На правах рукописи

ГРАБОВСКИЙ Андрей Владимирович

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТОВ БОЛЬШИХ ГЛЮОННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ В КХД

01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

НОВОСИБИРСК – 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

ФАДИН Виктор Сергеевич	–	доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук.

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

ГИНЗБУРГ Илья Файвильевич	–	доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, главный научный сотрудник.
КОТИКОВ Анатолий Васильевич	–	доктор физико-математических наук, Международная межправительственная организация Объединённый институт ядерных исследований, г. Дубна, ведущий научный сотрудник.
НИКОЛАЕВ Николай Николаевич	–	доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук, г. Черноголовка, главный научный сотрудник.
ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:	–	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва.

Защита диссертации состоится « 29 » сентября 2020 г. в « 10:00 » часов на заседании диссертационного совета Д 003.016.02 Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук.

Адрес: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте http://inp.nsk.su/images/diss/Grabovsky_disser.pdf.

Автореферат разослан « 8 » июля 2020 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН В. С. Фадин

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Одним из наиболее интересных режимов квантовой хромодинамики является режим больших глюонных плотностей и высоких энергий, который достигается при $\sqrt{s} \gg Q$, где s — это квадрат энергии в системе центра инерции и Q — это характерный масштаб поперечных импульсов. Для применимости расчетов, выполненных по теории возмущений, требуют также $Q \gg \Lambda_{QCD}$.

По определению реджевская кинематика имеет место для процессов с двумя начальными и двумя конечными частицами, когда $s \gg |t|$, где t — это квадрат передачи импульса, являющийся масштабом поперечных импульсов. В столкновениях с участием адронов характерный масштаб поперечных импульсов Q может задаваться не только передачей t, но и виртуальностью фотона, инвариантной массой или поперечным импульсом рожденной адронной системы. Сечения таких процессов зависят от партонных функций распределения, прежде всего, глюонной, то есть “числа глюонов в адроне”, которое велико при $\sqrt{s} \gg Q$. В данной диссертации мы говорим о реджевском режиме именно в этом более широком значении, $\sqrt{s} \gg Q$, не ограничиваясь узкими рамками реджевской кинематики.

На эксперименте реджевский режим реализуется в таких процессах как глубоко неупругое лептон - адронное рассеяние (ГНР) при малых $x = \frac{Q^2}{s}$ и жесткая дифракция в ГНР, что актуально для установок HERA, LeHC, EIC. Изучение режима больших глюонных плотностей входит в физическую программу планируемых ускорителей LeHC и EIC как важнейшая неотъемлемая часть.

На адронных коллайдерах реджевский режим имеет место в центральных столкновениях тяжелых ионов и pp столкновениях с большой множественностью, так как характерные x для рожденных частиц в центральной области быстрот малы (до $\sim 10^{-4}$ для pp с $\sqrt{s} = 14$, например). Величины импульсов этих частиц часто недостаточны для применимости теории возмущений. Типичные наблюдаемые, для которых можно делать расчеты в рамках теории возмущений, — это дифференциальные сечения инклюзивного рождения струй с большим поперечным импульсом $\sim Q$ в центральной области быстрот и азимутальная угловая декорреляция струй с максимальной разностью быстрот, называемых струями Мюллера - Навале. Реджевский режим также достигается в ультрапериферических столкновениях адронов и ядер, когда одно из ядер испускает квазиреальный фотон, который взаимодействуют со вторым ядром с образованием системы с жестким масштабом, например струй, Υ или j$/\psi$, что актуально для RHIC и LHC. Жесткие матричные элементы для этих процессов можно вычислять в рамках теории возмущений.

Итак, на лептон - адронных машинах наблюдаемые, позволяющие изучать КХД в реджевском режиме, — это дифференциальные сечения по x и Q^2 (и, следовательно, структурные функции и функции распределения партонов, прежде всего глюона), дифракционные функции распределения, сечения и угловые распределения дифракционного рождения струй и мезонов. В ультрапериферических адрон - адронных столкновениях в реджевской области измеряются сечения и угловые распределения дифракционного рождения струй и мезонов и дифракционные функции распределения. В центральных столкновениях типичными наблюдаемыми являются сечения инклюзивного рождения струй, угловые спктры для струй Мюллера - Навале, распределения рожденных частиц по быстроте, энергии, поперечному импульсу и т.д. Все эти наблюдаемые позволяют изучать волновые функции адронов до взаимодействия.

С теоретической точки зрения при фиксированном Q при уменьшении x растет плотность глюонов в пространстве поперечном оси столкновения, то есть отношение числа глюонов с поперечным импульсом меньше Q и долей x продольного импульса исходного адрона к поперечной площади адрона. Пока плотность числа глюонов с поперечным импульсом меньше Q много меньше 1, $\frac{dN}{dln\frac{1}{x}} \ll 1$, этот рост описывается линейным уравнением, так как необходимо учитывать только процессы расщепления глюона. А при достаточно больших плотностях уравнения становятся нелинейными и рост практически прекращается. В этом случае говорят о достижении режима больших глюонных плотностей в реджевском пределе.

Прекращение роста глюонной плотности при малых x называется насыщением. При этом генерируется масштаб насыщения $Q_s(x)$ — характерный поперечный импульс, при котором процессы слияния глюонов в волновой функции адрона становятся одного порядка с процессами расщепления глюона. При насыщении характерное межпартонное расстояние становится порядка поперечного размера партона. Поэтому нельзя пренебрегать партон - партонным взаимодействием. Именно масштаб насыщения определяет глюонную плотность и, следовательно, наблюдаемые при очень малых x. В результате любые наблюдаемые, зависящие от одного поперечного масштаба, оказываются функциями отношения этого масштаба и масштаба насыщения. Например, после выделения размерного множителя сечение ГНР зависит от отношения $\frac{Q}{Q_s(x)}$, а не от Q и x по-отдельности: $\sigma \sim \frac{1}{Q^2} f(\frac{Q}{Q_s(x)})$. Такое поведение называется геометрический скейлинг. Оно наблюдалось в ep, eA и pp столкновениях.

В настоящее время становится актуальным изучение более сложных наблюдаемых, зависящих от нескольких масштабов. Например, рассматривается глубоко виртуальное комптоновское рассеяние, глубоко виртуальное рождение мезонов и струй с ненулевой передачей импульса. Наличие третьего масштаба, передачи импульса, позволяет восстановить не только зависимость адронных матричных элементов от x, то есть исследовать распределение партонов по продольному импульсу, но и изучать распределение партонов по поперечному импульсу. Соответствующие наблюдаемые — это непроинтегрированные партонные распределения.

Описание процессов в реджевском пределе возможно в нескольких подходах: подходе Балицкого - Фадина - Кураева - Липатова (БФКЛ) [1]–[4], подходе конденсата цветного стекла (КЦС) [5]–[11], модели цветовых диполей [12]–[15], подходе вильсоновских линий, ударных волн или высокоэнергетического операторного разложения Балицкого (ВЭОР) [16]–[18]. В данной диссертации использованы методы ВЭОР и БФКЛ.

В рамках этих подходов сечение любого процесса вычисляется в виде свертки жесткой части — импакт фактора, описывающего взаимодействие налетающей частицы с глюонным полем мишени, и матричного элемента, вычисленного по начальному и конечному состояниям мишени от функции Грина, определяющей это глюонное поле. Зависимость функции Грина от быстроты вычисляется в рамках одного из вышеупомянутых подходов, которые позволяют вывести уравнения эволюции по быстроте для различных функций Грина.

Итак, для построения сечений необходимо вычислять импакт факторы, выводить и решать уравнения эволюции и вычислять свертки импакт факторов и матричных элементов функций Грина. Диссертация посвящена всем этим этапам. В данной работе представлен вывод уравнений эволюции по x для различных функций Грина в рамках ВЭОР, обсуждается связь с подходом БФКЛ, найдено решение линеаризованного уравнения, вычислены импакт факторы дифракционного фоторождения 2 и 3 струй, легкого векторного мезона.

Диссертация состоит из трех глав. В первой главе дан вывод уравнения эволюции для барионной вильсоновской петли (БВП) в главном и следующем за главным логарифмических приближениях (ГЛП и СГЛП), получены квазиконформное и линеаризованное ядра этого уравнения, построено решение линейного уравнения эволюции для рассеяния вперед в СГЛП. Для квадрупольного оператора и дважды дипольного оператора получены ядра уравнений эволюции в СГЛП и соответствующие квазиконформные ядра.

Сначала представлен вывод уравнения эволюции для БВП в ГЛП, в котором изменение БВП с быстротой выражается только через одну БВП и произведения двух БВП и не зависит от других операторов. Такой вид полностью аналогичен уравнению Балицкого - Ковчегова (БК). В пределе больших N_c для рассеяния на большом ядре он позволяет с точностью $\sim \frac{1}{N_c^2}$ привести это уравнение к замкнутому виду, то есть к уравнению, содержащему только матричный элемент одной БВП, заменяя матричный элемент произведения бесцветных операторов на произведение их матричных элементов. Попытки написать уравнение для БВП в замкнутом виде предпринимались и ранее, но это впервые удалось в данной работе.

Далее произведен расчет связной части ядра уравнения эволюции для БВП. Диаграммы, дающие вклад в эту часть, не встречаются при вычислении ядра для дипольного оператора. Используя эту часть ядра и дипольное ядро в СГЛП, было построено уравнение эволюции для БВП в СГЛП. Это уравнение было приведено к квазиконформному виду и линеаризовано.

Используя полученные результаты, также были построены и приведены к квазиконформному виду уравнения эволюции для квадрупольного оператора и оператора двойного диполя в СГЛП.

Наконец, было построено общее решение линейного уравнения для дипольного оператора - уравнения БФКЛ в СГЛП для рассеяния вперед в пространстве собственных функций борновского ядра.

Во второй главе вычислены импакт факторы для эксклюзивного дифракционного фоторождения продольно поляризованного векторного мезона в главном и следующем за главным приближениях (ГП и СГП), двух струй в ГП и СГП, трех струй в ГП.

Сначала приведен расчет импакт фактора для дифракционного фоторождения двух струй в ГП и СГП и трех струй с ГП в рамках ВЭОР. Далее был вычислен импакт фактор фоторождения продольно поляризованного векторного мезона в СГП в виде свертки импакт фактора фоторождения коллинеарной кварк-антикварковой пары в СГП с амплитудой распределения (АР) для продольно поляризованного векторного мезона.

В третьей главе представлен метод перехода между операторами в полном и мебиусовском представлениях, отвечающих подходам БФКЛ и ВЭОР соответственно. Показано, что для калибровочно инвариантных операторов существует процедура восстановления полной формы по мебиусовской и эта процедура проведена для оператора, приводящего полное ядро БФКЛ в СГП к квазиконформному виду. Нахождение такой процедуры является актуальной задачей, так как она позволяет сравнивать величины, полученные в подходах БФКЛ и ВЭОР.

Цель работы

Целью данной работы является решение актуальных задач квантовой хромодинамики в Реджевском пределе: построение уравнений эволюции для барионной вильсоновской петли в ГЛП и СГЛП, квадрупольного и дважды дипольного операторов в СГЛП, решение дипольного уравнения в СГЛП для рассеяния вперед, вычисление импакт факторов дифракционного фоторождения двух струй в СГП, трех струй в ГП, легкого векторного мезона в СГП, построение процедуры восстановления полной формы калибровочно инвариантных операторов по их мебиусовской форме.

