{(m)}(u_0) \left\{ X_{mn}^+ [E^2(0) - \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y}] + X_{mn}^- [E^2(0) + \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y}] \right\} \right] < 1, \quad (2.2.102)$$

где (в квазилинейном приближении)

$$A_n^{(m)}(u_0) = \pi \cdot J_n^2 \left( 2m \sqrt{-\frac{\delta}{\xi}} u_0 \right) \cdot \frac{dW}{du} \Big|_{u=u_0} \quad (2.2.103)$$

$$B_n^{(m)}(u_0) = \int_{-\infty}^0 J_n^2 \left( 2m \sqrt{-\frac{\delta}{\xi}} u \right) \cdot \frac{dW}{du} \cdot \frac{du}{u - u_0},$$

а  $u_0$  определяется уравнением

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} A_n^{(m)}(u_0) \left\{ X_{mn}^+ [E^2(0) - \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y}] + X_{mn}^- [E^2(0) + \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y}] \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} B_n^{(m)}(u_0) \left\{ R_{mn}^+ [E^2(0) - \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y}] - R_{mn}^- [E^2(0) + \frac{n}{2m} v_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y}] \right\} = 0 \quad (2.2.104)$$

Исходя из (2.2.102), можно, например, записать условие устойчивости при взаимодействии пучка с линией, согласованной на обоих концах или на одном конце. В этом случае сопротивления  $Z_m$  вещественны и не зависят от частоты продольных колебаний (см. (2.1.100)):

$$R_{mn}^+ = R_{mn}^- = Z_0 \sin^2 \frac{mL}{R}, \quad X_{mn}^+ = X_{mn}^- = 0. \quad (2.2.105)$$

Подставляя эти выражения в (2.2.103) и (2.2.104), получим условие устойчивости в виде неравенства

$$-\frac{I_0 Z_0}{V_0} \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{n \cdot v_z R}{\partial y} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} A_n^{(m)}(u_0) \cdot \frac{\sin^2 \frac{mL}{R}}{m^2} < 1, \quad (2.2.106)$$

причем  $u_0$  определяется из уравнения

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_n^{(m)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{mL}{R}}{m^2} = 0. \quad (2.2.107)$$

При монотонной функции распределения и  $\frac{df}{dJ_z} > 0$  все  $A_n^{(m)} > 0$ .

Поэтому абсолютная устойчивость определяется знаком производной  $\frac{\partial(E^2)}{\partial y}$ .

Если  $\frac{\partial(E^2)}{\partial y} \geq 0$ , то продольные колебания затухают при любом токе пучка. Однако в общем случае произвольных нагрузок условия устойчивости (2.2.102) и (2.2.104) хотя и сохраняют силу, но неудобны, так как слишком сложны, чтобы из них можно было сделать какие-либо качественные выводы. Из них, например, не ясна роль активных и реактивных составляющих сопротивлений, т.к.



и те и другие входят в оба соотношения. В связи с этим ниже мы получим явное выражение для инкремента продольных когерентных колебаний. более подходящее для качественных суждений.

Выше уже указывалось, что устойчивость когерентных колебаний определяется расположением нулей определителя Фредгольма, т.е. корней уравнения

$$D(\lambda, s) = 0. \quad (2.2.108)$$

Предположим, что корни уравнения (2.2.108) найдены:  $s = s_k(\lambda)$  и эти соотношения могут быть обращены:  $\lambda = \lambda_k(s)$ . Подставляя в исходное уравнение, мы должны получить тождество

$$D[\lambda_k(s), s] \equiv 0,$$

справедливое при изменении  $s$  в некоторой области. С другой стороны известно, что определитель Фредгольма обращается в нуль лишь при подстановке в него в качестве  $\lambda$  собственных значений однородного интегрального уравнения, получающегося из уравнения (2.2.98) без правой части при отбрасывании в сумме по  $q$  всех членов, кроме члена с  $q = n$  (основания для отбрасывания были приведены в разделе 2.2.1):

$$F_n(J_z, s) = \lambda \cdot \frac{\frac{dJ_0}{dJ_z}}{s + i n \Omega_z} \cdot \sum_m \frac{n}{m} \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} \nu_z R \cdot \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right]. \quad (2.2.109)$$

$$\cdot Z_m(s - i m \omega_0) \cdot A_{mn}(J_z) \cdot \int F_n(J'_z, s) A_{mn}^*(J'_z) dJ'_z.$$