Личный вклад автора

Личное участие автора в получении результатов, составляющих основу диссертации, является основным и определяющим. Им выполнены все расчеты, предложены идеи о возможности построения уравнения эволюции для барионного оператора в замкнутом виде, построения решения уравнения БФКЛ в СГЛП для рассеяния вперед как уравнения в частных производных.

Научная новизна

Впервые получено уравнение эволюции для БВП в замкнутом виде. Впервые получены уравнения эволюции для БВП, квадрупольного и дважды дипольного операторов в СГЛП, их квазиконформные формы, линеаризованные формы уравнений эволюции БВП и дипольного оператора в СГЛП в оддеронном канале, решение дипольного уравнения в СГЛП для рассеяния вперед в пространстве собственных функций борновского ядра. Впервые построены импакт факторы переходов виртуального фотона в две струи в СГП, в три струи в ГП, в легкий, продольно поляризованный векторный мезон в СГП для произвольной начальной поляризации и виртуальности фотона и произвольной передачи импульса. Впервые построена процедура восстановления полной формы калибровочно инвариантных операторов по их мебиусовской форме.

Научная и практическая ценность

Связная часть ядра уравнения эволюции для трех вильсоновских линий, вычисленная в данной работе, в виде неотъемлемой составной части уже вошла в иерархию Балицкого и гамильтониан JIMWLK в СГП, которые используются для анализа любых полужестких процессов в рамках этих подходов. Импакт фактор для рождения двух струй в СГП может использоваться для вычисления сечения дифракционного фоторождения двух струй на ZEUS. Метод восстановления полной формы калибровочно инвариантных операторов по их мебиусовской форме был использован для построения полной формы оператора, приводящего ядро БФКЛ в СГЛП к квазиконформному виду. Уравнение эволюции для БВП позволит описывать протон наряду с диполем в рамках ВЭОР. Уравнения эволюции для квадрупольного и дважды дипольного операторов необходимы для анализа более сложных чем диполь компонент в процессах ГНР и ГНДР, например при дифракционном фоторождении 4 частиц. Уравнение эволюции для квадрупольного оператора также необходимо для изучения глюонной плотности Вайцзеккера - Вильямса. Импакт факторы дифракционного фоторождения необходимы для описания дифракционных процессов на HERA, LHC в ультрапериферической кинематике, EIC, LHeC.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Уравнение эволюции для барионной вильсоновской петли в ГЛП и СГЛП.

2. Уравнения эволюции для квадрупольного и дважды дипольного операторов в СГЛП.

3. Решение уравнения БФКЛ в СГЛП для рассеяния вперед.

4. Импакт фактор эксклюзивного дифракционного фоторождения двух струй в СГП.

5. Импакт фактор эксклюзивного дифракционного фоторождения трех струй в ГП.

6. Импакт фактор эксклюзивного дифракционного фоторождения легкого продольно поляризованного векторного мезона в СГП.

7. Алгоритм получения полной формы калибровочно инвариантных операторов по их мебиусовской форме.

8. Полная и мебиусовская формы оператора, приводящего полное ядро БФКЛ в СГП к квазиконформному виду.

Апробация работы

Материалы работы опубликованы в ведущих зарубежных и российских научных журналах и неоднократно докладывались на международных конференциях и семинарах, в частности: Frontiers in QCD (Сиэттл, США, 2011), Low x workshop (Эйлат, Израиль, 2013), Hadron Physics: Challenge to Holography (Натал, Бразилия, 2013), A colorful journey: from Hadrons to Quark Gluon Plasma (Фрежюс, Франция, 2013), MOGRAN 16 (Уфа, Россия, 2013), High Energy Physics in the LHC Era (Вальпараисо, Чили, 2013), Excited QCD 2014 (Сараево, Босния и Герцеговина, 2014), Scattering Amplitudes & Multi-Regge Limit 2014 (Мадрид, Испания, 2014), Correlations between partons in nucleons (Орсэ, Франция, 2014), DIS2015 (Даллас, США, 2015), PHOTON2015 (Новосибирск, Россия, 2015), Diffractive and Electromagnetic Processes at High Energies (Бад-Хоннеф, Германия, 2015), Physics

Opportunities at an ElecTron-Ion Collider (Палезо, Франция, 2015), Resummation, Evolution, Factorization 2015 (Гамбург, Германия, 2015), 8th International Conference on the Exact Renormalization Group (Триест, Италия, 2016), Resummation, Evolution, Factorization 2016 (Антверпен, Бельгия, 2016), 2017 International Summer Workshop on Reaction Theory (Блуммингтон, США, 2017), IV Russian-Spanish congress: Particle, Nuclear, Astroparticle Physics and Cosmology (Дубна, Россия, 2017), Phenomenology of Hot and Dense Matter for Future Accelerators (Прага, Чехия, 2018) и других.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и шести приложений. Полный объем диссертации составляет 193 страницы с 7 рисунками. Список литературы содержит 104 наименования.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель, обсуждены научная новизна и практическая значимость представляемой работы, дан краткий обзор современного состояния области исследований и представлены выносимые на защиту результататы.

В первой главе с помощью метода ВЭОР [16] выведено уравнение эволюции по быстроте для БВП

$$B_{123}^{\eta} \stackrel{def}{=} U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 = \varepsilon^{i'j'h'} \varepsilon_{ijh} U\left(\vec{z}_1, \eta\right)_{i'}^{i} U\left(\vec{z}_2, \eta\right)_{j'}^{j} U\left(\vec{z}_3, \eta\right)_{h'}^{h}, \tag{1}$$

описывающей рассеяние барионов в поле ударной волны, созданной мишенью. Здесь $\vec{z}_i$ — это поперечные координаты кварков, вильсоновские линии

$$U_r = U\left(\vec{r}, \eta\right) = P e^{ig \int_{-\infty}^{+\infty} b_{\eta}^{-}(r^+, \vec{r}) dr^+}, \quad r^+ = \frac{r^0 + r^3}{2}, \quad b^- = b^0 - b^3, \tag{2}$$

где b_{η}^{-} – внешнее поле ударной волны, построенное только из медленных глюонов,

$$b_{\eta}^{-} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(pr)} b^-\left(p\right) \theta(e^{\eta} - |\frac{p^+}{p^+_{\substack{\text{налетающей}\\ \text{частицы}}}}|), \tag{3}$$

порог быстроты $\eta \leq Y_{\substack{\text{налетающей}\\ \text{частицы}}}$ отделяет быстрые глюоны, входящие в импакт факторы, от медленных, входящих в вильсоновские линии. Три линии в (1) соединяются в одной точке x при $z^+ = +\infty$ и в одной точке y при $z^+ = -\infty$. Уравнение эволюции имеет вид

$$\frac{\partial B_{123}^{\eta}}{\partial \eta} = \frac{\alpha_s 3}{4\pi^2} \int d\vec{z}_5 \left[\frac{\vec{z}_{12}^{\,2}}{\vec{z}_{51}^{\,2} \vec{z}_{52}^{\,2}} (-B_{123}^{\eta} + \frac{1}{6}(B_{155}^{\eta} B_{325}^{\eta} + B_{255}^{\eta} B_{315}^{\eta} - B_{355}^{\eta} B_{215}^{\eta})) \right.$$

$$+ (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3)\Big], \tag{4}$$

где $\vec{z}_{ij} = \vec{z}_i - \vec{z}_j$ и $i \leftrightarrow j$ означает замену $\vec{z}_i \leftrightarrow \vec{z}_j$. Как и уравнение БК, в которое оно переходит при совпадении координат двух кварков, это уравнение записано в замкнутом виде, то есть эволюция оператора B зависит только от B и произведений B, матричные элементы которых факторизуются в пределе больших N_c с точностью $\sim N_c^{-2} \sim 10\%$. Далее вычислен связный вклад в уравнение в СГП

$$\langle K_{NLO}^{conn} \otimes B_{123}^{\eta} \rangle|_{\text{рис.1}} = \frac{\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{z}_0 \int d\vec{z}_5 \Big\{ (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_5 \cdot (U_0 U_5^\dagger U_3)$$

$$+ (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5 \cdot (U_1 U_0^\dagger U_2) - \ (1 \leftrightarrow 3, 0 \leftrightarrow 5) \Big\} \ln \frac{\vec{z}_{02}^{\,2}}{\vec{z}_{25}^{\,2}}$$

$$\times \left[\frac{1}{2\vec{z}_{05}^{\,2}} \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{10}^{\,2}\vec{z}_{35}^{\,2}} + \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{50})}{\vec{z}_{10}^{\,2}\vec{z}_{50}^{\,2}} \frac{(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{25}^{\,2}\vec{z}_{35}^{\,2}} + \frac{(\vec{z}_{05}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{05}^{\,2}\vec{z}_{35}^{\,2}} \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{10}^{\,2}\vec{z}_{20}^{\,2}} - \frac{(\vec{z}_{20}\vec{z}_{10})}{\vec{z}_{02}{}^2\vec{z}_{01}{}^2} \frac{(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{25}^{\,2}\vec{z}_{35}{}^2} \right]$$

$$+ \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{z}_0 \left[\frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{10}^{\,2}\vec{z}_{20}^{\,2}} - \frac{(\vec{z}_{30}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{30}^{\,2}\vec{z}_{20}^{\,2}} \right] \ln \frac{\vec{z}_{30}^{\,2}}{\vec{z}_{31}^{\,2}} \ln \frac{\vec{z}_{10}^{\,2}}{\vec{z}_{31}^{\,2}}$$

$$\times (B_{100}B_{320} - B_{300}B_{210}) + (2 \leftrightarrow 1) + (2 \leftrightarrow 3). \tag{5}$$

Используя эти формулы и выражения для эволюции 1 и 2 вильсоновских линий в СГП, известные по вычислению ядра БК, было получено полное ядро для эволюции БВП в СГП

$$\langle K_{NLO} \otimes B_{123} \rangle = -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \ \Big(\mathbf{G}_{finite} + n_f \mathbf{G}_{finite}^q \Big) - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 \ \mathbf{G}^{q\prime}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{G}_{finite} = \{ \tilde{L}_{12} \left(U_0 U_5{}^\dagger U_2\right) \cdot \left(U_1 U_0{}^\dagger U_5\right) \cdot U_3$$

$$+ L_{12} \Big[\left(U_0 U_5{}^\dagger U_2\right) \cdot \left(U_1 U_0{}^\dagger U_5\right) \cdot U_3 + tr\left(U_0 U_5{}^\dagger\right) \left(U_1 U_0{}^\dagger U_2\right) \cdot U_3 \cdot U_5$$

$$- \frac{3}{4} [B_{155}B_{235} + B_{255}B_{135} - B_{355}B_{125}] + \frac{1}{2} B_{123} \Big] + (M_{13} - M_{12} - M_{23} + M_2^{13})$$

$$\times \left[\left(U_0 U_5{}^\dagger U_3\right) \cdot \left(U_2 U_0{}^\dagger U_1\right) + \left(U_1 U_0{}^\dagger U_2\right) \cdot \left(U_3 U_5{}^\dagger U_0\right) \right] \cdot U_5$$

$$+ (\text{ все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \} + (0 \leftrightarrow 5). \tag{7}$$

$$\mathbf{G}_{finite}^q = \frac{1}{2} \Big\{ \Big(\frac{1}{3} (U_1 U_0{}^\dagger U_5 + U_5 U_0{}^\dagger U_1) \cdot U_2 \cdot U_3 - \frac{1}{9} B_{123} tr(U_0{}^\dagger U_5)$$

$$+ (U_1 U_0{}^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + \frac{1}{6} B_{123} - \frac{1}{4} (B_{013}B_{002} + B_{001}B_{023} - B_{012}B_{003})$$