Поэтому для определения  $s_k$  — нулей функции  $D(\lambda, s)$  — следует найти собственные значения  $\lambda = \lambda_k(s)$  и затем вычислить с помощью этих соотношений  $s = s_k(\lambda)$ , подставляя в них известную величину  $\lambda = e I_0$ . Уравнение (2.2.109) определяет функцию  $F_n(J_z, s)$  в правой полуплоскости переменной  $s$ . Для определения всех нулей определителя Фредгольма, в том числе и лежащих в левой полуплоскости, уравнение (2.2.109) следует распространить также на левую полуплоскость переменной  $s$ . Это может быть сделано непосредственно с помощью выражения (2.2.109). Интеграл в правой части (2.2.109) при этом аналитически продолжается в левую полуплоскость способом, предложенным Ландау [31], т.е. с обходом полюса функции.

Предположим, что нам известны собственные функции уравнения (2.2.109)  $\Phi_{nk}(J_z, s)$  и корни определителя Фредгольма  $s = s_k(\lambda)$ . Подстановка этих величин в (2.2.109) обращает это уравнение в тождество, которое мы запишем в виде:

$$(s + i n \Omega_z) \cdot \frac{\Phi_{nk}(J_z, s)}{\frac{dJ_0}{dJ_z}} = e I_0 \sum_m \frac{n}{m} \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} \nu_z R \cdot \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right]. \quad (2.2.110)$$

$$\cdot Z_m(s - i m \omega_0) \cdot A_{mn}(J_z) \cdot \int \Phi_{nk}(J'_z, s) A_{mn}^*(J'_z) dJ'_z.$$

Как следует из уравнения (2.2.109), функция  $\Phi_{nk}(J_z, s)$  может быть представлена следующим образом:



$$\varphi_{nk}(J_z, s) = \frac{\frac{df_0}{dJ_z}}{s + in\Omega_z} \cdot g_{nk}(J_z, s), \quad (2.2.111)$$

причем функция  $g_{nk}(J_z, s)$  не имеет особенностей в точке  $s = -in\Omega_z$ . Подставляя (2.2.111) в левую часть (2.2.110), получим соотношение

$$g_{nk}(J_z, s) = eI_0 \sum_m \frac{n}{m} \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} \nu_z R \cdot \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \cdot Z_m(s - im\omega_0) \cdot A_{mn}(J_z) \cdot \int \varphi_{nk}(J'_z, s) \cdot A_{mn}^*(J'_z) dJ'_z. \quad (2.2.112)$$

Умножим правую и левую части (2.2.112) на  $\varphi_{nk}^*(J_z, s)$  и проинтегрируем по  $J_z$  во всей области изменения этой переменной. При этом в левой части  $\varphi_{nk}^*(J_z, s)$  выразим через  $g_{nk}(J_z, s)$  с помощью (2.2.111):

$$\int (s + in\Omega_z) \cdot \frac{\frac{df_0}{dJ_z} \cdot |g_{nk}(J_z, s)|^2}{|s + in\Omega_z|^2} dJ_z = eI_0 \sum_m \frac{n}{m} \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} \nu_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \cdot Z_m(s - im\omega_0) \cdot \int \varphi_{nk}^*(J_z, s) \cdot A_{mn}(J_z) dJ_z \cdot \int \varphi_{nk}(J'_z, s) \cdot A_{mn}^*(J'_z) dJ'_z. \quad (2.2.113)$$

Первый интеграл в правой части (2.2.113) доопределяется в левой полуплоскости переменной  $s$  следующим образом:

$$D_{mn}^*(s) = \int \varphi_{nk}^*(J_z, s) \cdot A_{mn}(J_z) dJ_z = \left[ \int \varphi_{nk}(J_z, s) \cdot A_{mn}^*(J_z) dJ_z \right]^*. \quad (2.2.114)$$

Тогда правая часть (2.2.113) изменяется непрерывно при переходе переменной  $s$  из правой полуплоскости в левую.

Равенство (2.2.113) является уравнением, определяющим нули  $s = \sigma - i\Omega$  определителя Фредгольма.

Подставим теперь  $s = \sigma - i\Omega$  в (2.2.113). Тогда это уравнение приобретает вид

$$\int \frac{\sigma \frac{df_0}{dJ_z} \cdot |g_{nk}(J_z, s)|^2}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2} dJ_z + i \int \frac{(n\Omega_z - \Omega) \cdot \frac{df_0}{dJ_z} \cdot |g_{nk}(J_z, s)|^2}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2} dJ_z = \quad (2.2.115)$$

$$= eI_0 \sum_m \frac{n}{m} \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} \nu_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \cdot Z_m(s - im\omega_0) \cdot |D_{mn}|^2.$$

Выше уже указывалось, что правая часть (2.2.115) изменяется непрерывным образом при переходе переменной  $s$  из правой полуплоскости в левую. Иначе обстоит дело с левой частью (2.2.115). Первый интеграл в левой части при переходе  $\sigma$  через нуль испытывает разрыв, причем величина скачка равна

$$R(\Omega) = 2 \lim_{\sigma \rightarrow +0} \int \frac{\sigma \frac{df_0}{dJ_z} \cdot |g_{nk}(J_z, s)|^2}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2} dJ_z. \quad (2.2.116)$$



Наличие этого разрыва связано с особенностью подынтегральной функции в левой части (2.2.113) в точке  $\Omega_z = -\frac{s}{in}$ ; при переходе  $s$  из правой полуплоскости в левую особая точка пересекает ось вещественных  $J_z$ , по которой производится интегрирование. Поэтому, чтобы определить левую часть (2.2.113) в левой полуплоскости переменной  $s$ , следует ее непрерывно продолжить в левую полуплоскость.

При этом для  $\sigma < 0$  уравнение (2.2.115) будет иметь следующий вид:

$$R(\Omega) + \int \frac{\sigma \cdot \frac{df_0}{dJ_z} \cdot |g_{nk}(J_z, s)|^2 \cdot dJ_z}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2} + i \int \frac{(n\Omega_z - \Omega) \cdot \frac{df_0}{dJ_z} \cdot |g_{nk}(J_z, s)|^2 \cdot dJ_z}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2} =$$

(2.2.117)

$$= e I_0 \cdot \sum_m \frac{n}{m} \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} \nu_z R \cdot \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \cdot Z_m(s - im\omega_0) |D_{mn}|^2.$$

Приравнявая теперь вещественные и мнимые части в уравнении (2.2.117), можно получить явные выражения для  $\sigma$  и  $\Omega$  (при  $\sigma < 0$ ):

$$\sigma = \frac{e I_0 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{m} \left\{ R_{mn}^+ \left[ E^2 - \frac{n}{2m} \nu_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] - R_{mn}^- \left[ E^2 + \frac{n}{2m} \nu_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \right\} |D_{mn}|^2 - R(\Omega)}{\int \frac{\frac{df_0}{dJ_z} \cdot |g_{nk}(J_z, -i\Omega)|^2 \cdot dJ_z}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2}}$$

(2.2.118)

$$\Omega = \frac{\int n\Omega_z \cdot \frac{\frac{df_0}{dJ_z} \cdot |g_{nk}(J_z, -i\Omega)|^2 \cdot dJ_z}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2}}{\int \frac{\frac{df_0}{dJ_z} \cdot |g_{nk}(J_z, -i\Omega)|^2 \cdot dJ_z}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2}} +$$

$$+ \frac{e I_0 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{m} \left\{ \chi_{mn}^+ \left[ E^2 - \frac{n}{2m} \nu_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] + \chi_{mn}^- \left[ E^2 + \frac{n}{2m} \nu_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \right\} |D_{mn}|^2}{\int \frac{\frac{df_0}{dJ_z} \cdot |g_{nk}(J_z, -i\Omega)|^2 \cdot dJ_z}{\sigma^2 + (n\Omega_z - \Omega)^2}}, \quad (2.2.119)$$

где:  $R_{mn}^{\pm} = \operatorname{Re} Z(im\omega_0 \pm in\Omega_z)$ ,  $\chi_{mn}^{\pm} = \operatorname{Im} Z(im\omega_0 \pm in\Omega_z)$ .

Здесь при вычислении  $Z_m(s - im\omega_0)$  принято приближенно  $s \approx -i\Omega$  (т.к.  $\sigma \ll \Omega$ ).

Из выражения для  $\sigma$  (2.2.118) следует, что при монотонной функции  $f_0(J_z)$  и при  $\frac{df_0}{dJ_z} > 0$  условие устойчивости имеет вид

$$e I_0 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{m} \left\{ R_{mn}^+ \left[ E^2(0) - \frac{n}{2m} \nu_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] - R_{mn}^- \left[ E^2(0) + \frac{n}{2m} \nu_z R \frac{\partial(E^2)}{\partial y} \right] \right\} |D_{mn}|^2 - R(\Omega) < 0. \quad (2.2.120)$$



Так как при этих условиях  $R(\Omega) > 0$ , то абсолютная устойчивость (т.е. устойчивость при любом токе  $I_0$ ) имеет место, если сумма в левой части (2.2.120) отрицательна. Этот результат является обобщением условия абсолютной устойчивости, полученного выше при отбрасывании высших гармоник.