$$+ \ (1 \leftrightarrow 2) \Big) + (0 \leftrightarrow 5) \Big\} L_{12}^q + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3). \tag{8}$$

$$\mathbf{G}^{q\prime}=\frac{1}{2}\left[\frac{\vec{r}_{13}^{\,2}}{\vec{r}_{10}^{\,2}\vec{r}_{30}^{\,2}}-\frac{\vec{r}_{32}^{\,2}}{\vec{r}_{30}^{\,2}\vec{r}_{20}^{\,2}}\right]\ln\frac{\vec{r}_{20}^{\,2}}{\vec{r}_{21}^{\,2}}\ln\frac{\vec{r}_{10}^{\,2}}{\vec{r}_{21}^{\,2}}\left(B_{100}B_{320}-B_{200}B_{310}\right) \tag{9}$$
$$-\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{10}^{\,2}\vec{r}_{20}^{\,2}}\ln\frac{\vec{r}_{10}^{\,2}}{\vec{r}_{12}^{\,2}}\ln\frac{\vec{r}_{20}^{\,2}}{\vec{r}_{12}^{\,2}}\left(9B_{123}-\frac{1}{2}\left[2\left(B_{100}B_{320}+B_{200}B_{130}\right)-B_{300}B_{120}\right]\right)$$
$$+\frac{\beta}{2}\left[\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}^{\,2}}{\vec{r}_{02}^{\,2}}\right)\left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^{\,2}}-\frac{1}{\vec{r}_{01}^{\,2}}\right)-\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{01}^{\,2}\vec{r}_{02}^{\,2}}\ln\left(\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\tilde{\mu}^2}\right)\right]$$
$$\times\left(\frac{3}{2}(B_{100}B_{230}+B_{200}B_{130}-B_{300}B_{210})-9B_{123}\right)+(1\leftrightarrow 3)+(2\leftrightarrow 3).$$

Здесь $\beta=\left(\frac{11}{3}-\frac{2}{3}\frac{n_f}{3}\right)$,

$$\tilde{L}_{12}=\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{8}\left[\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}-\frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}-\frac{1}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}\right]\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}{\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}\right),$$

$$M_{12}=\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{16}\left[\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}-\frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}-\frac{1}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}\right]\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}{\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\right),$$

$$M_2^{13}=\frac{1}{4\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}\left(\frac{\vec{r}_{12}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}-\frac{\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}-\frac{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{05}{}^2}+\frac{\vec{r}_{13}{}^2}{\vec{r}_{05}{}^2}\right)\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2}{\vec{r}_{25}{}^2}\right),$$

$$L_{12}=\frac{1}{2\vec{r}_{05}{}^4}+\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}{\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}\right)\left[\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{8\vec{r}_{05}{}^2}\left(\frac{1}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}-\frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2-\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}$$
$$\left.\times\left(-\frac{\vec{r}_{12}{}^4}{8}\left(\frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}+\frac{1}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}\right)+\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{05}{}^2}-\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2+\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}{4\vec{r}_{05}{}^4}\right)\right],$$

$$L_{12}^q=\frac{1}{\vec{r}_{05}{}^4}\left\{\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2+\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2-\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}{2(\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2-\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2)}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\right)-1\right\},$$

$$\beta\ln\frac{1}{\tilde{\mu}^2}=\left(\frac{11}{3}-\frac{2}{3}\frac{n_f}{3}\right)\ln\left(\frac{\mu^2}{4e^{2\psi(1)}}\right)+\frac{67}{9}-\frac{\pi^2}{3}-\frac{10}{9}\frac{n_f}{3}, \tag{10}$$

и μ это масштаб перенормировки в схеме $\overline{MS}$. Это ядро не является квазиконформным, так как члены с функциями M и вклад $\mathbf{G}^{q\prime}$ неконформны. Для получения квазиконформного ядра был использован рецепт перехода к конформным или составным операторам [19]

$$O^{conf}=O+\frac{1}{2}\frac{\partial O}{\partial\eta}\Bigg|_{\frac{\vec{r}_{mn}^{\,2}}{\vec{r}_{im}^{\,2}\vec{r}_{in}^{\,2}}\to\frac{\vec{r}_{mn}^{\,2}}{\vec{r}_{im}^{\,2}\vec{r}_{in}^{\,2}}\ln\left(\frac{\vec{r}_{mn}^{\,2}a}{\vec{r}_{im}^{\,2}\vec{r}_{in}^{\,2}}\right)}, \tag{11}$$

то есть построено уравнение эволюции для B^{conf}, которое является квазиконформным

$$\frac{\partial B_{123}^{conf}}{\partial\eta} = \frac{\alpha_s\left(\mu^2\right)}{8\pi^2}\int d\vec{r}_0\left[((B_{100}B_{320}+B_{200}B_{310}-B_{300}B_{210})-6B_{123})^{conf}\right.$$
$$\times\left(\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{01}^{\,2}\vec{r}_{02}^{\,2}}-\frac{3\alpha_s}{4\pi}\beta\left[\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}^{\,2}}{\vec{r}_{02}^{\,2}}\right)\left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^{\,2}}-\frac{1}{\vec{r}_{01}^{\,2}}\right)-\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{01}^{\,2}\vec{r}_{02}^{\,2}}\ln\left(\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\tilde{\mu}^2}\right)\right]\right)$$
$$\left.+\ (1\leftrightarrow 3)+(2\leftrightarrow 3)\right]$$

$$-\frac{\alpha_s^2}{32\pi^3}\int d\vec{r}_0\left(B_{003}B_{012}\left[\frac{\vec{r}_{32}{}^2}{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}\ln^2\left(\frac{\vec{r}_{32}{}^2\vec{r}_{10}{}^2}{\vec{r}_{13}{}^2\vec{r}_{20}{}^2}\right)-\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}\ln^2\left(\frac{\vec{r}_{12}{}^2\vec{r}_{30}{}^2}{\vec{r}_{13}{}^2\vec{r}_{20}{}^2}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\ (\text{все 5 перестановок } 1\leftrightarrow 2\leftrightarrow 3)\right)$$
$$-\frac{\alpha_s^2 n_f}{16\pi^4}\int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5\left[\left\{\left(\frac{1}{3}(U_1U_0{}^\dagger U_5+U_5U_0{}^\dagger U_1)\cdot U_2\cdot U_3-\frac{1}{9}B_{123}tr(U_0{}^\dagger U_5)\right.\right.\right.$$
$$+(U_1U_0{}^\dagger U_2)\cdot U_3\cdot U_5+\frac{1}{6}B_{123}-\frac{1}{4}(B_{013}B_{002}+B_{001}B_{023}-B_{012}B_{003})$$
$$\left.\left.\left.+\ \ (1\leftrightarrow 2)\right)+(0\leftrightarrow 5)\right\}L_{12}^q+(1\leftrightarrow 3)+(2\leftrightarrow 3)\right]$$
$$-\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4}\int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5\ \left(\left\{\tilde{L}_{12}^C\left(U_0U_5{}^\dagger U_2\right)\cdot\left(U_1U_0{}^\dagger U_5\right)\cdot U_3\right.\right.$$
$$+L_{12}^C\left[\left(U_0U_5{}^\dagger U_2\right)\cdot\left(U_1U_0{}^\dagger U_5\right)\cdot U_3+tr\left(U_0U_5{}^\dagger\right)\left(U_1U_0{}^\dagger U_2\right)\cdot U_3\cdot U_5\right.$$
$$\left.-\ \frac{3}{4}[B_{155}B_{235}+B_{255}B_{135}-B_{355}B_{125}]+\frac{1}{2}B_{123}\right]$$

$$+M_{12}^C\left[\left(U_0U_5{}^\dagger U_3\right)\cdot\left(U_2U_0{}^\dagger U_1\right)\cdot U_5+\left(U_1U_0{}^\dagger U_2\right)\cdot\left(U_3U_5{}^\dagger U_0\right)\cdot U_5\right]$$
$$\left.\left.+\ \ (\text{все 5 перестановок } 1\leftrightarrow 2\leftrightarrow 3)\right\}+(0\leftrightarrow 5)\right), \tag{12}$$

где

$$L_{12}^C=L_{12}+\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{4\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}{\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}\right)+\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{4\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}{\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}\right),$$

$$\tilde{L}_{12}^C=\tilde{L}_{12}+\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{4\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}{\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}\right)-\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{4\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}{\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}\right),$$

$$M_{12}^C = \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{16\vec{r}_{05}{}^2}\left(\frac{1}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{35}{}^4}{\vec{r}_{03}{}^4\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\right) + \frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{03}{}^4\vec{r}_{05}{}^4\vec{r}_{12}{}^4\vec{r}_{25}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^6\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{35}{}^4}\right)\right)$$
$$+ \frac{\vec{r}_{23}{}^2}{16\vec{r}_{05}{}^2}\left(\frac{1}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^4\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{25}{}^6\vec{r}_{35}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{05}{}^4\vec{r}_{15}{}^4\vec{r}_{23}{}^4}\right) + \frac{1}{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{15}{}^4}{\vec{r}_{01}{}^4\vec{r}_{25}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}\right)\right)$$
$$+ \frac{\vec{r}_{13}{}^2}{16\vec{r}_{05}{}^2}\left(\frac{1}{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^4\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{25}{}^4}\right) + \frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^4\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{25}{}^4}\right)\right)$$
$$+ \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{8\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}\left(\frac{\vec{r}_{03}{}^2}{\vec{r}_{05}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{25}{}^4}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{12}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}\right) + \frac{\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{25}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{12}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{23}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\right)\right)$$
$$+ \frac{\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}{8\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{25}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{23}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^4\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}\right). \tag{13}$$

Это уравнение было линеаризовано. При этом в C-четном канале оно свелось к трем уравнениям БФКЛ, а в C-нечетном, т.е. для оператора

$$B_{123}^{-} = B_{123}^{\eta} - B_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}}^{\eta} = B_{123}^{\eta} - U_1^{\dagger}\cdot U_2^{\dagger}\cdot U_3^{\dagger} \tag{14}$$

приняло следующий вид

$$\frac{\partial B_{123}^{-conf}}{\partial \eta} = \frac{3\alpha_s\left(\mu^2\right)}{4\pi^2}\int d\vec{r}_0\left[\left(B_{100}^{-conf} + B_{320}^{-conf} + B_{200}^{-conf} + B_{310}^{-conf}\right.\right. \tag{15}$$
$$\left. - B_{300}^{-conf} - B_{210}^{-conf} - B_{123}^{-conf}\right)\left(\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{01}^{\,2}\vec{r}_{02}^{\,2}}\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{3\alpha_s}{4\pi}\beta\left[\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}^{\,2}}{\vec{r}_{02}^{\,2}}\right)\left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^{\,2}} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^{\,2}}\right) - \frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{01}^{\,2}\vec{r}_{02}^{\,2}}\ln\left(\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\tilde{\mu}^2}\right)\right]\right)\right) + (1\leftrightarrow 3) + (2\leftrightarrow 3)\right]$$

$$- \frac{\alpha_s^2 n_f}{24\pi^4}\int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5\ \left\{\left(2B_{015}^{-} - B_{001}^{-} - B_{155}^{-}\right)\left(L_{12}^q + L_{13}^q - 2L_{32}^q\right)\right.$$
$$\left. + (1\leftrightarrow 3) + (1\leftrightarrow 2)\right\}$$
$$- \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^3}\int d\vec{r}_0\left(\tilde{F}_{100}B_{100}^{-} + \tilde{F}_{230}B_{230}^{-} + (1\leftrightarrow 3) + (1\leftrightarrow 2)\right)$$
$$+ \frac{27\alpha_s^2}{4\pi^2}\zeta(3)(3 - \delta_{23} - \delta_{13} - \delta_{21})B_{123}^{-} - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^4}\int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5$$
$$\times\left(2F_0 B_{050}^{-} + \left\{F_{150} + (0\leftrightarrow 5)\right\}B_{150}^{-} + (\text{все 5 перестановок } 1\leftrightarrow 2\leftrightarrow 3)\right).$$