Вычисление весовых коэффициентов  $|D_{mn}|^2$  в (2.2.120) в общем случае затруднительно. Но из (2.2.120) следует, что устойчивость определяется активными составляющими сопротивлений. Реактивные составляющие сопротивления влияют на устойчивость косвенно, через весовые коэффициенты  $|D_{mn}|^2$ . При этом условие устойчивости заведомо выполняется, если каждая из фигурных скобок в (2.2.120) отрицательна.

Из (2.2.119) следует, что когерентный сдвиг частоты колебаний определяется реактивными составляющими сопротивлений.

Если  $\frac{dJ_0}{dJ_1}$  — знакопеременная функция, то знак знаменателя (2.2.118) не определен. Поэтому неравенство (2.2.120) может в этом случае изменить смысл.

Приведем теперь выражение для когерентного сдвига частоты колебаний. Для этого рассмотрим (2.2.118) и (2.2.119) и найдем частоту  $\Omega$  для которой выполняется условие устойчивости.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\Omega) \delta(\Omega - \Omega_0)}{\Omega - \Omega_0 + j0} d\Omega = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m}{\Omega - \Omega_m + j0} \quad (2.2.121)$$

$$R(\Omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{dJ_0}{dJ_1} \right)^2 \left( \frac{dJ_1}{dJ_2} \right)^2 \left( \frac{dJ_2}{dJ_3} \right)^2 \dots \left( \frac{dJ_{n-1}}{dJ_n} \right)^2 \quad (2.2.122)$$

Первый интеграл в правой части (2.2.121) определяется в левой части (2.2.122) следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\Omega) \delta(\Omega - \Omega_0)}{\Omega - \Omega_0 + j0} d\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{dJ_0}{dJ_1} \right)^2 \left( \frac{dJ_1}{dJ_2} \right)^2 \left( \frac{dJ_2}{dJ_3} \right)^2 \dots \left( \frac{dJ_{n-1}}{dJ_n} \right)^2 \quad (2.2.123)$$

Тогда правая часть (2.2.121) примет вид:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m}{\Omega - \Omega_m + j0} = \frac{1}{2} \left( \frac{dJ_0}{dJ_1} \right)^2 \left( \frac{dJ_1}{dJ_2} \right)^2 \left( \frac{dJ_2}{dJ_3} \right)^2 \dots \left( \frac{dJ_{n-1}}{dJ_n} \right)^2 \quad (2.2.124)$$

Подставив теперь  $S = \Omega - \Omega_0 + j0$  в (2.2.121) и (2.2.124) получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\Omega) \delta(\Omega - \Omega_0)}{\Omega - \Omega_0 + j0} d\Omega = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m}{\Omega - \Omega_m + j0} \quad (2.2.125)$$

$$R(\Omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{dJ_0}{dJ_1} \right)^2 \left( \frac{dJ_1}{dJ_2} \right)^2 \left( \frac{dJ_2}{dJ_3} \right)^2 \dots \left( \frac{dJ_{n-1}}{dJ_n} \right)^2 \quad (2.2.126)$$

Из (2.2.125) и (2.2.126) следует, что частота  $\Omega$  для которой выполняется условие устойчивости, определяется из уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\Omega) \delta(\Omega - \Omega_0)}{\Omega - \Omega_0 + j0} d\Omega = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m}{\Omega - \Omega_m + j0} \quad (2.2.127)$$

$$R(\Omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{dJ_0}{dJ_1} \right)^2 \left( \frac{dJ_1}{dJ_2} \right)^2 \left( \frac{dJ_2}{dJ_3} \right)^2 \dots \left( \frac{dJ_{n-1}}{dJ_n} \right)^2 \quad (2.2.128)$$