Здесь $\delta_{ij} = 1$, если $\vec{r}_i = \vec{r}_j$, и $\delta_{ij} = 0$ в противном случае,

$$F_0 = \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{2\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\left(\frac{\vec{r}_{25}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{05}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{35}{}^4}{\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{25}{}^2\vec{r}_{03}{}^4}\right) - \frac{\vec{r}_{13}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{03}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{13}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{12}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2\vec{r}_{35}{}^2}{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{05}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}\right)\right) - (0\leftrightarrow 5).$$

$$
\begin{aligned}
F_{150} &= \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{12}{}^2\vec{r}_{35}{}^4}{\vec{r}_{03}{}^4\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{25}{}^4}\right)\\
&- \frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{15}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{25}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}{\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}\right) - \frac{\vec{r}_{23}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{15}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{12}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\right)\\
&+ \frac{\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{35}{}^2}{\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}\right) + \frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{13}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{35}{}^4}{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{05}{}^2\vec{r}_{13}{}^2\vec{r}_{25}{}^2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{100} &= \left(\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2} - \frac{\vec{r}_{13}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{03}{}^2} - \frac{2\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{03}{}^2}\right)\ln^2\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{13}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}\right)\\
&+ \frac{\vec{r}_{23}{}^2}{2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{03}{}^2}\ln^2\left(\frac{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{13}{}^2}\right) + \tilde{S}_{123} I\left(\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}, \frac{\vec{r}_{13}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{03}{}^2}, \frac{\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{03}{}^2}\right) + (2 \leftrightarrow 3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{230} &= \left(\frac{2\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2} - \frac{\vec{r}_{23}{}^2}{2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{03}{}^2}\right)\ln^2\left(\frac{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{13}{}^2}\right) + \left(\frac{\vec{r}_{13}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{03}{}^2} - \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}\right)\\
&\times \ln^2\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{13}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}\right) - \tilde{S}_{123} I\left(\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}, \frac{\vec{r}_{13}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{03}{}^2}, \frac{\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{03}{}^2}\right) + (2 \leftrightarrow 3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_{123} &= \frac{\vec{r}_{12}{}^4}{\vec{r}_{01}{}^4\vec{r}_{02}{}^4} + \frac{\vec{r}_{13}{}^4}{\vec{r}_{01}{}^4\vec{r}_{03}{}^4} + \frac{\vec{r}_{23}{}^4}{\vec{r}_{02}{}^4\vec{r}_{03}{}^4}\\
&- \frac{2\vec{r}_{13}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^4\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{03}{}^2} - \frac{2\vec{r}_{23}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^4\vec{r}_{03}{}^2} - \frac{2\vec{r}_{13}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{03}{}^4},
\end{aligned}
$$

$$
I(a,b,c) = \int_0^1 \frac{dx}{a(1-x)+bx-cx(1-x)}\ln\left(\frac{a(1-x)+bx}{cx(1-x)}\right). \tag{16}
$$

Было показано, что все приведенные выше уравнения имеют правильный дипольный предел, то есть переходят в уравнение БК при совпадении координат двух из трех кварков, так как $B_{123} \underset{r_3 \to r_2}{\to} 2tr(U_1 U_2^\dagger)$. В этом пределе уравнение (15) переходит в уравнение для C-нечетной части дипольного оператора или функции Грина оддерона, взаимодействующего с диполем. Его правая часть содержит БВП с тремя различными координатами, то есть не выражается только через дипольные операторы. Можно сказать, что в C-нечетном канале БВП является оператором, на которые раскладывается произвольный оператор в линейном пределе, также как в C-четном канале таким оператором является диполь. Такое разложение продемонстрировано на примере квадрупольного оператора.

Аналогично были выведены и приведены к квазиконформному виду уравнения эволюции для квадрупольного и дважды дипольного операторов $tr(U_1 U_2^\dagger U_3 U_4^\dagger)$ и $tr(U_1 U_2^\dagger) tr(U_3 U_4^\dagger)$.

Далее в пространстве собственных функций борновского ядра $\langle\vec{r}|n\nu\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}e^{in\phi}(\vec{r}^{\,2})^{-\frac{1}{2}+i\nu}$ уравнение БФКЛ для рассеяния вперед в СГЛП было записано как уравнение в частных производных для

$$\mathbf{G} = \chi(n,\nu)\langle n\nu|\hat{G}\,\hat{\vec{q}}^{\,-4}|\bar{B}'B\rangle \tag{17}$$

в виде

$$\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial Y} - i\frac{\bar{\alpha}^2\beta}{4}\chi(n,\nu)\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\nu} = \left[\bar{\alpha}\chi(n,\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2}{4}\delta(n,\nu)\right]\mathbf{G} \tag{18}$$

с граничным условием

$$\mathbf{G}_0\,(n,\nu) = \mathbf{G}|_{Y=Y_0} = \chi(n,\nu)\Phi_B\,(n,\nu)\,, \tag{19}$$

и было получено его решение

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0(n, F^{-1}(F\,(v) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i(Y-Y_0)}{4}))$$

$$\times e^{-\frac{4i}{\bar{\alpha}\beta}\left(F^{-1}\left(F(\nu)+\frac{\bar{\alpha}^2\beta i}{4}(Y-Y_0)\right)-\nu\right)} e^{-\frac{i}{\beta}\int_\nu^{F^{-1}\left(F(\nu)+\frac{\bar{\alpha}^2\beta i}{4}(Y-Y_0)\right)}\frac{\delta(n,l)}{\chi(n,l)}dl}. \tag{20}$$

Здесь χ и δ — это собственные числа ядра в ГП и СГП, $\hat{G}$ и $\hat{\vec{q}}^{\,-4}|\bar{B}'B\rangle$ — функция Грина и импакт фактор, определенные в соответствии с [20],

$$F(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu}\frac{dl}{\chi\,(n,l)}. \tag{21}$$

Это решение было разложено в СГЛП и рассмотрена его связь с другими подходами к решению данного уравнения.

Во второй главе методом ВЭОР вычислен импакт фактор фоторождения $q\bar{q}$ в произвольной кинематике. Он извлечен из матричного элемента электромагнитного тока в поле ударной волны

$$\frac{\delta(p_q^+ + p_{\bar{q}}^+ - p_\gamma^+)T^\alpha}{\sqrt{2p_{\bar{q}}^+}\sqrt{2p_q^+}\,(2\pi)^{D-3}} = i\int dy_0 e^{-ip_\gamma y_0}\delta_l^n\langle 0|T(b_{p_{\bar{q}}}^l a_{p_q n}\overline{\psi}_{y_0}\gamma^\alpha\psi_{y_0}e^{i\int\mathcal{L}_i dz})|0\rangle_{sw}, \tag{22}$$

где a и b — операторы уничтожения кварка и антикварка, $p_q, p_{\bar{q}}, p_\gamma$ — импульсы фотона, кварка и антикварка, δ_l^n — проектор на цветовой синглет. Матричный элемент представим в виде свертки операторов вильсоновских линий и импакт факторов

$$T^\alpha = T_0^\alpha + T_1^\alpha, \tag{23}$$

$$T_0^\alpha = \int d^dp_{1\perp}d^dp_{2\perp}\delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp})\Phi_0^\alpha[tr(U_1U_2^\dagger) - N_c](p_{1\perp}, p_{2\perp}). \tag{24}$$

$$T_1^\alpha = \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp}$$
$$\times \left\{ \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp}) \Phi_1^\alpha \frac{N_c^2 - 1}{N_c} [tr(U_1 U_2^\dagger) - N_c](p_{1\perp}, p_{2\perp}) \right.$$
$$+ \int \frac{d^d p_{3\perp}}{(2\pi)^d} \delta(p_{q1} + p_{\bar{q}2} - p_{\gamma\perp} - p_{3\perp}) \Phi_2^\alpha$$
$$\left. \times \ [tr(U_1 U_3^\dagger) tr(U_3 U_2^\dagger) - N_c tr(U_1 U_2^\dagger)](p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \right\}. \tag{25}$$

В ГП импакт факторы имеют вид

$$\Phi_0^+ = -\frac{p_\gamma^+}{p_\gamma^-} \Phi_0^- = \frac{2x\bar{x}p_\gamma^+}{\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2} (\overline{u}_{p_q} \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}}), \tag{26}$$
$$\Phi_0^i = \frac{\overline{u}_{p_q}((1-2x)p_{q1\perp}^i + \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1\perp}, \gamma^i])\gamma^+ v_{p_{\bar{q}}}}{\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2}, \tag{27}$$

где $x \equiv x_q$ и $\bar{x} = 1 - x = x_{\bar{q}}$ — доли продольного импульса фотона, уносимые кварком и антикварком, Q — виртуальность фотона. В СГП

$$\Phi_1^\alpha = \frac{S_V}{2} \Phi_0^\alpha + \Phi_{1R}^\alpha\,, \tag{28}$$

где сингулярный член

$$\frac{S_V}{2} = \left[\ln\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) - \frac{3}{2} \right] \left[\ln\left(\frac{x\bar{x}\mu^2}{(x\vec{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\vec{p}_q)^2} \right) - \frac{1}{\epsilon} \right]$$
$$+ i\pi \ln\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) - \frac{\pi^2}{6} + 3\,, \tag{29}$$

и регулярный член

$$\Phi_{1R}^+ = \frac{3}{2}\Phi_0^+ \ln\left(\frac{x^2\bar{x}^2\mu^4 Q^2}{(x\vec{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\vec{p}_q)^2 \left(\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2\right)^2} \right) + \bar{u}_{p_q}(C_\parallel^4 + C_{1\parallel}^5 + C_{1\parallel}^6) v_{p_{\bar{q}}}\,, \tag{30}$$

$$\Phi_{1R}^i = \frac{3}{2}\Phi_0^i \left[\ln\left(\frac{x\bar{x}\mu^4}{(x\vec{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\vec{p}_q)^2 ({\vec{p}_{q1}}^{\,2} + x\bar{x}Q^2)} \right) - \frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^{\,2}} \ln\left(\frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2} \right) \right]$$
$$+ \bar{u}_{p_q}(C_\perp^{4i} + C_{1\perp}^{5i} + C_{1\perp}^{6i}) v_{p_{\bar{q}}}, \tag{31}$$

$$\Phi_2^+ = 2p_\gamma^+(\bar{u}_{p_q}\gamma^+ v_{p_{\bar{q}}})\left\{\frac{x\bar{x}(\vec{p}_3^{\,2} - \vec{p}_{\bar{q}2}^{\,2} - \vec{p}_{q1}^{\,2} - 2x\bar{x}Q^2)}{(\vec{p}_{\bar{q}2}^{\,2} + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^{\,2}}\right. \tag{32}$$

$$\times \ln\left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}}\right)\ln\left(\frac{(\vec{p}_{\bar{q}2}^{\,2} + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^{\,2}}\right)$$

$$\left. + \left(\frac{-2x\bar{x}}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^{\,2}}\ln\left(\frac{\bar{x}}{e^\eta}\right)\ln\left(\frac{\vec{p}_3^{\,2}}{\mu^2}\right) + (q \leftrightarrow \bar{q})\right)\right\} + \bar{u}_{p_q}(C_{2\parallel}^5 + C_{2\parallel}^6)v_{p_{\bar{q}}},$$

$$\Phi_2^i = \left\{\overline{u}_{p_q}(p_{q1\perp}^i(1-2x) + \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1\perp},\, \gamma_\perp^i])\gamma^+ v_{p_{\bar{q}}}\left(\frac{-2}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^{\,2}}\ln\left(\frac{\bar{x}}{e^\eta}\right)\ln\left(\frac{\vec{p}_3^{\,2}}{\mu^2}\right)\right.\right.$$

$$+\ln\left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}}\right)\left[\frac{\ln\left(\frac{\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2}{x\bar{x}Q^2}\right)}{\vec{p}_{q1}^{\,2}} - \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^{\,2} + x\bar{x}Q^2}{\left(\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2\right)\left(\vec{p}_{\bar{q}2}^{\,2} + x\bar{x}Q^2\right) - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^{\,2}}\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\ \ln\left(\frac{\left(\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2\right)\left(\vec{p}_{\bar{q}2}^{\,2} + x\bar{x}Q^2\right)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^{\,2}}\right)\right]\right) + (q \leftrightarrow \bar{q})\right\} + \bar{u}_{p_q}(C_{2\perp}^{5i} + C_{2\perp}^{6i})v_{p_{\bar{q}}}.$$