## Л и т е р а т у р а

1. I. Henry. Phase oscillations in high current synchrotrons. Journ. Appl. Phys., 31, 1338, 1960.
2. С.С.Шахиджанов. Фазовый режим в системах накопления большого тока ускоренных частиц. АЭ, 12, 483, 1962.
3. А.И.Барышев, С.А.Хейфец. Влияние наведенного напряжения на фазовые колебания сгустка частиц в ускорителе. ЖТФ, 33, 320, 1963.
4. В.Л.Ауслендер, М.М.Карлинер, А.А.Наумов, С.Г.Попов, А.Н.Скринский, И.А.Шехтман. Фазовая неустойчивость интенсивного электронного пучка в накопителе. АЭ, 20, 210, 1966.
5. М.М.Карлинер, А.Н.Скринский, И.А.Шехтман. Условие устойчивости фазового движения сгустка в накопителях релятивистских частиц. ЖТФ, 38, 1945, 1968.
6. А.Н.Лебедев. Когерентные синхротронные колебания при наличии пространственного заряда. АЭ, 25, 100, 1968.
7. H. Zyngier. Coherent phase instabilities in ACO storage ring. Proc. of the International Symposium on electron and positron storage rings ( Saclay, Sept., 26-30, 1966 ), p.VII.4-I.
8. C. Pellegrini. Linear theory of RF cavity - bunched beam interaction. Private communication, 1969.
9. A. N. Lebedev. On the bunch lengthening effect in storage rings. LNF-69/52, Frascati, 1969.
10. Н.С.Диканский. Исследование когерентной устойчивости пучков в накопителях. Кандидатская диссертация, Новосибирск, 1969.
11. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский. О демпфировании когерентных колебаний пучка в накопителе.  
II. Синхротронные возбуждения, ИЯФ-318, Новосибирск, 1969.
12. М.М.Карлинер. Устойчивость фазового движения многих сгустков в накопителях заряженных частиц. ЖТФ, 41, 1806, 1971.
13. М.К.Бартон, Е.К.Рака. Нестабильности пучка Брукхейвенского протонного синхротрона, обусловленные взаимодействием с высокочастотной системой. Труды Второго Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц (Москва, 11-18 ноября 1970 г.), т. 2, стр. 43.



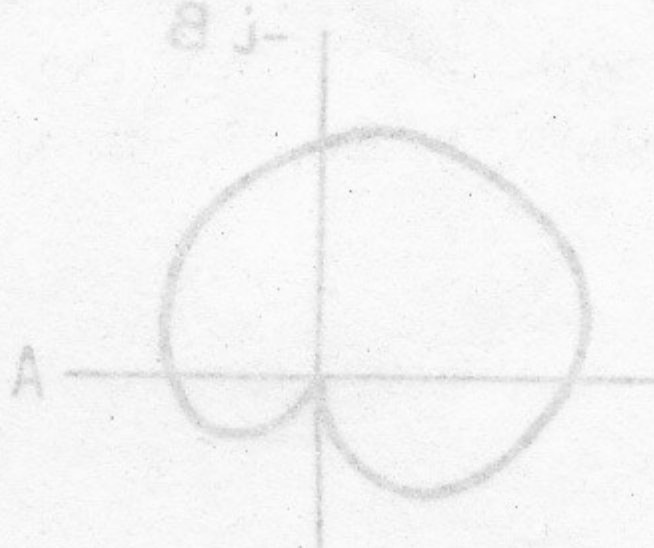
14. I. Gumovski. Stability of coherent synchrotron motion. Pt. I, CERN DL/70-13, 1970; pt. II, CERN DL/71-6, 1971.
15. M. M. Karliner. The phase motion stability of the bunch in a storage ring depending on the form of synchrotron frequency distribution function. Proc. of the 8-th International Conference on High-Energy Accelerators ( Geneva, 20-24 Sept., 1971 ), p. 363.
16. С. Г. Каноненко, Л. Д. Лобзов, Л. В. Репринцев, А. М. Шендерович. Исследование продольной неустойчивости пучка в накопителе. Ч. I, ЖТФ, 41, 1272, 1971; ч. II, ЖТФ, 41, 1281, 1971.
17. А. И. Барышев. Предельный ток кольцевого ускорителя или накопителя. Известия АН Арм. ССР, Физика, 5, 242-249, 1970.
18. F. Amman. Electron positron storage rings: status and present limitations. LNF-69/I2, Frascati, 1969.
19. F. Amman. Electron and positron storage rings: present situation and future prospects. Proc. of the 8-th International Conference on High-Energy Accelerators ( Geneva, 20-24 Sept., 1971 ), p. 63.
20. Gruppo Adone: present status and operation. LNF-70/48, Frascati, 1970.
21. R. Averill, A. Hoffman and all. Synchrotron and betatron instabilities of stored beams in the CEA. Proc. of the 8-th International Conference on High-Energy Accelerators ( Geneva, 20-24 Sept., 1971 ), p. 301.
22. R. Belbeoch, M. Bergher and oth. Recent experiments with ACO. Rapport technique IO-68, Orsay, 1968.



23. М.М.Карлинер. Когерентные неустойчивости пучка в электронных накопителях вследствие электромагнитного взаимодействия с окружающей структурой.  
1. Когерентные движения пучка в накопителе. ИЯФ 74/05, Новосибирск, 1974.
24. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
25. В.А.Диткин, А.П.Прудников. Операционное исчисление. М., "Высшая школа", 1966.
26. Е.Янке, Ф.Эмде. Таблицы функций. М.-Л., ГИТТЛ, 1948.
27. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике. М., Наука, 1968.
28. H. Hereward. Landau damping by non-linearity.  
CERN/MPS/DL-69-II, 1969
29. С.Г.Михлин. Лекции по интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
30. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1972.
31. Л.Д.Ландау. О колебаниях электронной плазмы. ЖЭТФ, 16, 574, 1946.
32. Ф.Рисс, Б.Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. М., "ИЛ", 1954.
33. O. Penrose. Electrostatic instabilities of a uniform non-maxwellian plasma. Phys. Fluids, 3, 258, 1960.
34. Т.Стикс. Теория плазменных волн. М., Атомиздат, 1965.
35. Н.Н.Лебедев. Специальные функции и их приложения. М.-Л., Физматгиз, 1963.

Отв. за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ  
Получено к печати 19. XII - 1974 г. № 08624  
Усл. 3,0 печ. л., тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 106

Отпечатано на ротационной машине в ИЯФ СО АН СССР.