Здесь η — это параметр разделения быстрот между импакт фактором и вильсоновскими линиями, C — конечные функции, вычисленные полностью или представленные в виде однократного интеграла без особенностей. Так как фотон в начальном состоянии может находиться в различных спиновых состояниях, была построена матрица плотности

$$d\sigma_{JI} = \begin{pmatrix} d\sigma_{LL} & d\sigma_{LT} \\ d\sigma_{TL} & d\sigma_{TT} \end{pmatrix}, \qquad d\sigma_{TL} = d\sigma_{LT}^*. \tag{33}$$

Каждый элемент этой матрицы имеет борновский вклад $d\sigma_0$, вклад СГП $d\sigma_1$ с двумя дипольными операторами $(tr(U_1U_2^\dagger) - N_c)$ и вклад СГП $d\sigma_2$ с дипольным и дважды дипольным $(tr(U_1U_3^\dagger)tr(U_3U_2^\dagger) - N_c tr(U_1U_2^\dagger))$ операторами:

$$d\sigma_{JI} = d\sigma_{0JI} + d\sigma_{1JI} + d\sigma_{2JI}. \tag{34}$$

Борновское сечение имеет вид

$$d\sigma_{0JI} = \frac{\alpha_{\mathrm{em}}Q_q^2}{(2\pi)^{4d}N_c}\frac{\left(p_0^-\right)^2}{4x\bar{x}s^2}dxd\bar{x}d^dp_{q\perp}d^dp_{\bar{q}\perp}\delta\left(1-x-\bar{x}\right)\varepsilon_{I\beta}\varepsilon_{J\gamma}^*$$

$$\times\int d^dp_{1\perp}d^dp_{2\perp}d^dp_{1'\perp}d^dp_{2'\perp}\delta\left(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp}\right)\delta\left(p_{11'\perp} + p_{22'\perp}\right)$$

$$\times\,\Phi_0^\beta\left(p_{1\perp},\, p_{2\perp}\right)\Phi_0^{\gamma*}\left(p_{1'\perp},\, p_{2'\perp}\right)\mathbf{F}\left(\frac{p_{12\perp}}{2}\right)\mathbf{F}^*\left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}\right) \tag{35}$$

с

$$\sum_{helicities} \Phi_0^+ \Phi_0^+ = \frac{32(p_\gamma^+)^4 x^3 \bar{x}^3}{(\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1'}^{\,2} + x\bar{x}Q^2)}, \tag{36}$$

$$\sum_{helicities} \Phi_0^+ \Phi_0^{i*} = \frac{16(p_\gamma^+)^3 x^2 \bar{x}^2 p^i_{q1'\perp}(1-2x)}{(\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1'}^{\,2} + x\bar{x}Q^2)}, \tag{37}$$

$$\sum_{helicities} \Phi_0^i \Phi_0^{k*} = \frac{8(p_\gamma^+)^2 x\bar{x}[(1-2x)^2 g_\perp^{ri} g_\perp^{lk} - g_\perp^{rk} g_\perp^{li} + g_\perp^{rl} g_\perp^{ik}] p_{q1\perp r} p_{q1'\perp l}}{(\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1'}^{\,2} + x\bar{x}Q^2)}. \tag{38}$$

Здесь ε_I — это векторы поляризации фотона, p_0 — импульс протона, Q_q — заряд кварка в единицах заряда электрона. Параметризация матричных элементов вильсоновских линий в поле протона имеет вид

$$\mathbf{F}(p_\perp) \equiv \int d^d z_\perp e^{i(z_\perp p_\perp)} F(z_\perp), \tag{39}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(q_\perp, p_\perp) \equiv \int d^d z_\perp d^d x_\perp e^{i(p_\perp x_\perp) + i(z_\perp q_\perp)} \tilde{F}(z_\perp, x_\perp), \tag{40}$$

$$\frac{\langle P'(p_0')|T(tr(U_{\frac{z_\perp}{2}} U^\dagger_{-\frac{z_\perp}{2}}) - N_c)|P(p_0)\rangle}{2\pi} \equiv \delta(p_{00'}^-) F_{p_{0\perp} p'_{0\perp}}(z_\perp) \equiv \delta(p_{00'}^-) F(z_\perp),$$

$$\begin{aligned} &\langle P'(p_0')|T(tr(U_{\frac{z}{2}} U_x^\dagger) tr(U_x U^\dagger_{-\frac{z}{2}}) - N_c tr(U_{\frac{z}{2}} U^\dagger_{-\frac{z}{2}}))|P(p_0)\rangle \\ &\equiv 2\pi\delta(p_{00'}^-) \tilde{F}_{p_{0\perp} p'_{0\perp}}(z_\perp, x_\perp) \equiv 2\pi\delta(p_{00'}^-) \tilde{F}(z_\perp, x_\perp). \end{aligned} \tag{41}$$

Вклад СГП с 2 диполями

$$\begin{aligned} d\sigma_{1JI} = {} & \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \left(\frac{N_c^2 - 1}{N_c}\right) \frac{\alpha_{\rm em} Q_q^2}{(2\pi)^{4d} N_c} \frac{\left(p_0^-\right)^2}{4x\bar{x}s^2} dx d\bar{x} d^d p_{q\perp} d^d p_{\bar{q}\perp} \\ & \times \delta(1 - x - \bar{x}) \varepsilon_{I\beta} \varepsilon^*_{J\gamma} \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p_{1'\perp} d^d p_{2'\perp} \\ & \times \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp}) \mathbf{F}\left(\frac{p_{12\perp}}{2}\right) \mathbf{F}^*\left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}\right) \\ & \times \left[\Phi_1^\beta(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_0^{\gamma*}(p_{1'\perp}, p_{2'\perp}) + \Phi_0^\beta(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_1^{\gamma*}(p_{1'\perp}, p_{2'\perp})\right]. \end{aligned} \tag{42}$$

Чтобы выделить в этом вкладе конечную часть, необходимо заменить Φ_1 в (42) на Φ_{1R} из (28) и положить $\epsilon = 0$. Оставшаяся расходящаяся часть имеет вид

$$(d\sigma_{1JI})_{div} = \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \left(\frac{N_c^2 - 1}{2N_c}\right) (S_V + S_V^*) d\sigma_{0JI}. \tag{43}$$

В полном сечении фоторождения или сечении фоторождения 2 струй эта расходящаяся часть сокращается с вкладом реального рождения глюона. В сечении фоторождения мезона расходящаяся часть сечения фоторождения $q\bar{q}$ сокращается с вычитательным слагаемым, описывающим эволюцию амплитуды распределения. Вклад в СГП с дипольным и дважды дипольным операторами

$$
\begin{aligned}
d\sigma_{2JI} &= \alpha_s \frac{\alpha_{\rm em} Q_q^2}{(2\pi)^7 N_c} \frac{\left(p_0^-\right)^2}{4x\bar{x}s^2} dx d\bar{x} dp_{q\perp} dp_{\bar{q}\perp} \delta\left(1-x-\bar{x}\right) \varepsilon_{I\beta}\varepsilon^*_{J\gamma} \int dp_{1\perp} dp_{2\perp} \\
&\times dp_{1'\perp} dp_{2'\perp} dp_{3\perp} dp_{3'\perp} \delta\left(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{3\perp}\right) \delta\left(p_{11'\perp} + p_{22'\perp} + p_{33'\perp}\right) \\
&\times \left[\Phi_2^{\beta}\left(p_{1\perp},\, p_{2\perp},\, p_{3\perp}\right) \Phi_0^{\gamma *}\left(p_{1'\perp},\, p_{2'\perp}\right) \mathbf{F}^*\left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}\right) \tilde{\mathbf{F}}\left(\frac{p_{12\perp}}{2},\, p_{3\perp}\right) \delta\left(p_{3'\perp}\right)\right. \\
&\left. + \Phi_2^{\gamma *}\left(p_{1'\perp},\, p_{2'\perp},\, p_{3'\perp}\right) \Phi_0^{\beta}\left(p_{1\perp},\, p_{2\perp}\right) \mathbf{F}\left(\frac{p_{12\perp}}{2}\right) \tilde{\mathbf{F}}^*\left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2},\, p_{3'\perp}\right) \delta\left(p_{3\perp}\right)\right].
\end{aligned} \tag{44}
$$

Свертки $\Phi_2^{\gamma *}\Phi_0^{\beta}$ и $\Phi_1^{\gamma *}\Phi_0^{\beta}$ были вычислены для приведенных выше импакт факторов.

Аналогично вычислен импакт фактор фоторождения $q\bar{q}g$ в произвольной кинематике и построено сечение $\gamma^* P \to q\bar{q}gP$. Это сечение имеет вклад $d\sigma_3$ с двумя дипольными операторами, вклад $d\sigma_4$ с дипольным и дважды дипольным операторами и вклад $d\sigma_5$ с двумя дважды дипольными операторами

$$
d\sigma_{(q\bar{q}g)} = d\sigma_3 + d\sigma_4 + d\sigma_5. \tag{45}
$$

Вклад с двумя диполями имеет вид

$$
\begin{aligned}
d\sigma_{3JI} = \frac{\alpha_s}{\mu^{2\epsilon}} &\left(\frac{N_c^2-1}{N_c}\right) \frac{\alpha_{\rm em} Q_q^2}{2(2\pi)^{4d} N_c} \frac{(p_0^-)^2}{s^2 x_q x_{\bar{q}}} (\varepsilon_{I\alpha}\varepsilon^*_{J\beta}) \\
&\times dx_q\, dx_{\bar{q}}\, d^d p_{q\perp}\, d^d p_{\bar{q}\perp} \frac{dz d^d p_{g\perp}}{z(2\pi)^d} \delta(1-x_q-x_{\bar{q}}-z) \\
&\times \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p'_{1\perp} d^d p'_{2\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} + p_{g\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp}) \\
&\times \Phi_3^{\alpha}(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_3^{\beta *}(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}) \mathbf{F}\left(\frac{p_{12\perp}}{2}\right) \mathbf{F}^*\left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}\right),
\end{aligned} \tag{46}
$$

где $p_{g\perp}$ и z — поперечный импульс глюона и доля продольного импульса фотона, уносимая глюоном. Вклад с диполем и двойным диполем имеет вид

$$d\sigma_{4JI} = \frac{\alpha_s}{\mu^{2\epsilon}} \frac{\alpha_{\rm em} Q_q^2}{2(2\pi)^{4d} N_c} \frac{(p_0^-)^2}{s^2 x_q x_{\bar q}} (\varepsilon_{I\alpha} \varepsilon^*_{J\beta}) dx_q dx_{\bar q} d^d p_{q\perp} d^d p_{\bar q \perp} \frac{dz d^d p_{g\perp}}{z(2\pi)^d}$$
$$\times \delta(1 - x_q - x_{\bar q} - z) \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p'_{1\perp} d^d p'_{2\perp} \frac{d^d p_{3\perp} d^d p'_{3\perp}}{(2\pi)^d}$$
$$\times \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar q 2\perp} + p_{g3\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp} + p_{33'\perp})$$
$$\times \Big[\Phi_3^{\alpha}(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_4^{\beta *}(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}, p'_{3\perp}) \mathbf{F}\left(\frac{p_{12\perp}}{2}\right) \tilde{\mathbf{F}}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}, p'_{3\perp}\right) \delta(p_{3\perp})$$
$$+ \Phi_4^{\alpha}(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_3^{\beta *}(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}) \tilde{\mathbf{F}}\left(\frac{p_{12\perp}}{2}, p_{3\perp}\right) \mathbf{F}^*\left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}\right) \delta(p'_{3\perp}) \Big]. \quad (47)$$

Вклад с двумя дважды дипольными операторами имеет вид

$$d\sigma_{5JI} = \frac{\alpha_s}{\mu^{2\epsilon}} \frac{\alpha_{\rm em} Q_q^2}{2(2\pi)^{4d}} \frac{(p_0^-)^2}{s^2 x_q x_{\bar q}} \frac{(\varepsilon_{I\alpha} \varepsilon'_{J\beta})}{N_c^2 - 1} dx_q dx_{\bar q} d^d p_{q\perp} d^d p_{\bar q \perp} \frac{dz d^d p_{g\perp}}{z(2\pi)^d}$$
$$\times \delta(1 - x_q - x_{\bar q} - z) \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p'_{1\perp} d^d p'_{2\perp} \frac{d^d p_{3\perp} d^d p'_{3\perp}}{(2\pi)^{2d}}$$
$$\times \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar q 2\perp} + p_{g3\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp} + p_{33'\perp})$$
$$\times \Phi_4^{\alpha}(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_4^{\beta *}(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}, p'_{3\perp}) \tilde{\mathbf{F}}\left(\frac{p_{12\perp}}{2}, p_{3\perp}\right) \tilde{\mathbf{F}}^*\left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}, p'_{3\perp}\right). \quad (48)$$

Выражения для $\Phi_a \Phi_b^*$ выведены в D-мерном пространстве. В 4-мерном пространстве их можно использовать для вычисления сечения фоторождения трех струй.

На основе полученных выражений было построено сечение фоторождения 2 струй в конусном (cone) алгоритме в пределе малого параметра $R \ll 1$ [21]. По условию алгоритма две частицы формируют струю с импульсом равным сумме их импульсов, если для них обеих выполняется условие

$$\Delta\phi^2 + \Delta Y^2 < R^2, \quad (49)$$

где $\Delta\phi$ — это разность азимутальных углов частицы и струи, ΔY — это разность быстрот частицы и струи. При этом мягкие глюоны считаются не наблюдаемыми при

$$\omega_g = \frac{1}{2}\left(z p_\gamma^+ + \frac{\vec{p}_g^{\,2}}{z p_\gamma^+}\right) < E \ll p_\gamma^+, \quad (50)$$

где ω_g — это энергия излученного глюона, E — энергетическое разрешение детектора. Интегрирование по такому фазовому объему сокращает сингулярные члены (43) в сечении рождения $q\bar q$ (34), так что оно переходит в конечное сечение рождения струй после замены

$$S_V + S_V^* \to 4\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x_{\bar{j}}\vec{p}_j - x_j\vec{p}_{\bar{j}})^4}{x_{\bar{j}}^2 x_j^2 R^4 \vec{p}_{\bar{j}}^{\,2}\vec{p}_j^{\,2}}\right)\left(\ln\left(\frac{4E^2}{x_{\bar{j}}x_j(p_\gamma^+)^2}\right)+\frac{3}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \ln(8) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x_j}{x_{\bar{j}}}\right)\ln\left(\frac{x_j\vec{p}_{\bar{j}}^{\,2}}{x_{\bar{j}}\vec{p}_j^{\,2}}\right) + \frac{13-\pi^2}{2}\right], \tag{51}$$

$$(x, p_{q\perp}) \to (x_j, p_{j\perp}), \quad (\bar{x}, p_{\bar{q}\perp}) \to (x_{\bar{j}}, p_{\bar{j}\perp}), \tag{52}$$

где $x_j, p_{j\perp}$ $(x_{\bar{j}}, p_{\bar{j}\perp})$ — это доля продольного импульса и поперечный импульс, уносимый струей, образованной кварком (антикварком).

Импакт фактор фоторождения $q\bar{q}$ в СГП был использован для построения импакт фактора и амплитуды фоторождения продольно поляризованного легкого векторного мезона. Этот импакт фактор равен свертке жесткой части Φ_0 и амплитуды распределения мезона. Амплитуда распределения φ твиста 2 для продольно поляризованного векторного мезона V_L определяется с помощью нелокального оператора на световом конусе, перенормированного на масштабе μ_F

$$\langle V_L(p_V)|\bar{\Psi}(y)\gamma^\mu\Psi(0)|0\rangle_{y^2\to 0} = f_V\, p_V^\mu \int_0^1 dx\, e^{ix(p_V y)}\,\varphi(x,\mu_F), \tag{53}$$

где мы опустили вильсоновскую линию, соединяющую точки y и 0 на световом конусе, так как в нашей светоконусной калибровке она тождественно равна 1. Здесь f_V — константа связи мезона. Амплитуда в ГП имеет вид

$$\mathcal{A}_{LO}^\eta \equiv -\frac{e_V\, f_V\, \varepsilon_\beta}{N_c}\int_0^1 dx\,\varphi(x,\mu_F)\int\frac{d^d\vec{p}_1}{(2\pi)^d}\frac{d^d\vec{p}_2}{(2\pi)^d} \tag{54}$$
$$\times (2\pi)^{d+1}\delta\left(p_V^+ - p_\gamma^+\right)\delta\left(\vec{p}_V - \vec{p}_\gamma - \vec{p}_1 - \vec{p}_2\right)$$
$$\times \Phi_0^\beta(x, \vec{p}_1, \vec{p}_2)\left[\mathrm{Tr}(U_1^\eta U_2^{\eta\dagger}) - N_c\right](\vec{p}_1, \vec{p}_2).$$

Здесь ε_β — это вектор поляризации фотона, e_V — электрический заряд кварка, зависящий от флейворного состава мезона, p_V — импульс мезона. Жесткая часть имеет вид

$$\Phi_0^+(x) = \frac{2x\bar{x}\left(p_V^+\right)^2}{\left(\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2\right)^2 + x\bar{x}Q^2}, \quad \Phi_{0\perp}^\beta(x) = \frac{(x-\bar{x})p_V^+(\bar{x}p_{1\perp}^\beta - xp_{2\perp}^\beta)}{\left(\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2\right)^2 + x\bar{x}Q^2}. \tag{55}$$

В СГП амплитуда фоторождения мезона представима в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\eta}_{NLO} \equiv & -\frac{e_V f_V \varepsilon_\beta}{N_c}\int_0^1 dx\,\varphi\left(x,\mu_F\right)\frac{\alpha_s \Gamma\left(1-\epsilon\right)}{\left(4\pi\right)^{1+\epsilon}} \\ & \times \int \frac{d^d\vec{p}_1}{\left(2\pi\right)^d}\frac{d^d\vec{p}_2}{\left(2\pi\right)^d}\frac{d^d\vec{p}_3}{\left(2\pi\right)^d}\left(2\pi\right)^{d+1}\delta\left(p_V^+-p_\gamma^+\right)\delta\left(\vec{p}_V-\vec{p}_\gamma-\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_3\right) \\ & \times \Big\{\Phi_2^\beta\left(x,\,\vec{p}_1,\,\vec{p}_2,\,\vec{p}_3\right)\Big[\mathrm{Tr}(U_1^{\eta\dagger}U_3^{\eta\dagger})\mathrm{Tr}(U_3^{\eta\dagger}U_2^{\eta\dagger})-N_c\mathrm{Tr}(U_1^{\eta}U_2^{\eta\dagger})\Big]\left(\vec{p}_1,\,\vec{p}_2,\,\vec{p}_3\right) \\ & + \frac{N_c^2-1}{N_c}\Phi_1^\beta(x,\,\vec{p}_1,\,\vec{p}_2)\Big[\mathrm{Tr}(U_1^{\eta}U_2^{\eta\dagger})-N_c\Big]\left(\vec{p}_1,\,\vec{p}_2\right)\left(2\pi\right)^d\delta\left(\vec{p}_3\right)\Big\}. \qquad (56)\end{aligned}$$

Было показано, что мягкие и коллинеарные сингулярности в импакт факторе фоторождения $q\bar{q}$ с коллинеарными конечными кварками сокращаются с эволюцией амплитуды распределения до масштаба факторизации μ_F под действием уравнения Ефремова - Радюшкина - Бродского - Лепажа (ЕРБЛ). В схеме $\overline{MS}$ оно имеет вид

$$\frac{\partial\varphi(x,\mu_F)}{\partial\ln\mu_F^2}=\frac{\alpha_s C_F}{2\pi}\frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^\epsilon}\left(\frac{\mu_F^2}{\mu^2}\right)^\epsilon\int_0^1 dz\,\varphi(z,\mu_F)\,\mathcal{K}(x,z), \qquad (57)$$

где $C_F\equiv(N_c^2-1)/(2N_c)$ — это оператор Казимира в фундаментальном представлении $SU(N_c)$ и $\mathcal{K}(x,z)$ — это ядро ЕРБЛ [22, 23, 24]

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(x,z)=&\frac{1-x}{1-z}\left(1+\left[\frac{1}{x-z}\right]_+\right)\theta(x-z) \\ &+\frac{x}{z}\left(1+\left[\frac{1}{z-x}\right]_+\right)\theta(z-x)+\frac{3}{2}\,\delta(z-x). \qquad (58)\end{aligned}$$

Здесь для функции $F(z)$, которая ведет себя как $F_0+F_1\ln(z-z_0)$ при $z\to z_0$, $+$ прескрипция определена так

$$\int_0^1 dz\left[\frac{1}{z-z_0}\right]_+F(z)\equiv\int_0^1 dz\frac{F(z)-F_0-F_1\ln(z-z_0)}{z-z_0}. \qquad (59)$$

Получены следующие жесткие части импакт факторов

$$\Phi_1^+(x) = \int_0^x dz \left(\frac{x-z}{x}\right) \Phi_0^+(x-z)$$
$$\times \left[1 + \left(1 + \left[\frac{1}{z}\right]_+\right) \ln\left(\frac{\left(((\bar{x}+z)\vec{p}_1 - (x-z)\vec{p}_2)^2 + (x-z)(\bar{x}+z)Q^2\right)^2}{\mu_F^2 (x-z)(\bar{x}+z)Q^2}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\Phi_0^+(x)\left[\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\bar{x}}{x}\right) + 3 - \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{\left((\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2\right)^2}{x\bar{x}\mu_F^2 Q^2}\right)\right]$$
$$+ \frac{\left(p_\gamma^+\right)^2}{2x\bar{x}} \int_0^x dz \left[(\phi_5)_{LL}|_{\vec{p}_3=\vec{0}} + (\phi_6)_{LL}|_{\vec{p}_3=\vec{0}}\right]_+ + (x \leftrightarrow \bar{x}, \vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}_2) \tag{60}$$