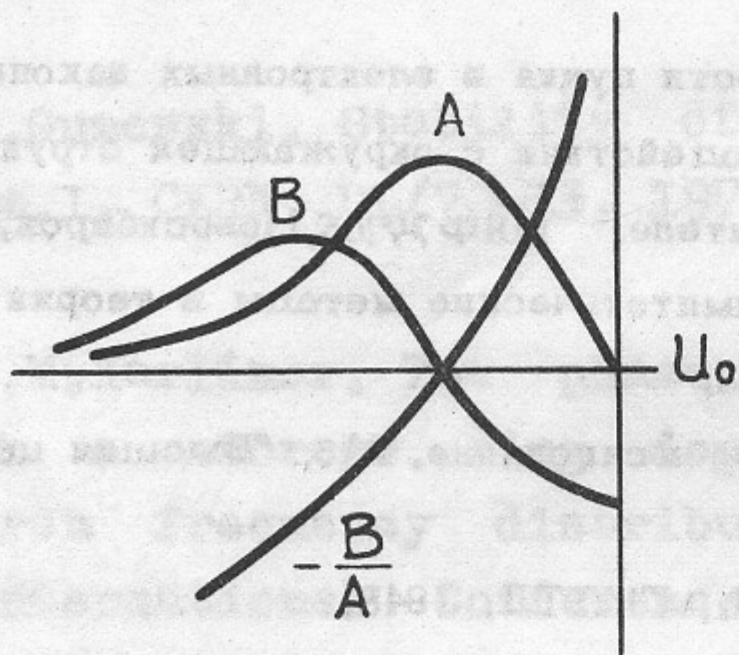


Рис. 2.2.1

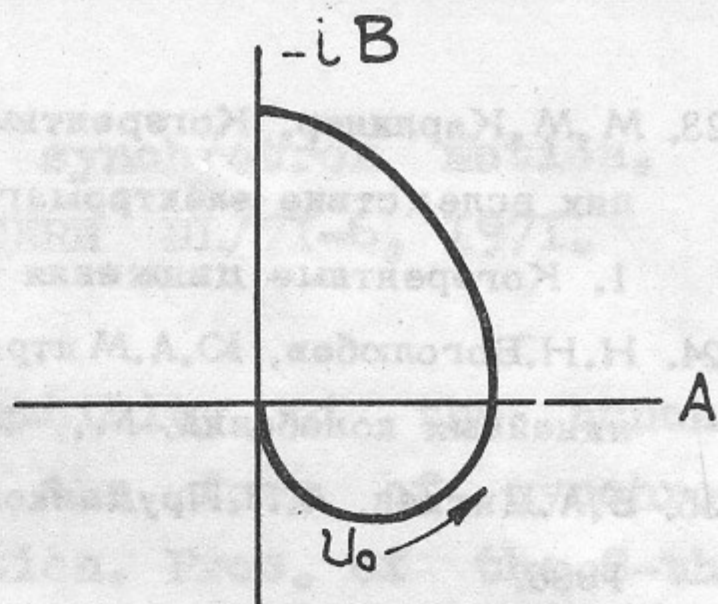


Рис. 2.2.2

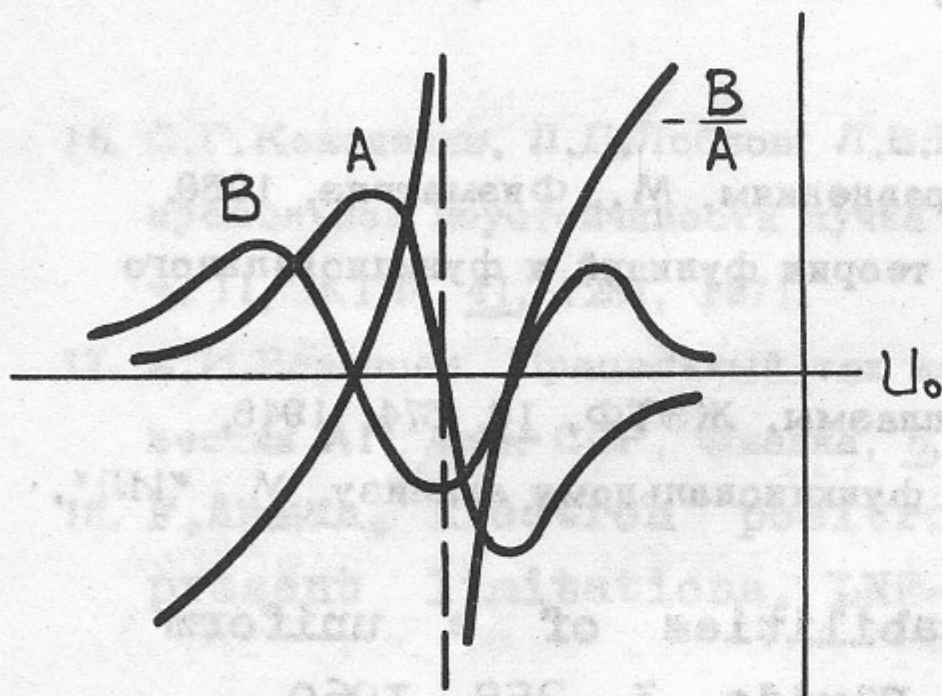


Рис. 2.2.3

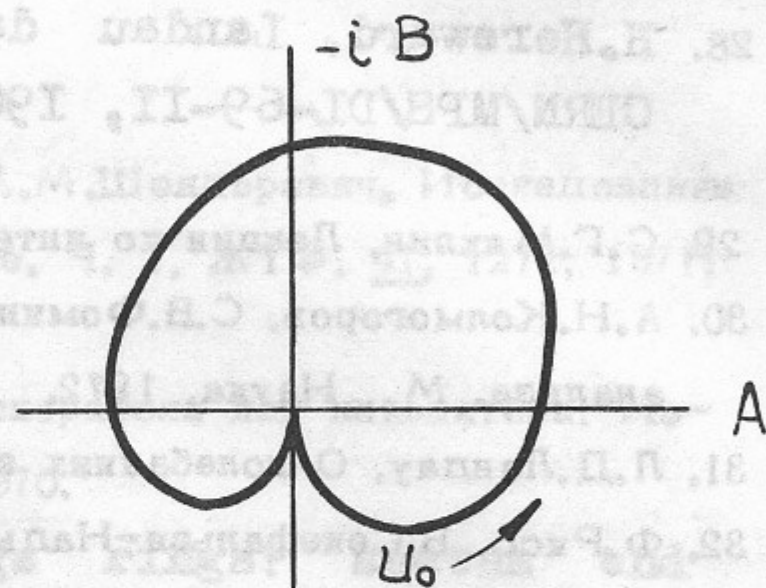


Рис. 2.2.4

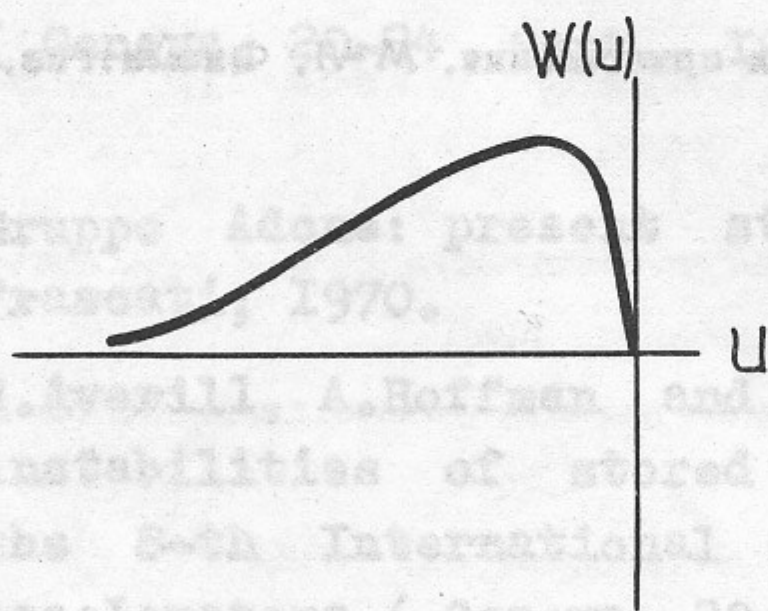


Рис. 2.2.5

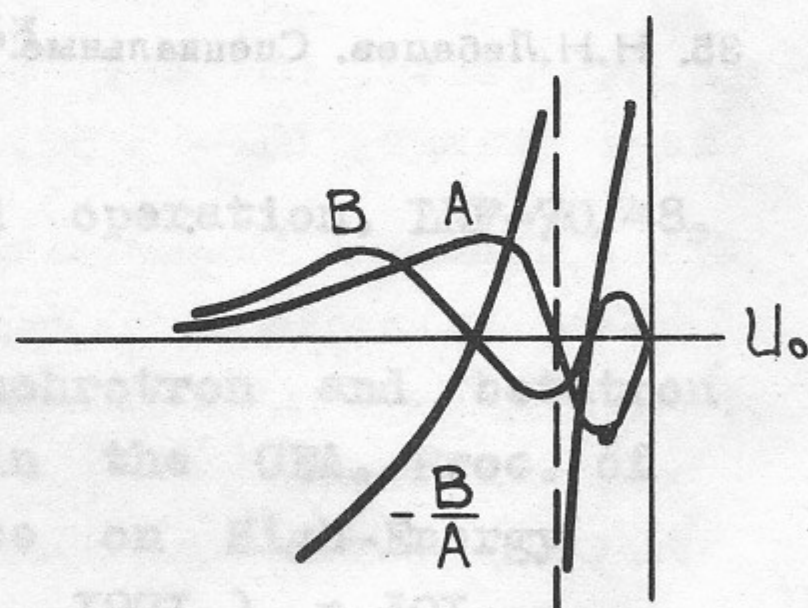