для продольного фотона и

$$\Phi_{1\perp}^\beta(x) = \frac{1}{4}\left[\ln^2\left(\frac{\bar{x}}{x}\right) - \frac{\pi^2}{3} + 6 - 3\ln\left(\frac{(\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2}{\mu_F^2}\right)\right.$$
$$\left. + 3\frac{x\bar{x}Q^2}{(\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2)^2}\ln\left(\frac{(\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2}{x\bar{x}Q^2}\right)\right]\Phi_{0\perp}^\beta(x)$$
$$+ \int_0^x dz \left(\frac{x-z}{x}\right)\Phi_{0\perp}^\beta(x-z)\left[1 + \left(1 + \left[\frac{1}{z}\right]_+\right)\right.$$
$$\times \ln\left(\frac{((\bar{x}+z)\vec{p}_1 - (x-z)\vec{p}_2)^2 + (x-z)(\bar{x}+z)Q^2}{\mu_F^2}\right)$$

$$- \left(1 + \left[\frac{1}{z}\right]_+\right)\frac{(x-z)(\bar{x}+z)Q^2}{((\bar{x}+z)\vec{p}_1 - (x-z)\vec{p}_2)^2}$$
$$\left.\times \ln\left(\frac{((\bar{x}+z)\vec{p}_1 - (x-z)\vec{p}_2)^2 + (x-z)(\bar{x}+z)Q^2}{(x-z)(\bar{x}+z)Q^2}\right)\right]$$
$$+ \frac{p_\gamma^+}{2x\bar{x}}\int_0^x dz \left[(\phi_5)_{TL}^\beta|_{\vec{p}_3=\vec{0}} + (\phi_6)_{TL}^\beta|_{\vec{p}_3=\vec{0}}\right]_+ + (x \leftrightarrow \bar{x}, \vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}_2) \tag{61}$$

для поперечного фотона,

$$\Phi_2^+ = -\frac{x\bar{x}\left(p_\gamma^+\right)^2\left((x\vec{p}_V-\vec{p}_1)^2+(\bar{x}\vec{p}_V-\vec{p}_2)^2-\vec{p}_3^{\,2}+2x\bar{x}Q^2\right)}{\left((x\vec{p}_V-\vec{p}_1)^2+x\bar{x}Q^2\right)\left((\bar{x}\vec{p}_V-\vec{p}_2)^2+x\bar{x}Q^2\right)-x\bar{x}\vec{p}_3^{\,2}Q^2}$$

$$\times\ln\left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}}\right)\ln\left(\frac{\left((x\vec{p}_V-\vec{p}_1)^2+x\bar{x}Q^2\right)\left((\bar{x}\vec{p}_V-\vec{p}_2)^2+x\bar{x}Q^2\right)}{x\bar{x}\vec{p}_3^{\,2}Q^2}\right)$$

$$-\frac{4x\bar{x}\left(p_\gamma^+\right)^2}{(x\vec{p}_V-\vec{p}_1)^2+x\bar{x}Q^2}\ln\left(\frac{\bar{x}}{e^\eta}\right)\ln\left(\frac{\vec{p}_3^{\,2}}{Q^2}\right)$$

$$+\frac{\left(p_\gamma^+\right)^2}{2x\bar{x}}\int_0^x dz\left[(\phi_5)_{LL}+(\phi_6)_{LL}\right]_+ + (x\leftrightarrow\bar{x},\vec{p}_1\leftrightarrow\vec{p}_2) \tag{62}$$

для продольного фотона и

$$\Phi_{2\perp}^\beta(x) = p_\gamma^+(xp_{V\perp}^\beta-p_{1\perp}^\beta)(\bar{x}-x)\left(\frac{-2\ln\left(\frac{\vec{p}_3^{\,2}}{Q^2}\right)\ln\left(\frac{\bar{x}}{e^\eta}\right)}{(x\vec{p}_V-\vec{p}_1)^2+x\bar{x}Q^2}\right. \tag{63}$$

$$+\ln\left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}}\right)\left[\frac{1}{(x\vec{p}_V-\vec{p}_1)^2}\ln\left(\frac{(x\vec{p}_V-\vec{p}_1)^2+x\bar{x}Q^2}{x\bar{x}Q^2}\right)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\left((\bar{x}\vec{p}_V-\vec{p}_2)^2+x\bar{x}Q^2\right)\ln\left(\frac{\left((x\vec{p}_V-\vec{p}_1)^2+x\bar{x}Q^2\right)\left((\bar{x}\vec{p}_V-\vec{p}_2)^2+x\bar{x}Q^2\right)}{x\bar{x}\vec{p}_3^{\,2}Q^2}\right)}{\left((x\vec{p}_V-\vec{p}_1)^2+x\bar{x}Q^2\right)\left((\bar{x}\vec{p}_V-\vec{p}_2)^2+x\bar{x}Q^2\right)-x\bar{x}\vec{p}_3^{\,2}Q^2}\right]\right)$$

$$+\frac{p_\gamma^+}{2x\bar{x}}\int_0^x dz\left[(\phi_5)_{TL}^\beta+(\phi_6)_{TL}^\beta\right]_+ + (x\leftrightarrow\bar{x},\vec{p}_1\leftrightarrow\vec{p}_2)$$

для поперечного фотона. Величины $(\phi_{5,6})_{LL}$ и $(\phi_{5,6})_{TL}^\beta$ конечны и вычислены полностью или сведены к однократным интегралам без сингулярностей.

В третьей главе построена процедура восстановления полной формы оператора по его мебиусовской форме. Доказано, что мебиусовское представление ядра БФКЛ полностью определяет полное ядро симметричное относительно перестановки реджеонов. Для справедливости этого утверждения необходимы три свойства ядра БФКЛ в полном представлении: отсутствие инфракрасных расходимостей, отсутствие членов, пропорциональных $\delta(\vec{q_1})$ или $\delta(\vec{q_2})$ в ядре и калибровочная инвариантность, которая выражается в виде

$$K_r(\vec{q}_1,\vec{q}_1{}';\vec{q})|_{\vec{q}_1=0} = K_r(\vec{q}_1,\vec{q}_1{}';\vec{q})|_{\vec{q}_1{}'=0}$$

$$= K_r(\vec{q}_1,\vec{q}_1{}';\vec{q})|_{\vec{q}_1=\vec{q}} = K_r(\vec{q}_1,\vec{q}_1{}';\vec{q})|_{\vec{q}_1{}'=\vec{q}} = 0. \tag{64}$$

Здесь $\vec{q}=\vec{q}_1+\vec{q}_2$, $\vec{q}_1,\vec{q}_2(\vec{q}_1{}',\vec{q}_2{}')$ — поперечные импульсы входящих (выходящих) реджеонов, и $K_r(\vec{q}_1,\vec{q}_1{}';\vec{q})$ — это реальная часть ядра, определенная в [25]. Процедура построения полной формы заключается в следующем. Вычисляется преобразование Фурье мебиусовского ядра $\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_M|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle$

$$\langle\vec{q}_1,\vec{q}_2|\hat{\mathcal{K}}_M|\vec{q}_1{}',\vec{q}_2{}'\rangle=\int\frac{d\vec{r}_1}{2\pi}\frac{d\vec{r}_2}{2\pi}\frac{d\vec{r}_1{}'}{2\pi}\frac{d\vec{r}_2{}'}{2\pi}e^{-i\vec{q}_1\vec{r}_1-i\vec{q}_2\vec{r}_2+i\vec{q}_1{}'\vec{r}_1{}'+i\vec{q}_2{}'\vec{r}_2{}'}$$

$$\times\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_M|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle=\delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2-\vec{q}_1{}'-\vec{q}_2{}')\mathcal{K}_M(\vec{q}_1,\vec{q}_2;\vec{k}), \tag{65}$$

где $\vec{k}=\vec{q}_1-\vec{q}_1{}'=\vec{q}_2{}'-\vec{q}_2$ и $\vec{r}_i(\vec{r}_i{}')$ — поперечные координаты входящих (выходящих) реджеонов,

$$\mathcal{K}_M(\vec{q}_1,\vec{q}_2;\vec{k})=\int\frac{d\vec{r}_{11'}}{2\pi}\frac{d\vec{r}_{22'}}{2\pi}d\vec{r}_{1'2'}e^{-i\vec{q}_1\vec{r}_{11'}-i\vec{q}_2\vec{r}_{22'}-i\vec{k}\vec{r}_{1'2'}}\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_M|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle. \tag{66}$$

Этот интеграл может быть сингулярен при $\vec{r}_{1'2'}=0$. Чтобы избежать расходимости, $\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_M|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle$ разбивается на сумму

$$\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_M|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle=\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_{M1}|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle+\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_{M2}|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle, \tag{67}$$

где $\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_{M2}|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle$ имеет неинтегрируемую сингулярность при $\vec{r}_{1'2'}=0$, а интеграл (66) с $\hat{\mathcal{K}}_{M1}$ вместо $\hat{\mathcal{K}}_M$ конечен. Далее определяется

$$\mathcal{K}_M(\vec{q}_1,\vec{q}_2;\vec{k})_-=\int\frac{d\vec{r}_{11'}}{2\pi}\frac{d\vec{r}_{22'}}{2\pi}d\vec{r}_{1'2'}e^{-i\vec{q}_1\vec{r}_{11'}-i\vec{q}_2\vec{r}_{22'}-i\vec{k}\vec{r}_{1'2'}}\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_{M1}|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle$$

$$+\int\frac{d\vec{r}_{11'}}{2\pi}\frac{d\vec{r}_{22'}}{2\pi}d\vec{r}_{1'2'}e^{-i\vec{q}_1\vec{r}_{11'}-i\vec{q}_2\vec{r}_{22'}}(e^{-i\vec{k}\vec{r}_{1'2'}}-1)\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_{M2}|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle. \tag{68}$$

Таким образом вычитаются члены, расходящиеся при $\vec{r}_{1'2'}=0$. Чтобы интеграл (68) был хорошо определен, нужно потребовать, чтобы матричный элемент $\langle\vec{r}_1,\vec{r}_2|\hat{\mathcal{K}}_{M2}|\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}'\rangle$ стремился к 0 быстрее чем $1/\vec{r}_{1'2'}^{\,2}$. Ядро БФКЛ обладает этим свойством, что отражает его ИК-стабильность, то есть отсутствие расходимостей при малых $\vec{k}$. Если обозначить

$$\langle\vec{q}_1,\vec{q}_2|\hat{\mathcal{K}}|\vec{q}_1{}',\vec{q}_2{}'\rangle=\delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2-\vec{q}_1{}'-\vec{q}_2{}')\mathcal{K}(\vec{q}_1,\vec{q}_2;\vec{k}), \tag{69}$$

то

$$\mathcal{K}_M(\vec{q}_1,\vec{q}_2;\vec{k})_-=\mathcal{K}(\vec{q}_1,\vec{q}_2;\vec{k})_-$$

$$-\frac{1}{2}(\delta(\vec{q}_2)+\delta(\vec{q}_1))\int d\vec{l}_1d\vec{l}_2\delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2-\vec{l}_1-\vec{l}_2)\mathcal{K}(\vec{l}_1,\vec{l}_2;\vec{l}_1-\vec{q}_1{}')_-\ , \tag{70}$$