Рис. 2.2.6

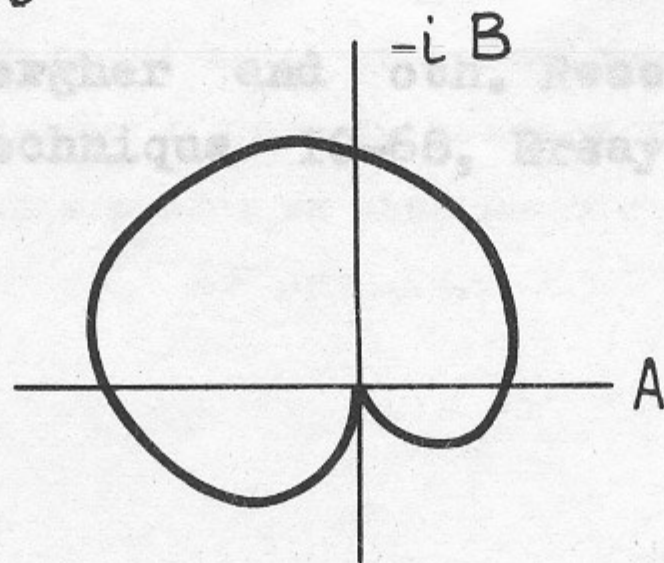


Рис. 2.2.7



---

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ  
Подписано к печати 19.XII-1974г. МН 08624  
Усл. 3,0 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 106

---

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вт