где $\mathcal{K}(\vec{q}_1,\vec{q}_2;\vec{k})_-$ означает $\mathcal{K}(\vec{q}_1,\vec{q}_2;\vec{k})$ без членов независимых от $\vec{k}$. Технически это означает, что в $\mathcal{K}_M(\vec{q}_1,\vec{q}_2;\vec{k})_-$ можно отбросить члены, содержащие

$\delta(\vec{q}_i)$. Далее в реальную часть (70) необходимо добавить члены, не зависящие от $\vec{k}$ так, чтобы она была равна 0 при $\vec{q}_1{}' = 0$ и $\vec{q}_2{}' = 0$, что восстановит калибровочную инвариантность. Такая процедура была применена к оператору U, приводящему ядро БФКЛ в СГП к квазиконформному виду. Этот оператор состоит из двух частей. Одна из них была построена в полном представлении, вторая в мебиусовском. Восстанавливая полную форму второй части, была получена полная форма всего оператора

$$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \alpha_s \hat{U} | \vec{q}_1{}', \vec{q}_2{}' \rangle = \delta(\vec{q}_{11'} + \vec{q}_{22'}) \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \left[\frac{1}{\vec{q}_1^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{q}_1{}'^{\,2} \vec{q}_2^{\,2}}{\vec{k}^{\,2} \vec{q}^{\,2}} \right) + \frac{1}{\vec{q}_2^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{q}_2{}'^{\,2} \vec{q}_1^{\,2}}{\vec{k}^{\,2} \vec{q}^{\,2}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\vec{k}^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{q}_1{}'^{\,2} \vec{q}_2{}'^{\,2}}{\vec{q}_1^{\,2} \vec{q}_2^{\,2}} \right) - \frac{2\vec{q}_1 \vec{k}}{\vec{k}^{\,2} \vec{q}_1^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{q}_1{}'^{\,2}}{\vec{k}^{\,2}} \right) + \frac{2\vec{q}_2 \vec{k}}{\vec{k}^{\,2} \vec{q}_2^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{q}_2{}'^{\,2}}{\vec{k}^{\,2}} \right) - \frac{2\vec{q}_1 \vec{q}_2}{\vec{q}_1^{\,2} \vec{q}_2^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{q}^{\,2}}{\vec{k}^{\,2}} \right) \right]$$

$$- \frac{\alpha_s \beta_0}{8\pi} \ln\left(\vec{q}_1^{\,2} \vec{q}_2^{\,2} \right) \delta(\vec{q}_{11'}) \delta(\vec{q}_{22'}) - (\psi(1) + \ln 2) \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{K}^{(B)} | \vec{q}_1{}', \vec{q}_2{}' \rangle \ , \qquad (71)$$

где $\hat{K}^{(B)}$ — это борновское ядро БФКЛ. Также в этой главе была построена мебиусовская форма всего оператора U.

В заключении приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Построено уравнение эволюции для барионной вильсоновской петли в ГЛП и СГЛП, его квазиконформная и линеаризованная формы.

2. Построены уравнения эволюции для квадрупольного и дважды дипольного операторов в СГЛП, их квазиконформные формы.

3. Построено решение уравнения БФКЛ в СГЛП для рассеяния вперед.

4. Построен импакт фактор эксклюзивного дифракционного фоторождения двух струй в СГП.

5. Построен импакт фактор эксклюзивного дифракционного фоторождения трех струй в ГП.

6. Построен импакт фактор эксклюзивного дифракционного фоторождения легкого продольно поляризованного векторного мезона в СГП.

7. Построен алгоритм получения полной формы калибровочно инвариантных операторов по их мебиусовской форме.

8. Построены полная и мебиусовская формы оператора, приводящего полное ядро БФКЛ в СГП к квазиконформному виду.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Towards a complete next-to-logarithmic description of forward exclusive diffractive dijet electroproduction at HERA: real corrections // Phys. Rev. D. – 2019. – Vol. 100. – P. 074020.

2. Boussarie R., Grabovsky A. V., Ivanov D. Y., Szymanowski L., Wallon S. Next-to-Leading Order Computation of Exclusive Diffractive Light Vector Meson Production in a Saturation Framework // Phys. Rev. Lett. – 2017. – Vol. 119. – P. 072002.

3. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. On the one loop $\gamma^{(*)} \to q\overline{q}$ impact factor and the exclusive diffractive cross sections for the production of two or three jets // JHEP. – 2016. – Vol. 11. – P. 149.

4. Grabovsky A. V. On the low-x NLO evolution of 4 point colorless operators // JHEP. – 2015. – Vol. 09. – P. 194.

5. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Impact factor for high-energy two and three jets diffractive production // JHEP. – 2014. – Vol. 09. – P. 026.

6. Balitsky I., Grabovsky A. V. NLO evolution of 3-quark Wilson loop operator // JHEP. – 2015. – Vol. 01. – P. 009.

7. Grabovsky A. V. Connected contribution to the kernel of the evolution equation for 3-quark Wilson loop operator // JHEP. – 2013. – Vol. 09. – P. 141.

8. Grabovsky A. V. On the solution to the NLO forward BFKL equation // JHEP. – 2013. – Vol. 09. – P. 098.

9. Gerasimov R. E., Grabovsky A. V. Evolution equation for 3-quark Wilson loop operator // JHEP. – 2013. – Vol. 04. – P. 102.

10. Fadin V. S., Fiore R., Grabovsky A. V., Papa A. Connection between complete and Moebius forms of gauge invariant operators // Nucl. Phys. B. – 2012. – Vol. 856. – P. 111.

11. Boussarie R., Grabovsky A. V., Ivanov D. Y., Szymanowski L., Wallon S. NLO exclusive diffractive processes with saturation // PoS. – 2018. – Vol. DIS2017. – P. 062.

12. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Impact Factor for Exclusive Diffractive Dijet Production with NLO Accuracy // AIP Conf. Proc. – 2017. – Vol. 1819. – P. 030009.

13. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. NLO impact factor for diffractive dijet production in the shockwave formalism // PoS. – 2016. – Vol. DIS2016. – P. 170.

14. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Photon dissociation into two and three jets: initial and final state corrections // Acta Phys. Polon. Supp. B. – 2015. – Vol. 8. – P. 897.

15. Grabovskiy A. Higher Fock States in CGC // PoS. – 2015. – Vol. DIS2015. – P. 074.

16. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Impact factor for high-energy two and three jets diffractive production // AIP Conf. Proc. – 2015. – Vol. 1654. – P. 030005.

17. Grabovsky A. V. Low-x Evolution Equation for Proton Green Function // Acta Phys. Polon. Supp. B. – 2014. – Vol. 7. – P. 493.

Список литературы

[1] Fadin V.S., Kuraev E.A., Lipatov L.N. On The Pomeranchuk Singularity In Asymptotically Free Theories // Phys. Lett. B. – 1975. – Vol. 60. – P. 50.

[2] Kuraev E. A., Lipatov L. N., Fadin V. S. Multi - Reggeon Processes In The Yang-Mills Theory // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1976. – Vol. 71. – P. 840.

[3] Kuraev E. A., Lipatov L. N., Fadin V. S. The Pomeranchuk Singularity In Nonabelian Gauge Theories // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1977. – Vol. 72. – P. 377.

[4] Balitskii Ya. Ya., Lipatov L. N. The Pomeranchuk Singularity In Quantum Chromodynamics // Sov. J. Nucl. Phys. – 1978. – Vol. 28. – P. 822.

[5] McLerran L., Venugopalan R. Computing quark and gluon distribution functions for very large nuclei // Phys. Rev. D. – 1994. – Vol. 49. – P. 2233.

[6] McLerran L., Venugopalan R. Gluon distribution functions for very large nuclei at small transverse momentum // Phys. Rev. D. – 1994. – Vol. 49. – P. 3352.

[7] McLerran L., Venugopalan R. Green's functions in the color field of a large nucleus // Phys. Rev. D. – 1994. – Vol. 50. – P. 2225.

[8] Iancu E., Leonidov A., McLerran L. The renormalization group equation for the color glass condensate // Phys. Lett. B. – 2001. – Vol. 510. – P. 133.

[9] Ferreiro E., Iancu E., Leonidov A., McLerran L. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate. II // Nucl. Phys. A. – 2002. – Vol. 703. – P. 489.

[10] Jalilian-Marian J., Kovner A., Leonidov A., Weigert H. The BFKL equation from the Wilson renormalization group // Nucl. Phys. B. – 1997. – Vol. 504. – P. 415.

[11] Jalilian-Marian J., Kovner A., Leonidov A., Weigert H. The Wilson renormalization group for low x physics: Gluon evolution at finite parton density // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 59. – P. 014014.

[12] Nikolaev N. N., Zakharov B. G. The Triple pomeron regime and the structure function of the pomeron in the diffractive deep inelastic scattering at very small x // Z. Phys. C. – 1994. – Vol. 64. – P. 631.

[13] Nikolaev N. N., Zakharov B. G., Zoller V. R. The s channel approach to Lipatov's pomeron and hadronic cross-sections // JETP Lett. – 1994. – Vol. 59. – P. 6.

[14] Mueller A. H. Soft gluons in the infinite momentum wave function and the BFKL pomeron // Nucl. Phys. B. – 1994. – Vol. 415. – P. 373.

[15] Mueller A. H., Patel B. Single and double BFKL pomeron exchange and a dipole picture of high-energy hard processes // Nucl. Phys. B. – 1994. – Vol. 425. – P. 471.

[16] Balitsky I. Operator expansion for high-energy scattering // Nucl. Phys. B. – 1996. – Vol. 463. – P. 99.

[17] Kovchegov Yu.V. Small x F(2) structure function of a nucleus including multiple pomeron exchanges // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 60. – P. 034008.

[18] Kovchegov Yu.V. Unitarization of the BFKL pomeron on a nucleus // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol. 61. – P. 074018.

[19] Balitsky I., Chirilli G. A. NLO evolution of color dipoles in N=4 SYM // Nucl. Phys. B. – 2009. – Vol. 822. – P. 45.

[20] Fadin V. S., Fiore R., Grabovsky A. V. On the discrepancy of the low-x evolution kernels // Nucl. Phys. B. – 2009. – Vol. 820. – P. 334.

[21] Ivanov D. Y., Papa A. The next-to-leading order forward jet vertex in the small-cone approximation // JHEP. – 2012. – Vol. 05. – P. 086.

[22] Farrar G. R. Jackson D. R. The Pion Form-Factor // Phys. Rev. Lett. – 1979. – Vol. 43. – P. 246.

[23] Lepage G. P., Brodsky S. J. Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics: Evolution Equations for Hadronic Wave Functions and the Form-Factors of Mesons // Phys. Lett. B. – 1979. – 87. – P. 359.

[24] Efremov A. V., Radyushkin A. V. Factorization and Asymptotical Behavior of Pion Form-Factor in QCD // Phys. Lett. B. – 1980. – Vol. 94. – P. 245.

[25] Fadin V. S., Fiore R. The Generalized nonforward BFKL equation and the 'bootstrap' condition for the gluon Reggeization in the NLLA // Phys. Lett. B. – 1998. – Vol. 440. – P. 359.

ГРАБОВСКИЙ Андрей Владимирович

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТОВ БОЛЬШИХ ГЛЮОННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ В КХД

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Сдано в набор 18.06. 2020 г.
Подписано в печать 18.06. 2020 г.
Формат 60х90 1/16 Объем 1.0 печ.л., 0.8 уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 35

Обработано на PC и отпечатано
на ротапринте «ИЯФ им. Г.И. Будкера» СО РАН,
Новосибирск, 630090, пр. Академика Лаврентьева, 11